Cálculo Infinitesimal II / Cálculo II - Apontamentos de Apoio
Capítulo 1 - Equações Diferenciais Ordinárias

Uma equação diferencial ordinária é uma equação onde intervém uma função real de variável real desconhecida, que designaremos por y, bem como algumas das suas derivadas.

Neste capítulo estudaremos alguns tipos de equações diferenciais ordinárias.

Definição 0.1 *Chama-se ordem da equação diferencial à maior das ordens das derivadas nela intervenientes.*

Definição 0.2 *Uma função f diz-se uma solução duma equação diferencial de ordem n num intervalo $]a,b[$, se as derivadas de f até à ordem n existem em $]a,b[$, e se a equação é satisfeita quando nela se substitui $y = f(x)$ e as respectivas derivadas.*

Resolver uma equação diferencial é determinar o conjunto das suas soluções.

Por exemplo, é fácil de ver que a função $f(x) = \sin x$ é solução da equação diferencial de segunda ordem $y'' + y = 0$. Veremos mais adiante que qualquer solução desta equação é da forma $y = A \sin x + B \cos x$, onde A e B são constantes reais. À expressão anterior chama-se, por isso, *solução geral* da equação diferencial.

1 Equações diferenciais de variáveis separáveis

Definição 1.1 *Uma equação diferencial de primeira ordem diz-se de variáveis separáveis se se puder escrever na forma*

$$f(y)\, y' = g(x),$$

onde f é uma função contínua que depende apenas da variável y e g é uma função contínua que depende apenas da variável x.

Teorema 1.2 *Se y é uma solução da equação diferencial $f(y)\, y' = g(x)$ então y satisfaz a igualdade*

$$\int f(y)\, dy = \int g(x)\, dx + C. \tag{1.1}$$

Note-se que a partir da expressão (1.1) nem sempre é possível explicitar y como função de x, dizemos então que a solução é dada na forma implícita.

Em muitas circunstâncias é importante determinar a solução duma equação diferencial que satisfaz uma condição do tipo $y(x_0) = y_0$. Chama-se a isto resolver um *problema de valores iniciais* e à condição $y(x_0) = y_0$ dá-se o nome de *condição inicial*. Para uma equação do tipo $f(y)\, y' = g(x)$ pode-se mostrar que se f e f' são funções contínuas num intervalo contendo o ponto y_0, se $f(y_0) \neq 0$, e se g é uma função contínua num intervalo contendo o ponto x_0, então o problema de valores iniciais tem uma única solução, definida nalgum intervalo contendo o ponto x_0.

2 Equações diferenciais lineares de primeira ordem

Definição 2.1 *Uma equação diferencial de primeira ordem diz-se linear se se puder escrever na forma*

$$y' + P(x)\, y = Q(x),$$

onde P e Q são funções contínuas da variável x num determinado intervalo $]a,b[$.

Teorema 2.2 *A solução geral da equação diferencial $y' + P(x)\,y = Q(x)$ no intervalo $]a, b[$ é dada por*

$$y(x) = \frac{1}{I(x)} \left[\int I(x)Q(x)\,dx + C \right], \tag{2.2}$$

onde $C \in \mathbb{R}$ e a função $I(x)$, chamada factor integrante, é dada por $I(x) = e^{\int P(x)\,dx}$.

Assim, para resolvermos uma equação diferencial linear de primeira ordem, escrita na forma acima, basta multiplicarmos ambos os membros da equação pelo factor integrante $I(x)$.

Resulta do teorema anterior que, para uma equação diferencial linear de primeira ordem, se P e Q forem funções contínuas da variável x num determinado intervalo $]a, b[$ contendo o ponto x_0, então o problema de valores iniciais

$$y' + P(x)\,y = Q(x), \quad y(x_0) = y_0$$

tem uma única solução dada pela expressão (2.2), usando a condição inicial para determinar o valor da constante C.

3 Equações diferenciais lineares de segunda ordem

Definição 3.1 *Uma equação diferencial de segunda ordem diz-se linear se se puder escrever na forma*

$$P(x)\,y'' + Q(x)\,y' + R(x)\,y = G(x),$$

onde P, Q, R, G são funções contínuas da variável x num determinado intervalo $]a, b[$. A equação diz-se homogénea se $G(x) = 0$, caso contrário diz-se não homogénea.

Para uma equação de segunda ordem, resolver um *problema de valores iniciais* é determinar a solução da equação que satisfaz as *condições iniciais* $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$. Se a equação em causa for linear e se as funções P, Q, R e G forem contínuas num determinado intervalo $]a, b[$, contendo o ponto x_0 e tal que $P(x) \neq 0$ nesse intervalo, pode-se mostrar que o correspondente problema de valores iniciais tem uma única solução.

Vamos começar por estudar a equação

$$P(x)\,y'' + Q(x)\,y' + R(x)\,y = 0, \tag{3.3}$$

ou seja, o caso homogéneo. Da linearidade da equação diferencial resulta o teorema seguinte que diz que qualquer combinação linear de soluções da equação homogénea (3.3) é ainda uma solução da mesma equação.

