

Cap.3 Órbitas

- Órbitas e Swaths
- Generalidades sobre movimento
- As leis de Kepler
- Lei da atracção Universal
- Estudo do movimento do corpo
- Equação do movimento no plano
- Estudo do movimento na órbita
- Os parâmetros da órbita
- Perturbação da órbita
- Órbitas usadas para observação da Terra (Geoestacionárias e heliosincronas)
- Determinação dos parâmetros orbitais

3.1 Órbitas e Swaths

O percurso de um satélite no espaço é referido por **órbita**.

As órbitas são escolhidas em função dos objectivos da missão e pode variar a inclinação da órbita, a altitude da órbita, o período da órbita, etc. Os satélites a elevadas altitudes, com capacidade para ver a todo o instante a mesma porção da Terra têm **órbitas geoestacionárias**. Estes satélites têm altitudes de cerca de 36000km e rodam à mesma velocidade da Terra de modo que estão parados relativamente à Terra. Aplicações: Meteorologia e comunicações.

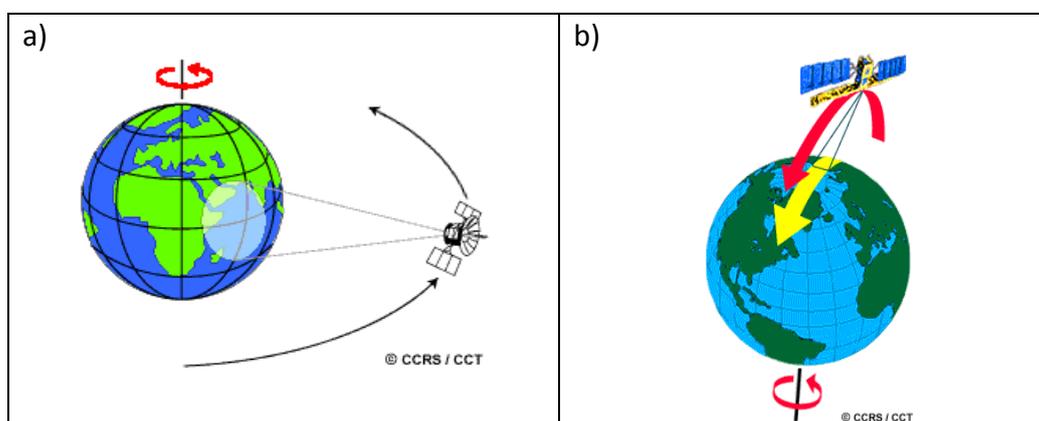


Figura 3.1: a) Órbita geoestacionárias, b) Órbita polar

Outras plataformas são desenhadas para seguirem uma órbita norte-sul que em conjugação com a rotação da Terra oeste-este permite a cobertura da totalidade da Terra num determinado período de tempo. Estas órbitas são **quase-polares** e muitas são **hélio-síncronas**. Neste caso a sua passagem num determinado local é efetuado sempre à mesma hora solar. Em qualquer latitude, a posição do Sol no instante de passagem do satélite é sempre a mesma. Isto assegura condições de iluminação consistentes em anos sucessivos. As missões de observação da Terra são

essencialmente quase polares, o que quer dizer que o satélite viaja para norte num lado da Terra e para sul no outro lado da Terra (Figura 3.2). A estes percursos designamos por:

- **Passagem ascendente**
- **Passagem descendente**

Se a órbita for heliosíncrona a passagem descendente é feita de dia e a passagem ascendente é feita de noite.

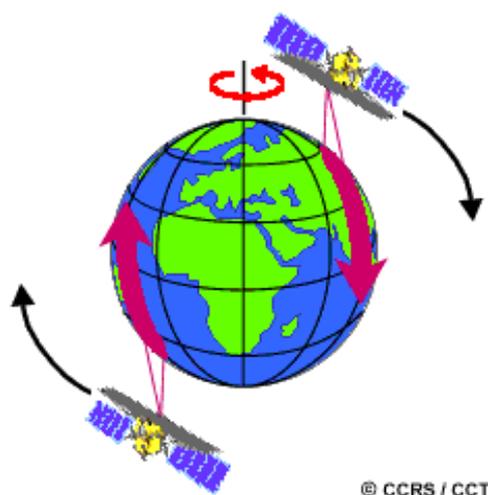


Figura 3.2: Passagem ascendente e descendente de um satélite

No seu percurso em torno da Terra o satélite vê uma certa porção da Terra. A área coberta pelo sensor é referida por: **SWATH**

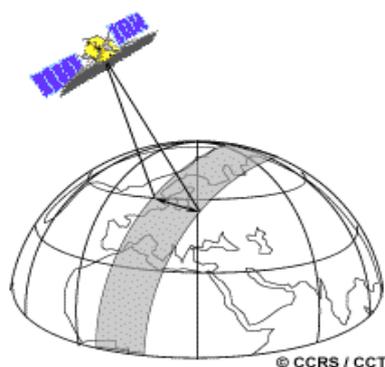


Figura 3.3: Faixa observada por um satélite em cada passagem (SWATH).

