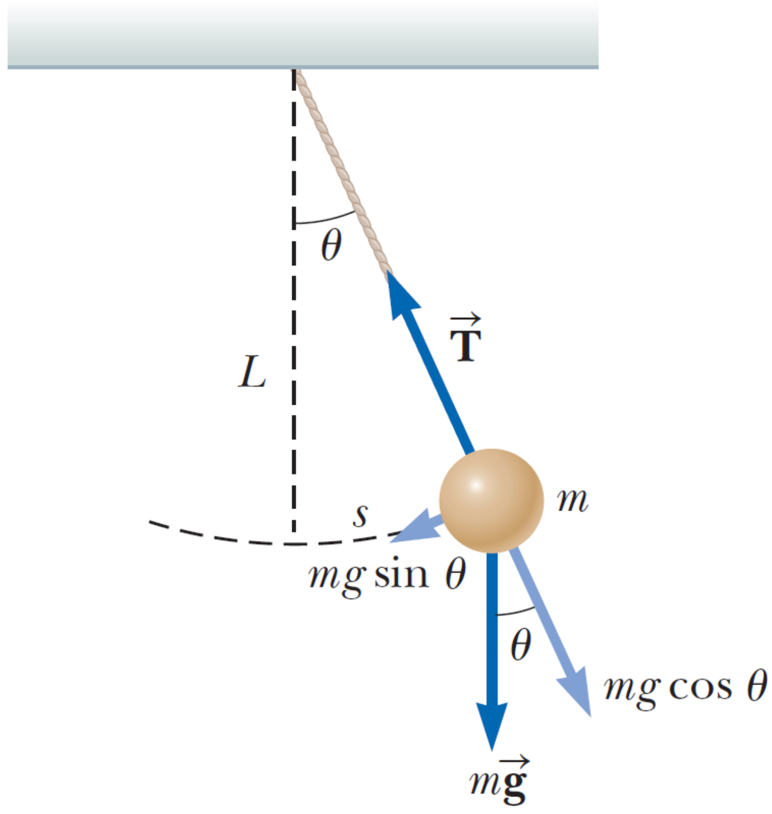
Experiência 2

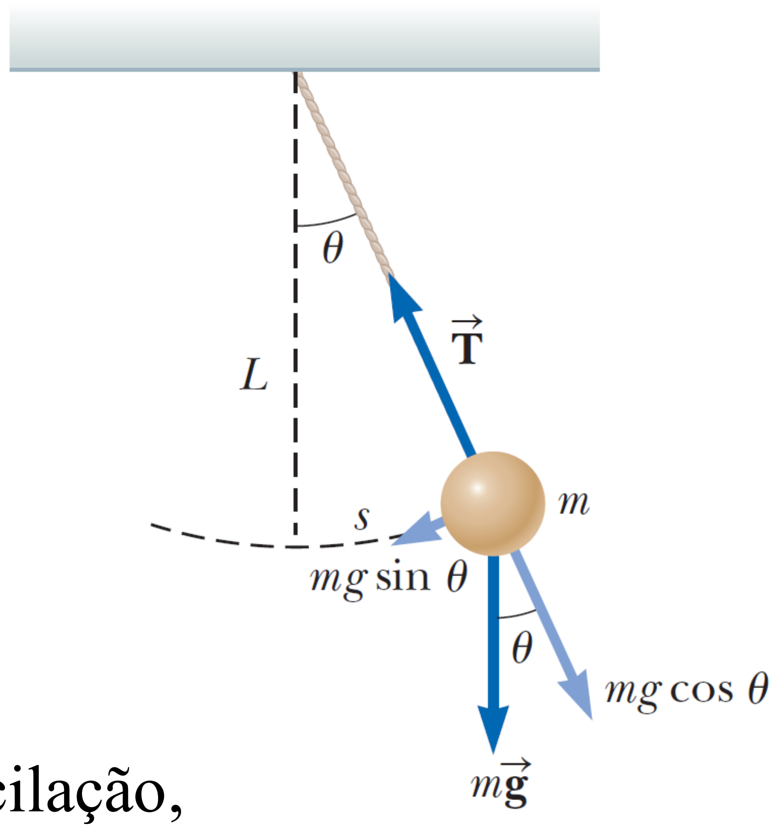
PÊNDULO

- Um pêndulo é um sistema mecânico que exibe movimento periódico.
- É constituído por uma massa, m, suspensa por um fio com massa desprezável.
- Para ângulos θ pequenos, o movimento é muito semelhante a um oscilador harmónico simples.