Teorema 3.2 *Se y_1 e y_2 são soluções da equação* (3.3) *e C_1 e C_2 são constantes arbitrárias, então a função $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ é ainda uma solução da mesma equação.*

O próximo resultado diz-nos que a solução geral da equação (3.3) é uma combinação linear de duas soluções linearmente independentes (isto é, nenhuma delas é o produto de uma constante pela outra).

Teorema 3.3 *Se y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes da equação* (3.3)*, então a solução geral desta equação é dada por*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Em geral não é fácil determinar soluções linearmente independentes de uma equação linear de segunda ordem. No entanto, é sempre possível fazê-lo se as funções P, Q e R forem constantes, isto é, se a equação diferencial tiver a forma

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3.4}$$

onde a, b e c são constantes. Diz-se neste caso que a equação tem *coeficientes constantes.*

Atendendo às propriedades da função exponencial tem-se o seguinte resultado:

Teorema 3.4 *A função* $y(x) = e^{rx}$ *é solução da equação diferencial* (3.4) *se e só se* r *for uma raiz da equação* $ar^2 + br + c = 0$.

À equação $ar^2 + br + c = 0$ dá-se o nome de *equação característica* ou *polinómio característico* da equação diferencial (3.4). Trata-se duma equação algébrica que se obtém de (3.4) substituindo y'' por r^2, y' por r e y por 1.

É bem conhecido que a equação de segundo grau $ar^2 + br + c = 0$ pode ter duas raízes reais distintas, uma raiz real dupla ou duas raízes complexas conjugadas, consoante o sinal de $b^2 - 4ac$. Vejamos em cada um dos casos qual é a expressão da solução geral da equação diferencial homogénea (3.4).

Teorema 3.5 *Seja* $ar^2 + br + c = 0$ *a equação característica da equação* $ay'' + by' + cy = 0$.

i) Se a equação característica tiver duas raízes reais distintas r_1 *e* r_2 *então a solução geral da equação diferencial* $ay'' + by' + cy = 0$ *é dada por*

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

onde C_1 *e* C_2 *são constantes arbitrárias.*

ii) Se a equação característica tiver uma raiz real dupla r_0 *então a solução geral da equação diferencial* $ay'' + by' + cy = 0$ *é dada por*

$$y(x) = C_1 e^{r_0 x} + C_2 x e^{r_0 x},$$

onde C_1 *e* C_2 *são constantes arbitrárias.*

iii) Se a equação característica tiver duas raízes complexas conjugadas $\alpha \pm \beta i$ *então a solução geral da equação diferencial* $ay'' + by' + cy = 0$ *é dada por*

$$y(x) = e^{\alpha x} \left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x) \right),$$

onde C_1 *e* C_2 *são constantes arbitrárias.*

Passamos agora ao estudo de equações diferenciais lineares de segunda ordem de coeficientes constantes não homogéneas, ou seja, equações da forma

$$ay'' + by' + cy = G(x), \tag{3.5}$$

onde a, b e c são constantes e G é uma função contínua da variável x.

Definição 3.6 *A equação* $ay'' + by' + cy = 0$ *chama-se equação homogénea associada à equação* (3.5).

Teorema 3.7 *i) Se* y_1 *e* y_2 *são soluções da equação* (3.5), *então* $y_1 - y_2$ *é solução da equação homogénea associada* $ay'' + by' + cy = 0$.

ii) A solução geral da equação (3.5) *é dada por*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

onde y_p *é uma solução particular de* (3.5) *e* y_h *é a solução geral da equação homogénea associada* $ay'' + by' + cy = 0$.

Note-se que o resultado anterior é ainda válido no caso em que os coeficientes da equação diferencial de segunda ordem não são constantes.

Uma vez que já sabemos resolver equações homogéneas, o teorema anterior permite-nos determinar a solução geral de uma equação não homogénea, desde que seja conhecida uma solução particular y_p. Usaremos o *método dos coeficientes indeterminados* para calcularmos y_p no caso em que a função $G(x)$ é de um dos seguintes tipos:

i) $G(x) = P_n(x)$ polinómio de grau n,

ii) $G(x) = P_n(x) e^{\alpha x}$,

iii) $G(x) = P_n(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ ou $G(x) = P_n(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x)$.

No caso i) tem-se $y_p(x) = a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n$, no caso ii) tem-se

$$y_p(x) = (a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n) e^{\alpha x},$$

enquanto que, para qualquer uma das possibilidades referidas em iii), y_p é dada por

$$y_p(x) = (a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n) e^{\alpha x} \sin(\beta x) + (b_0 + b_1 x + \dots b_n x^n) e^{\alpha x} \cos(\beta x).$$

No entanto, se alguma das parcelas da função y_p referida acima for solução da equação homogénea associada, deve-se multiplicar y_p por x^m onde $m \in \{1, 2\}$ é o menor número tal que nenhum termo do produto $x^m y_p$ seja solução da equação homogénea.

Se a função $G(x)$ for uma soma de funções dos tipos considerados acima podemos usar o seguinte resultado para determinar a solução geral da equação diferencial (3.5).

Teorema 3.8 (Princípio da Sobreposição) *Se y_1 é solução da equação*

$$ay'' + by' + cy = G_1(x)$$

e y_2 é solução da equação

$$ay'' + by' + cy = G_2(x),$$

então a função $y_1 + y_2$ é solução da equação

$$ay'' + by' + cy = G_1(x) + G_2(x).$$