Com início num qualquer traço, um ciclo orbital é concluído quando o satélite passa exatamente no mesmo traço, no mesmo ponto nadiral. O ciclo orbital não é o mesmo que período de revisita por causa das visadas off-nadir.

3.2 Generalidades sobre movimento

O estudo do movimento de um corpo rígido pode ser feito separando o movimento em torno do centro de massa desse corpo e o movimento do centro de massa. A trajetória percorrida pelo centro de massa é a **órbita** do satélite. Johannes Kepler (1571-1630) com base nas observações de Tycho Brahe (1546-1601) formulou as seguintes 3 leis:

1ª lei : A trajetória de cada planeta, relativamente ao Sol, existe num plano fixo, passando pelo Sol. Mais concretamente, é uma elipse, fixa no espaço, e da qual o Sol ocupa um dos focos.

2ª lei: O vetor que liga o Sol a cada planeta varre áreas iguais em tempos iguais

3ª lei: Os quadrados dos períodos orbitais dos diversos planetas são proporcionais aos cubos das respetivas distâncias médias ao Sol.

Foi com base nestas 3 leis de enunciado tão simples que Isaac Newton (1642-1727) conseguiu deduzir o princípio da atração Universal.

“Matéria atrai matéria na razão direta das massas e inversa do quadrado da distância”

A sua formulação matemática é:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad X = -G \frac{(x - \xi)}{r^3} // \quad (1)$$

em que: G é a constante de gravitação universal tem as dimensões $L^3 M^{-1} T^{-2}$ e tem o valor de $6.67300 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ($GM = 3986005 \cdot 10^8 \text{ m}^3/\text{s}^2$ de acordo com o GRS80). m_1 é a massa do corpo atraído e m_2 a massa do corpo atraente e r a distância entre os dois centros de massa.

3.3 Estudo do movimento do corpo

Como o movimento do centro de massa do corpo se realiza num plano de acordo com a 1ª lei de Kepler, podemos reduzir o problema a esse plano, fazendo-o coincidir com o plano xoy, donde resulta a equação do movimento relativo ao elemento de massa m_1 :

$$// m_1 \ddot{x}_1 = -G \frac{m_1(m_1 + m_2)}{r^3} x_1 \quad (2)$$

E as duas equações do movimento no plano (x,y) em ordem a x e y:

$$m \ddot{x} = -G \frac{m\mu}{r^3} x \quad \text{e} \quad m \ddot{y} = -G \frac{m\mu}{r^3} y \quad (3)$$

em que: $\mu = m_1 + m_2$ e $m = m_1$

Recordando os integrais das áreas (indicados na tabela 3.1) constatamos que no caso do movimento plano subsiste apenas:

$$m(xy - \dot{x}y) = c \quad (4)$$

Tabela 3.1: Integrais das áreas, dos centros de massa e integral de energia.

Integrais das áreas	Integrais dos centros de massa
$\sum_k m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k) = c_7$	$\sum_i m_i \dot{x}_i = c_1$
$\sum_k m_k (z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k) = c_8$	$\sum_i m_i x_i = c_1 t + c_4$
$\sum_k m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k) = c_9$	Integral de Energia
	$T + U = h = C_{10}$

Consideremos o plano orbital e tomemos um sistema de coordenadas polares (r, θ) .

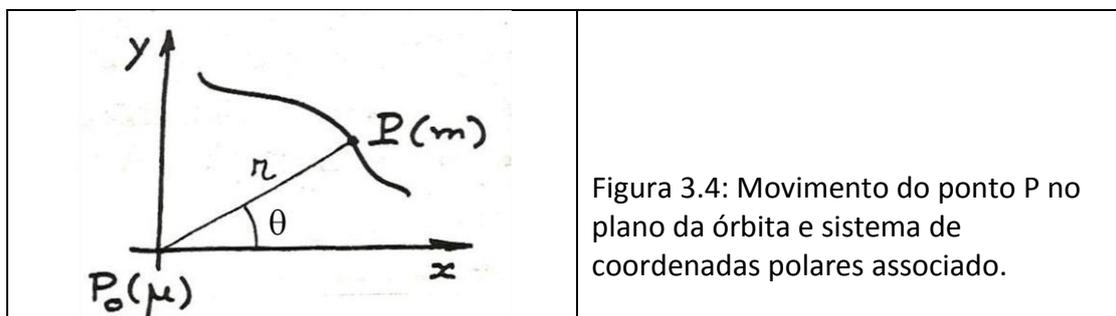


Figura 3.4: Movimento do ponto P no plano da órbita e sistema de coordenadas polares associado.