- Aplicando a segunda lei de Newton à massa suspensa:

$$ma_s = F_t \Leftrightarrow m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\theta$$



- Se θ for suficientemente pequeno:

$$s = L\theta \qquad \& \qquad \sin\theta \approx \theta$$

- Portanto:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

- Com solução:

$$\theta(t) = \theta_{Max}\cos(\omega t + \phi)$$

- onde θ_{Max} é a amplitude máxima da oscilação, $\omega = \sqrt{g/L}$; ϕ *é a fase*

- Portanto:

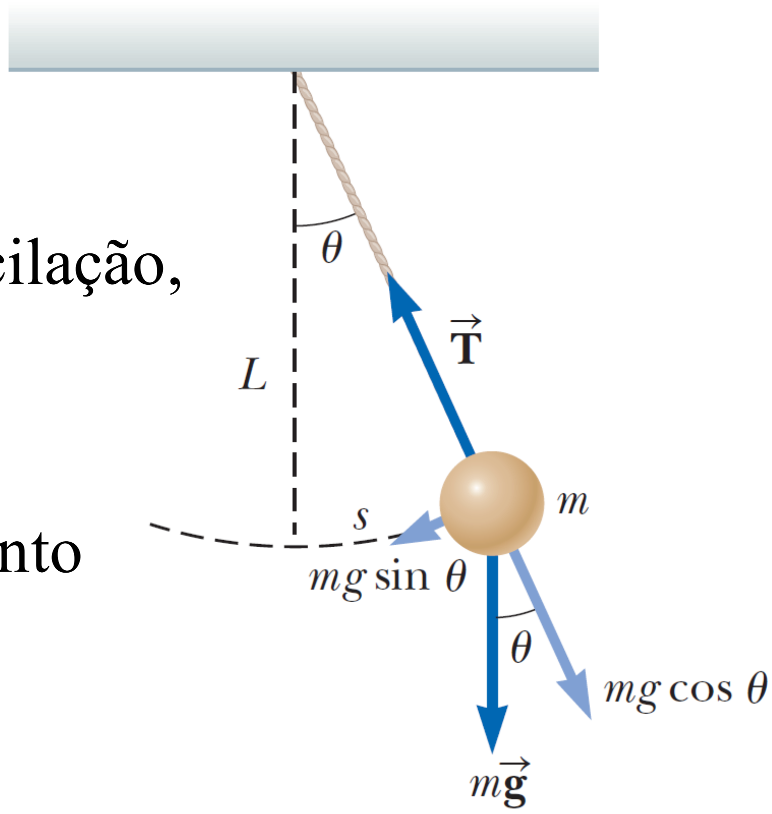
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

- Com solução:

$$\theta(t) = \theta_{Max}\cos(\omega t + \phi)$$

- onde θ_{Max} é a amplitude máxima da oscilação,

$\omega = \sqrt{g/L}$ e *ϕ é a fase*



- Ajustando o instante inicial do movimento

$$\phi = 0$$

Além disso:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

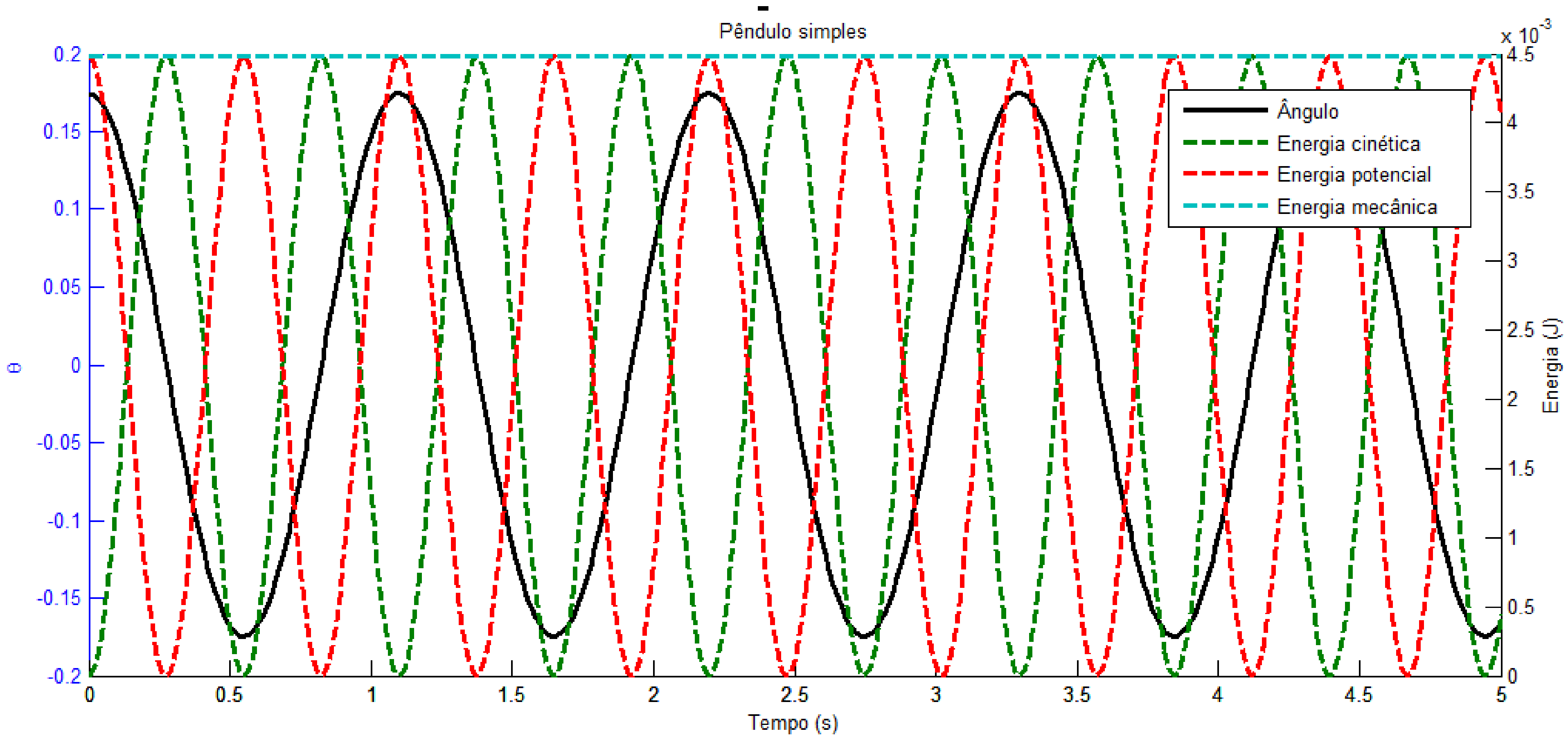
- A energia cinética também varia com o tempo:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}mL^2\theta_{Max}^2\omega^2(\sin\omega t)^2 = mgL\frac{\theta_{Max}^2}{2}(\sin\omega t)^2$$

- A energia potencial é dada por:

$$U = mg(L - L\cos\theta)$$
$$= mgL\left(1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right) = mgL\frac{\theta_{Max}^2}{2}(\cos\omega t)^2$$

