Exercícios de Cálculo Infinitesimal II / Cálculo II

Capítulo 1

1. Resolva as seguintes equações diferenciais de variáveis separáveis:

   a) $y' = \dfrac{6x^2}{2y + \cos y}$;

   b) $y'(x^2 + 1) = 2x(1 + y^2)$, $y(0) = 1$;

   c) $y' = xe^{x-y}$, $y(0) = 0$;

   d) $y' = \dfrac{2x + 1}{2(y - 1)}$, $y(0) = -1$.

2. Suponha que $f(x)$ é solução da equação diferencial $y' + y = 3$. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$;

   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$;

   c) se $f(0) > \pi$ então f é decrescente em $\mathbb{R}$.

3. Determine a solução (geral) das seguintes equações diferenciais lineares:

   a) $y' - 2xy = x$, $y(0) = 7$;

   b) $x^2\, y' + xy = 1$, $(x > 0)$, $y(1) = 2$;

   c) $x\, y' + 2y = x \cos x$, $y(\pi) = 0$;

   d) $x^2 y' + 2xy = \dfrac{x^4}{x^2 + 1}$.

4. A propagação de uma determinada doença infecciosa obedece à equação diferencial

$$\frac{P'(t)}{\log 2} = \frac{1 - P(t)}{3},$$

   onde $P(t)$ representa a fracção da população infectada, que aumenta com o tempo, e t é dado em anos. Sabendo que $P(0) = 0$,

   a) calcule $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t)$ e interprete o resultado;

   b) calcule a percentagem da população infectada ao fim de 3 anos;

   c) determine ao fim de quantos anos é que a percentagem da população infectada é de 75%.

5. Considere a equação diferencial

$$T'(t) = -k(T(t) - M)$$

   que descreve a evolução da temperatura $T(t)$ de um corpo quando colocado num meio a uma temperatura mais baixa M e onde k é uma constante positiva (lei do arrefecimento de Newton).

   a) Resolva a equação anterior.

   b) Suponha que um corpo, cuja temperatura inicial é 100°, é colocado num meio cuja temperatura ambiente é 20°. Sabendo que o corpo leva 20 minutos a atingir a temperatura de 60°, quanto tempo será necessário para que a sua temperatura baixe até aos 30°?

6. A massa de uma substância radioactiva obedece à equação

$$m'(t) = -\alpha m(t),$$

   onde α é uma constante positiva e t é dado em anos. Sabendo que 40% da substância desaparece em 5 anos, determine a percentagem da substância inicial que desapareceu ao fim de 10 anos.

7. Um rumor espalha-se a uma taxa proporcional ao produto da fracção da população que já o ouviu pela fracção da população que ainda não o conhece.

   a) Designando por $y(t)$ a fracção da população que já ouviu o rumor, escreva a equação diferencial a que $y(t)$ obedece e resolva-a.

   b) Uma aldeia tem 1000 habitantes. Suponha que a uma dada hora o rumor era do conhecimento de apenas 100 pessoas e que quatro horas depois já se tinha espalhado a 50% da população. Determine a hora a que apenas 10% da população não tinha conhecimento do rumor.

8. Resolva os seguintes problemas de valores iniciais:

   a) $y'e^x = \dfrac{1}{\log y}$, $y(0) = e$;

   b) $2xy + (1 + x^2)y' = 0$, $y(0) = 1$;

   c) $3y^2y' = 2x + \sin x$, $y(0) = 2$;

   d) $\dfrac{y'}{2} = 1 + \dfrac{x}{x^2 + 1}y$, $y(1) = 2\pi$;

   e) $y' = \dfrac{1}{x^2y - 2x^2 + y - 2}$, $y(0) = 3$;

   f) $y' + \left(1 - \dfrac{2}{x}\right) y = x^2$, $y(-1) = 2e + 1$.

9. Considere a equação diferencial

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y^2(x),$$

   onde p e q são funções contínuas num intervalo $]a, b[$ (equação de Bernoulli).

   a) Supondo que $y \neq 0$, multiplique a equação por y^{-2} e mostre que a mudança de variável $v = y^{-1}$ transforma a equação anterior numa equação linear em v.

   b) Use o método descrito em a) para resolver a equação $y' + 4y = 3e^{2x}y^2$.

10. Considere a equação diferencial linear de segunda ordem $y'' + ay' + by = 0$ onde $a, b \in \mathbb{R}$.

    a) Sabendo que as raizes da equação característica são 0 e 3, escreva a solução geral da equação dada.

    b) Sabendo que uma raiz da equação característica é $2 - i$, escreva a solução geral da equação dada.

    c) Sabendo que a única raiz da equação característica é 2, escreva a solução geral da equação dada.

11. Considere a equação diferencial linear de segunda ordem $y'' + 2y' - 3y = g(x)$. Indique a forma (mas não calcule os coeficientes indeterminados) de uma solução particular da equação anterior quando

    a) $g(x) = 7\cos(3x)$; b) $g(x) = 5e^{-3x}$; c) $g(x) = x^2\cos(\pi x)$;
    d) $g(x) = 2xe^x \sin x$; e) $g(x) = x^2e^x + 3xe^x$.

12. Determine a solução das seguintes equações diferenciais:

    a) $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}$;

    b) $y'' - 2y' - 3y = 8e^{-x}$;

    c) $y'' - 2y' - 3y = e^{2x} + 8e^{-x}$;

    d) $y'' + 2y' + 5y = 10\sin x$;

    e) $y'' + y = 4x + 2$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$;

    f) $y'' - 5y' = 5x - 6$, $y(0) = 7$, $y'(0) = 1$;

    g) $y'' - 2y' + y = 3xe^x$.