Da relação $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, diferenciando obtemos:

$$\dot{\theta} = \frac{\frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{r^2} \quad (5)$$

Usando a equação 4, obtemos:

$$m r^2 \dot{\theta} = c \quad (6)$$

Ou equivalentemente, a primeira equação do movimento.

$$r^2 \dot{\theta} = c \quad (7)$$

c é a constante das áreas.

Da formula de Binet sabemos que:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{G\mu}{c^2} \quad \text{em que} \quad u = \frac{1}{r} \quad (8)$$

equação diferencial de 2ª ordem linear e com segundo membro constante cuja equação característica admite duas raízes $\pm i$, da qual se obtém a solução em ordem a u :

$$u = A \cos(\theta + \theta_0) + \frac{G\mu}{c^2} \quad (9)$$

ou em r , a segunda equação do movimento:

$$r = \frac{\frac{c^2}{G\mu}}{1 + \frac{Ac^2}{G\mu} \cos(\theta + \theta_0)} \quad (10)$$

em que A e θ_0 são constantes de integração.

A equação geral de uma cónica em coordenadas polares, referida a um dos seus focos e de eixo polar medido desse foco para o vértice é dada por:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varpi} \quad (11)$$

Onde p é um parâmetro, e a excentricidade e ϖ a anomalia verdadeira. Comparando esta equação com a segunda equação do movimento, verificamos que a trajetória do movimento é uma cónica em que o ponto atrativo ocupa um dos focos e em que o parâmetro, excentricidade e anomalia são dados por:

$$p = \frac{c^2}{G\mu} \quad e = \frac{Ac^2}{G\mu} \quad \varpi = \theta + \theta_0 \quad (12)$$

A constante θ_0 representa o desfasamento, contado negativamente, do eixo maior da cónica a partir do eixo de que se começam a contar os ângulos.

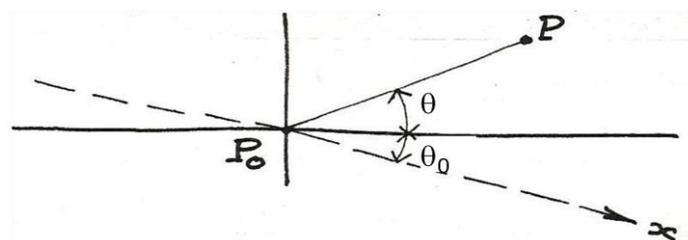


Figura 3.5: Desfasamento da órbita, θ_0 .

A natureza da cónica depende do valor da excentricidade:

Para $e < 1$ é uma elipse

Para $e = 1$ é uma parábola

Para $e > 1$ é uma hipérbole

3.4 Equação do movimento no plano

Consideremos h a energia total do sistema. Sabemos que:

$$h = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{m\mu}{r} \quad (13)$$

Escrevendo esta equação em coordenadas polares e assumindo a primeira equação do movimento ($r^2\dot{\theta} = c$), obtemos:

$$e^2 - 1 = \frac{2p}{G\mu m}h \quad (14)$$

Que relaciona a energia total do sistema (h) com a excentricidade da órbita.

Verificamos que para $h < 0$ a órbita é elíptica ($e < 1$); para $h=0$ a órbita é uma parábola ($e = 1$) e para $h > 0$ será uma hipérbole ($e > 1$).

O parâmetro p está relacionado com os parâmetros geométricos da cónica, respetivamente o semieixo maior a , do movimento elíptico, a distância periastrica q , no parabólico, e o semieixo transversal a no hiperbólico. Neste caso:

$$p = a(1 - e^2); \quad p = 2q; \quad p = a(e^2 - 1) \quad (15)$$

E nesse caso, usando a equação 14, obtemos:

$$a = -\frac{G\mu m}{2h} \quad q = \frac{c^2}{2G\mu} \quad a = \frac{G\mu m}{2h} \quad (16)$$

De acordo com a segunda lei de Kepler: $\frac{dA}{dt} = \frac{c}{2}$ e então $c = 2\frac{dA}{dt}$. Por integração, obtemos: $c(t - t_0) = 2A$.