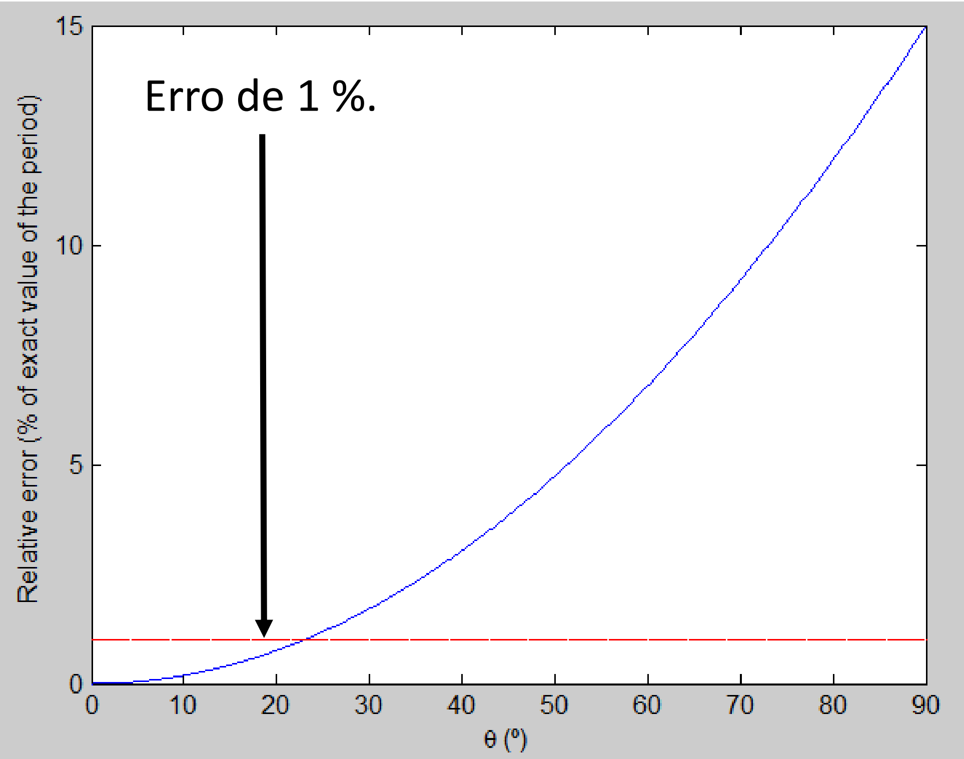
Pêndulo Simples: energia potencial e cinética



- No caso em que a amplitude de oscilação é muito grande, já não se pode fazer a aproximação:

$$\sin\theta \approx \theta$$

- Nesse caso o período de oscilação pode ser escrito por uma série:



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{11}{3072}\theta_0^4 + \ldots\right]$$

Pêndulo Simples: análise do movimento como rotação

- O movimento de um pêndulo também pode ser descrito como uma rotação em torno de um ponto fixo.

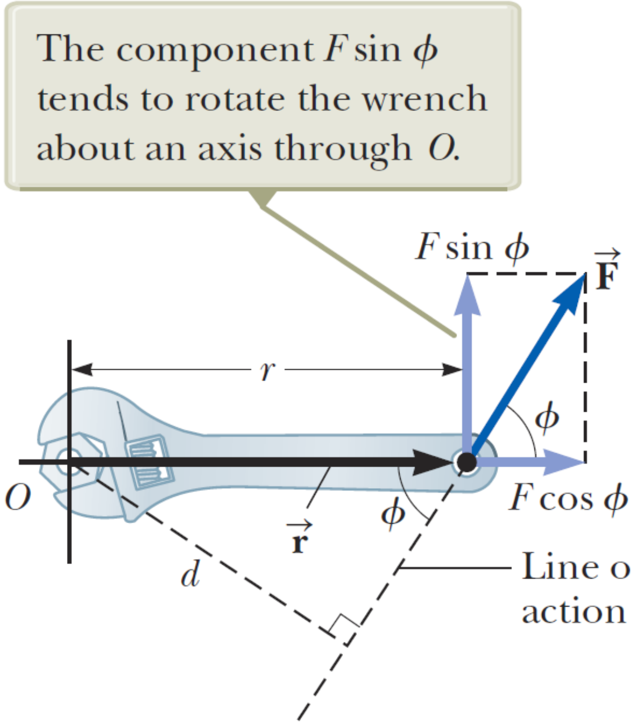
- Para fazer isso vamos começar por introduzir o conceito de momento de uma força (N) e momento angular (L):