Que nos dá a área percorrida pelo corpo num dado intervalo de tempo conhecida a constante das áreas. Se for T o período do movimento, o corpo percorre a área de uma elipse (área = πab), e a equação fica :

$$cT = 2(ab\pi) \quad (17)$$

Mas como (ver equação 12): $c = \sqrt{G\mu p} = \sqrt{G\mu a(1 - e^2)}$

então:

$$T = \frac{2\pi ab}{c} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{G\mu a(1-e^2)}} = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{G\mu}} \quad (18)$$

Ou seja, o período depende apenas de **a**, do semieixo maior da órbita. Reescrito de outra forma:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G\mu}{4\pi^2} \quad (19)$$

Corresponde à terceira lei de Kepler, a razão entre o cubo do semieixo maior e o quadrado do período de revolução é constante em todos os planetas.

Isto só é verdade se μ for constante. No caso de dois corpos o valor de μ é a soma da massa dos dois corpos. No caso da Terra e de um satélite a expressão anterior fica:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_T + m_S)}{4\pi^2} \quad (20)$$

Se usarmos a expressão anterior (equação 16) que nos diz que a energia do movimento elíptico é $h = -\frac{G\mu m}{2a_1}$, então:

$$T + U = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{m\mu}{r} = -\frac{G\mu m}{2a_1} \quad (21)$$

Da qual se obtém a velocidade do corpo no plano da órbita:

$$v^2 = G\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a_1} \right) \quad (22)$$

Importante relação que nos dá a velocidade conhecido o raio vector **r** e conhecido **a**.

Caso elíptico	$a_1 = a$	$v^2 < 2G\mu/r$
Caso parabólico	$a_1 = \infty$	$v^2 = 2G\mu/r$
Caso hiperbólico	$a_1 = -a$	$v^2 > 2G\mu/r$

Se quisermos efetuar o lançamento de um satélite supondo que esse lançamento se efetuará por um impulso único e que podemos supor a massa da Terra concentrada no centro, desprezando a resistência do ar, etc., para que o satélite não torne a cair na Terra é necessário que a velocidade de lançamento seja pelo menos igual à velocidade parabólica correspondente ao raio R

$$v = \sqrt{\frac{2G(M_T + m)}{R}} \approx 11.2 \text{ km s}^{-1}$$

Se desejarmos que o objeto não só escape da atração terrestre mas saia do próprio sistema solar, teremos que o lançar com uma velocidade parabólica relativa ao Sol e à posição da Terra nesse instante e a velocidade seria 42 km/s

Da expressão da velocidade:

$$v^2 = G\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a_1} \right)$$

É fácil verificar que nos casos parabólico e hiperbólico, quando $r \rightarrow \infty$, as velocidades limite são:

$$v_\infty = 0 \quad \text{e} \quad v_\infty = G\mu/a_1 > 0$$

Isto significa que no primeiro caso o corpo apesar de se afastar indefinidamente continua ligado ao sistema solar, afazer parte dele, pois tendo velocidade nula relativamente a este sistema, isso significa que o acompanha. No segundo caso o corpo é estranho ao sistema. A sua velocidade afasta-o, logo não lhe pertence.

3.5 Estudo do movimento na órbita

Estudemos agora o movimento dum corpo sobre a sua órbita utilizando como ponto de partida o integral das áreas (primeira equação do movimento):

$$r^2 \dot{\theta} = c$$

Onde θ é a anomalia verdadeira e $r=r(\theta)$ uma função conhecida dessa anomalia e E é a anomalia excêntrica, ângulo semelhante à latitude reduzida (figura 3.6).

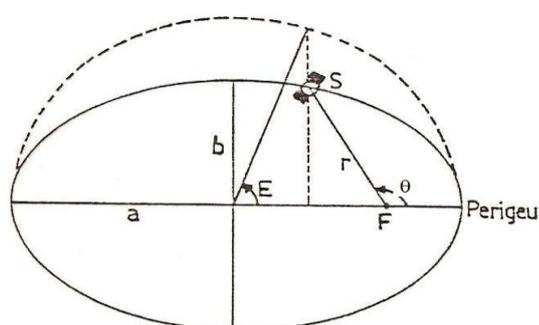


Figura 3.6: Parâmetros do movimento no plano da órbita.

A expressão de r em função da anomalia excêntrica é:

$$r = a(1 - e \cos E) \tag{23}$$

e da anomalia verdadeira é:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg}\left(\frac{E}{2}\right) \quad (24)$$

E a equação de Kepler:

$$E - e \sin E = n(t - \tau) \quad (25)$$

em que τ é o instante zero, e n é o movimento médio dado por: $n^2 a^3 = G\mu$, ou seja:

$$n = \sqrt{\frac{G\mu}{a^3}} \quad (26)$$

No intervalo de tempo $t-t_0$, $n(t-t_0)$ tem as dimensões de um ângulo. Seria o ângulo percorrido num intervalo de tempo pelo raio vetor que rodasse com velocidade angular constante n .

Por isso designa-se por anomalia média $M = n(t-t_0)$, t varia de t_0 a $t+T$ sendo T o período do movimento e t_0 o tempo de passagem no perigeu. A equação de Kepler é termos da anomalia média fica:

$$E - e \sin E = M, \quad M: \text{varia de } 0 \text{ a } 2\pi \quad (26)$$

3.6 Os parâmetros da órbita

Na secção anterior foram apresentados os parâmetros do movimento no plano da órbita. Nesta secção o plano da órbita será referenciado nos sistema Terra. Para isso consideramos uma esfera centrada no centro de massa da Terra e com origem nesta um referencial cartesiano tri-ortogonal (X,Y,Z).

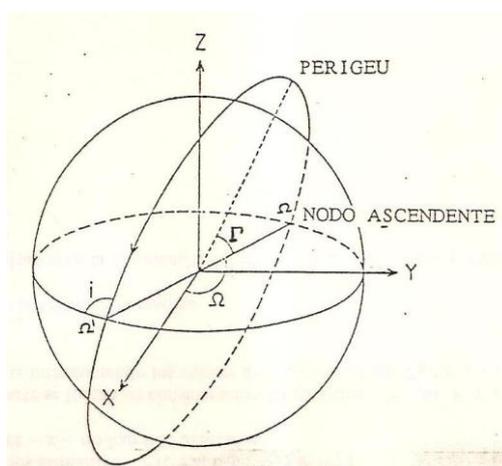


Figura 3.7: Parâmetros do plano da órbita relativos à Terra.

O plano XoY é o equador numa dada data e orienta-se o eixo X para o ponto vernal médio nessa data. O eixo dos Z é dirigido em direção ao pólo verdadeiro (CIO). O plano da órbita intersecta o equador segundo uma linha chamada linha dos nodos $\Omega\Omega'$. Estes dois pontos Ω e Ω' , chamaremos nodo ascendente àquele no qual o satélite passa do hemisfério austral para o boreal.

A posição da órbita no espaço é definida por cinco parâmetros orbitais (a,e,i, Γ , Ω):

Semieixo-maior (a): comprimento do semi-eixo da elipse descrita pelo satélite. Recordemos que na terceira lei de Kepler o semi-eixo maior **a** é função do período **T**.

Excentricidade (e): para uma órbita elíptica o valor da excentricidade está entre 0 e 1. No perigeu a distância do satélite à Terra é:

$$R_p = a(1-e)$$

e ao apogeu

$$R_a = a(1+e)$$

Inclinação (i): é o ângulo entre a normal à orbita (orientada de maneira a ver dessa normal, o satélite rodar no sentido direto) com a linha dos polos orientada de sul para norte. A inclinação pode tomar os valores no intervalo $[0, \pi]$.

Quando $0 < i < \pi/2$ diz-se que **o movimento é direto**, e se $\pi/2 < i < \pi$ **é retrógrado**.

Ascensão reta do nodo ascendente (Ω): é o ângulo contado positivamente no sentido direto entre a direção do ponto vernal (oX) e o nodo ascendente da órbita, podendo ter valores entre $[0, \pi]$.

Argumento do perigeu (Γ): é o ângulo contado positivamente de 0° a 360° no sentido do movimento do satélite, entre a direção do nodo ascendente e a direção do perigeu.

Anomalia verdadeira (θ): é o ângulo contado positivamente no sentido do movimento do satélite entre a direção do perigeu e a direção do satélite.

Anomalia Excêntrica (E): é o argumento da imagem do satélite na transformação afim da elipse no seu círculo principal.

Anomalia Média (M): é o ângulo contado positivamente no sentido do movimento do satélite, entre a direção do perigeu e a direção do satélite fictício que descreve uma órbita circular do mesmo período que o satélite considerado.

$$M(t) = M(t_0) + n_0(t - t_0)$$

3.7 Perturbação da órbita

O movimento elíptico tratado até este momento baseia-se na simplificação de que:

1. O campo gravitacional da Terra é reduzido ao de um ponto de massa
2. A órbita do satélite é controlada exclusivamente por este campo gravitacional central.

O potencial gravitacional da Terra é representado como uma série de harmónicas esféricas:

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \right] \quad (27)$$

Para efeitos de estudo da órbita de um satélite é conveniente separar o potencial gravitacional na sua componente central (GM/r) na sua componente perturbadora.

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} + R(r, \theta, \lambda) \quad (28)$$

em que:

$$R(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \right] \quad (29)$$

É também frequente a separação entre as harmónicas zonais (independentes da longitude, $m=0$) e as tesserais que dependem da longitude ($m > 0$).