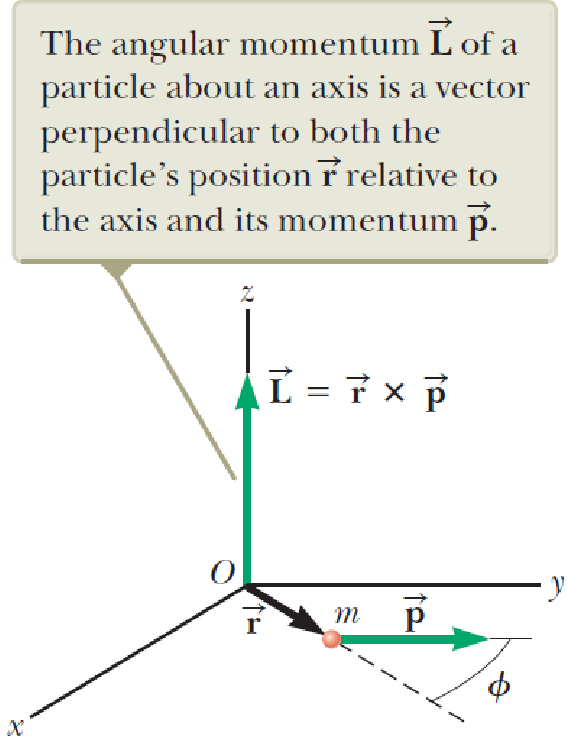
$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})$$

- A relação entre N e L é:

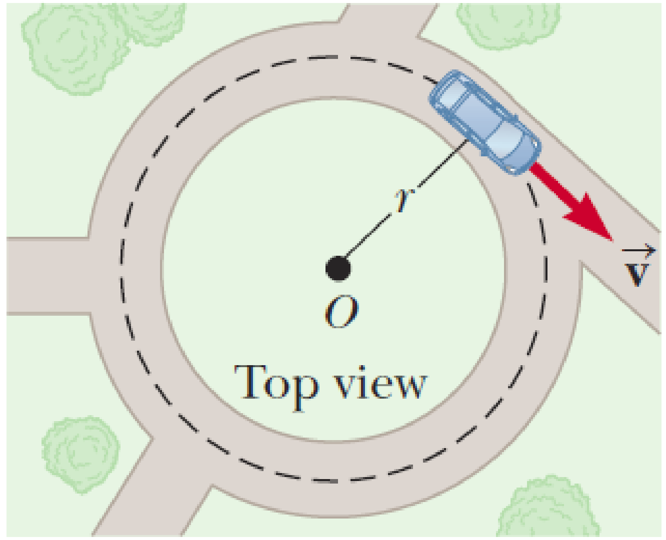
$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$





- Para uma partícula pontual que faça uma rotação em torno de um ponto, temos:

$$\vec{L} = mrv\hat{e}_z$$



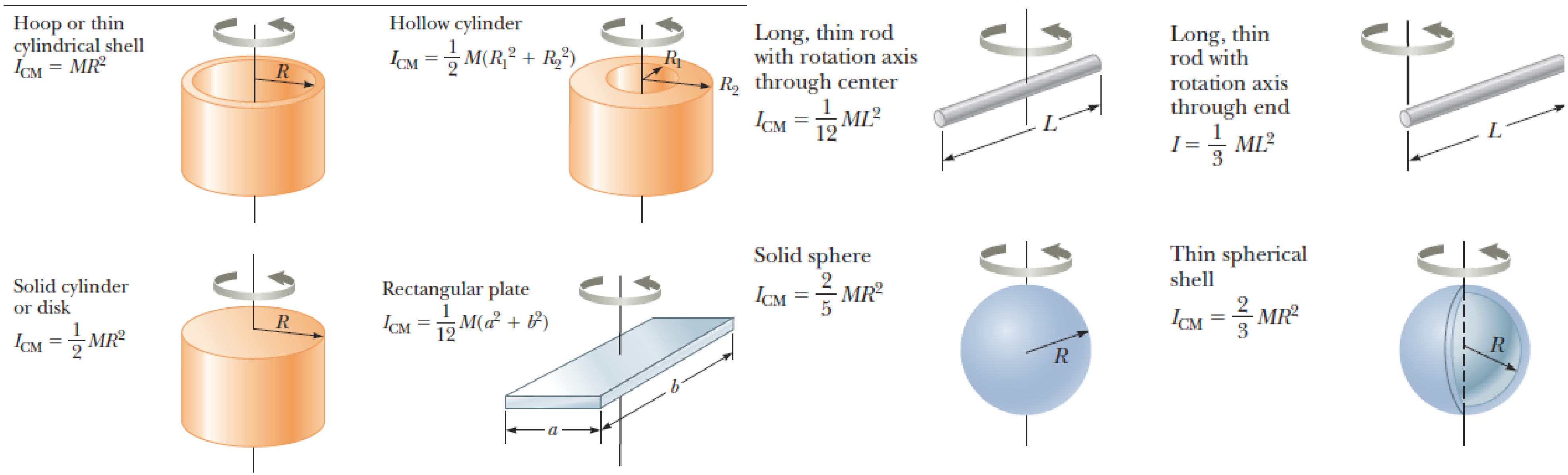
- Onde z é o eixo perpendicular ao plano definido por $\vec{r}$ e $\vec{v}$