A situação que estamos a considerar neste momento é consideravelmente mais difícil que a anterior, em que tínhamos uma força central dada por GM , porque agora temos também os coeficientes harmónicos (C_{nm} , S_{nm}). Sabendo o campo gravitacional e os elementos keplerianos, para uma época inicial, a órbita pode ainda ser completamente determinada. Os coeficientes harmónicos (C_{nm} , S_{nm}) tornam o atual campo gravitacional **não central** e conseqüentemente faz com que os elementos de Kepler sejam variáveis no tempo.

Depois de algum trabalho de cálculo chegamos às equações que nos dão a variação de cada elemento de Kepler com o tempo (Sunkel, pag.38):

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M}; \quad \frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \omega} \quad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega}$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}; \quad \frac{d\Gamma}{dt} = -\frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e}$$

A principal força perturbadora do movimento do satélite é devida ao termo zonal $J_2=C_{20}$, isto é, devido à forma achatada da Terra. Este coeficiente é aproximadamente 1000 vezes superior aos outros coeficientes, produzindo uma aceleração perturbadora de cerca de $5 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$: Os restantes termos do modelo geopotencial contribuem no seu conjunto com uma aceleração perturbadora aproximada de $3 \times 10^{-7} \text{ ms}^{-2}$. Neste caso consideramos apenas o termo C_{20} obtemos:

$$R_{20} = \frac{Ga_e^2}{a^3} (1-e^2)^{-3/2} (3\sin^2(i/4) - 1/2) C_{20} \quad (30)$$

$$\frac{da}{dt} = 0 \quad \frac{de}{dt} = 0 \quad \frac{di}{dt} = 0 \quad (31)$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{3nC_{20}a_e^2}{4(1-e^2)a^2} (1-5\cos^2 i) \quad (32)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3nC_{20}a_e^2}{2(1-e^2)a^2} \cos i \quad (33)$$

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{3nC_{20}a_e^2}{4(1-e^2)^{3/2}a^2} (3\cos^2 i - 1) \quad (34)$$

a_e é o semieixo maior da Terra

3.7.1 Perturbação devida à atmosfera

Um satélite em órbita terrestre sofre uma Ação resistiva do ar, devido à interação com as partículas da atmosfera envolvente. Essa força atua no satélite na mesma direção do seu vetor velocidade e em sentido contrário ao movimento. Para a maioria dos satélites artificiais, a resistência atmosférica modifica a órbita, uma vez que retira a energia ao satélite, provocando variações seculares em **a** e **M** que resultam numa contração da órbita e um movimento em espiral. A atmosfera induz sobre uma órbita circular uma diminuição contínua do semieixo maior da órbita:

$$\frac{da}{dt} = -k C_D \frac{S}{m} \rho$$

ρ : densidade da atmosfera M: massa do satélite $\approx \sqrt{\mu a}$

C_D : coeficiente de "trainee" atmosférico

K: coeficiente de proporcionalidade

S: superfície do satélite perpendicular à velocidade

ρ depende da atividade solar e da atividade geomagnética o que faz com que as variações sejam dificilmente previsíveis.

Para a órbita do SPOT a diminuição do semieixo será entre 0.5 a 1.5m por dia. Esta diminuição provoca a modificação do período nodal e consequentemente a longitude de passagem no nodo.

3.7.2 Movimento do Nodo Ascendente

A ascensão reta do nodo ascendente Ω evolui linearmente com o tempo:

$$\Omega(t) = \Omega(t_0) + \dot{\Omega}(t - t_0) \quad ; \quad \dot{\Omega} = \frac{d\Omega}{dt} \quad e \quad \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3n C_{20} a_e^2}{2(1-e^2)a^2} \cos i$$

O movimento de precessão do nodo ascendente aumenta a sua velocidade com a diminuição da inclinação da órbita. Para $i = 90^\circ$ a precessão é nula. Para uma órbita circular a equação reduz-se a:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{G}{a^3}} C_{20} \left(\frac{a_e}{a} \right)^2 \cos i \quad (35)$$

A rotação do nodo ascendente $d\Omega/dt$ é retrogrado para as órbitas $i < 90^\circ$ e direto para órbitas com inclinação maior que 90° . Atribuindo os valores para da Terra, obtemos:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -9.97 \left(\frac{a_e}{a} \right)^{7/2} \cos i \quad (36)$$

3.7.3 Movimento do Perigeu

O perigeu varia também linearmente com o tempo:

$$\Gamma(t) = \Gamma(t_0) + \dot{\Gamma}(t - t_0) \quad ; \quad \dot{\Gamma} = \frac{d\Gamma}{dt}$$

Para uma órbita circular a equação 32 simplifica-se para:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 4.98 \left(\frac{a_e}{a} \right)^{7/2} (1 - 5 \cos^2 i) \quad (37)$$