- Mas: $v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{d(r\theta)}{dt} = r\dfrac{d\theta}{dt}$

- Logo: $L_z = mr^2\dfrac{d\theta}{dt} = I\dfrac{d\theta}{dt}$

- Onde $I = mr^2$ é o momento de inércia.

- Para objetos o momento de inércia dependa da forma dos mesmos e da sua densidade.



Pêndulo Simples: análise do movimento como rotação (cont.)

- O momento das forças externas que atuam sobre o sistema (força gravítica) é:

$$N_z = -Lmg\sin\theta$$

- O momento linear do sistema é:

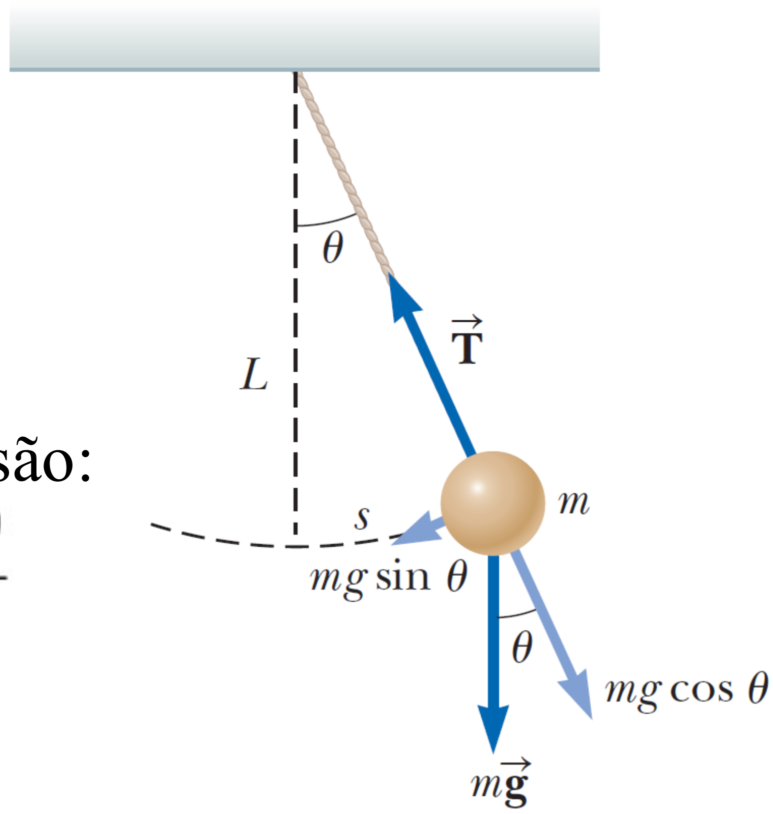
$$L_z = I\frac{d\theta}{dt} = mL^2\frac{d\theta}{dt}$$

- Ficamos então com a seguinte expressão:

$$N_z = \frac{dL_z}{dt} \Leftrightarrow -Lmg\sin\theta = mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

- que é a mesma expressão que obtivémos anteriormente.



- Um pêndulo física é um objeto que descreve um movimento de oscilação semelhante a um pêndulo.
- Podemos analisá-lo de uma forma semelhante ao caso anterior:

$$L_z = I\frac{d\theta}{dt}$$

$$N_z = -L_{cm}\, mg \sin\theta$$

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -L_{cm}\, mg\theta$$

- A frequência das oscilações é agora:

$$\omega = \sqrt{\frac{L_{cm}\, mg}{I}}$$