3.7.4 Movimento da anomalia média

Vimos que a anomalia média no instante t se escrevia:

$$M(t) = M(t_0) + \dot{M}(t-t_0) \quad ; \quad \dot{M} = \frac{dM}{dt}$$

Para uma órbita circula a equação 34 reduz-se a:

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{3n C_{20} a_e^2}{4a^2} (3 \cos^2 i - 1) \quad (38)$$

3.8 Período da órbita

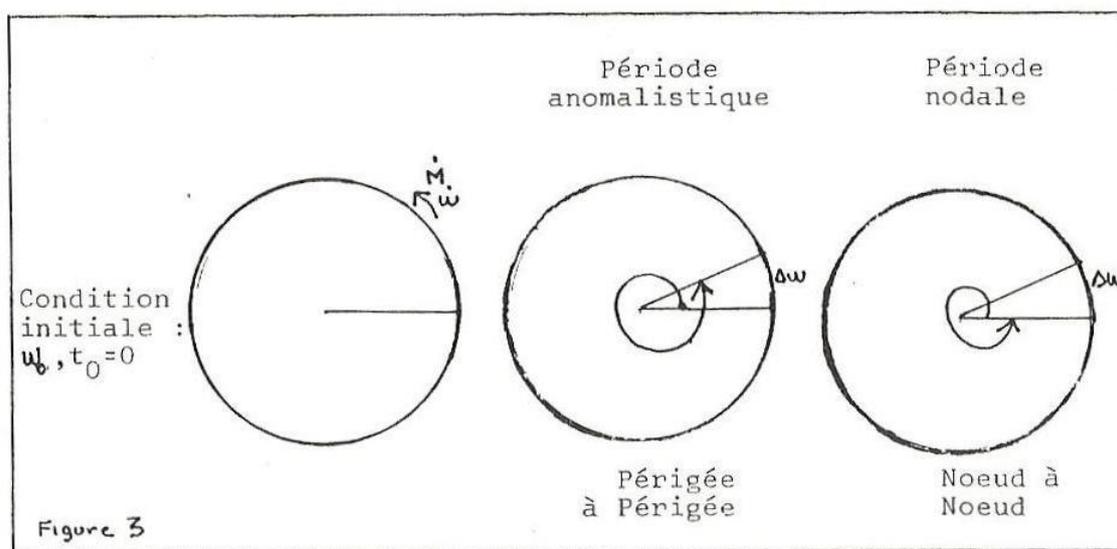
A rotação do perigeu, leva à definição de vários períodos:

Período anomalístico: Tempo entre duas passagens consecutivas no perigeu

$$T_A = \frac{2\pi}{n}$$

Período nodal: Tempo entre duas passagens consecutivas no nodo ascendente

$$T_N = \frac{2\pi}{n + \dot{\Gamma}}$$



3.9 Órbitas usadas para observação da Terra

A órbita dum satélite de observação da Terra deve apresentar características particulares: **regularidade e sincronismo**, de modo que as imagens produzidas em diferentes épocas separadas no tempo sejam comparáveis. Estas características permitem a previsão da passagem do satélite sobre uma zona dada com a possibilidade de definir calendário de passagens simples e universal.

É desejável a obtenção de imagens possuindo as mesmas características seja qual for o lugar observado. Por isso a órbita deverá ser **circular**.

Desejamos obter imagens de todas as regiões da Terra. Por isso a órbita deverá ser **Polar**.

A Terra roda sobre ela mesma no interior da órbita descrevendo o ponto nadiral sob o satélite um traço sobre a Terra em intervalos regulares. É importante que o satélite disponha de um ciclo de funcionamento permitindo a observação regular de um mesmo ponto sobre a Terra. De modo a criar este ciclo de observação, é necessário que ao fim de um certo tempo o satélite tenha cumprido um número inteiro de revoluções sobre a sua órbita, e a Terra, um número inteiro de revoluções sobre ela mesma.

➤ **Nestas condições dizemos que a órbita está em fase com a Terra**

Existem dois tipos de órbitas que parecem particularmente bem adaptadas ao estudo da Terra:

Órbitas Geoestacionárias: Estes satélites têm por missão o estudo permanente de uma larga zona da superfície terrestre. Apropriado para estudos meteorológicos.

Órbitas de fase Helio-síncrona: Missões de observação da Terra.

3.9.1 Órbitas Geoestacionárias

Um satélite é dito de geoestacionário se se mantém na vertical de um ponto fixo. Para que isso aconteça devem ser verificadas três condições:

1. **O satélite deverá ser síncrono: o período de revolução deverá ser igual ao período de rotação da Terra**
2. **A sua órbita deverá ser circular ($e=0$)**
3. **A sua órbita deverá ser equatorial ($i=0$)**

Tendo em conta as perturbações produzidas por J_2 , a condição de sincronismo escreve-se para uma órbita circular equatorial:

$$\dot{\Gamma} + \dot{\Omega} + \dot{M} = \omega_T \quad (39)$$

em que ω_T é a velocidade angular de rotação da Terra ($\omega_T = 360.9856$ graus por dia).

Resolvendo esta equação em ordem ao semieixo maior verificamos que o valor é:

$$a = 42166.260 \text{ km.}$$

Valor do semieixo maior para uma orbita geoestacionária.

3.9.1 Órbitas Hélio-síncrona

Uma das condições que deverá ser imposta a qualquer sistema de observação da Terra é que seja possível a comparação entre observações dum dado lugar obtidas em datas diferentes. A comparação só poderá ser feita se as condições de iluminação solar forem as mesmas, ou seja à mesma hora local.

Este efeito é obtido escolhendo uma órbita hélio-síncrona, ou seja uma órbita em que a linha dos nodos rode no plano do equador uma volta completa num ano, 2π , como a Terra no seu movimento em torno do Sol.

Se a velocidade de rotação $d\Omega/dt$ for igual à velocidade média do movimento do Sol em torno da Terra, a geometria Sol-plano da órbita será aproximadamente constante e as condições de iluminação para uma dada latitude dependem unicamente da variação da declinação do Sol com as estações. Definimos órbita hélio-síncrona uma órbita que verifique a seguinte relação:

$$\dot{\Omega} = w_s \quad (40)$$

em que w_s é a velocidade de rotação aparente do Sol em torno da Terra ($w_s = 0.98561228^\circ / \text{dia}$). A equação do movimento do nodo ascendente é dada pela equação 36. Forçando a que este movimento seja igual à velocidade aparente do Sol, fica:

$$-9.97 \left(\frac{a_e}{a} \right)^{7/2} \cos i = 0.9856 \Rightarrow \cos i = -0.9856 \left(\frac{a}{a_e} \right)^{7/2} \frac{1}{9.97} \quad (41)$$

Ou seja, temos uma relação entre a inclinação da órbita e o semieixo maior da elipse da órbita. O sinal negativo indica que a condição de hélio-sincronismo obriga a que a inclinação seja superior a 90° . A órbita é dita retrógrada.

Definimos hora local H do nodo ascendente duma órbita hélio-síncrona pela equação:

$$H = 12h + \alpha_s^* - \Omega \quad (42)$$

Em que α_s^* é a ascensão recta do Sol fictício sobre o plano equatorial com uma velocidade uniforme w_s tendo numa dada data arbitrária, tomada como origem, a mesma ascensão recta que o Sol verdadeiro.

$$\alpha_s^* = \alpha_s(t_0) + 0.98561228 * (t - t_0) \quad (43)$$

A condição de hélio-sincronismo diz-nos que H é constante.

$$H = 12h + \alpha_s(t_0) + 0.98561228 * (t - t_0) - (\Omega(t_0) + \dot{\Omega}(t - t_0)) \quad (44)$$

3.9.3 Órbitas em fase com a Terra

As numerosas missões de observação da Terra impõem uma cobertura repetitiva de toda ou parte da Terra com uma periodicidade considerada aceitável. A noção de cobertura comporta dois aspetos:

1. Constrangimento de cobertura

A cobertura numa dada latitude deve ser realizada tendo em conta uma recobertura de longitude fixa das medidas efetuadas a partir de duas órbitas em que o traço sobre a superfície sejam vizinhos. Este constrangimento está ligado à largura do campo de visão: IGOV

2. Constrangimento de repetibilidade

As séries de observações de dois ciclos de cobertura devem ser sobrepostas. Isto impõe que periodicamente o satélite passe de novo exatamente sobre o mesmo ponto. O intervalo de tempo entre duas passagens sobre o mesmo ponto é igual à duração do ciclo de cobertura.

Se o constrangimento de repetibilidade é satisfeito, então:

1) Existe um inteiro M tal que:

$$P = N + M/Q$$

P : é o número de períodos nodais por dia

Q : é a duração do ciclo de cobertura

N : parte inteira de P

2) Representando por L_j^i a longitude do i-ésimo nodo ascendente do dia j, e tomando convenientemente a origem das longitudes $L_0^1 = 0$ temos que:

$$L_j^1 = \left(\frac{2\pi}{PQ} \right) (Q - r_j) \quad \text{com} \quad r_j = j \cdot (M \text{ módulo } Q) \quad \text{e} \quad r_j < Q$$

A sequência de longitudes dos primeiros nodos de cada dia é equivalente à sequência dos resíduos de módulo Q dos Q primeiros múltiplos de M.

3) Por fim temos que: $C = \left(\frac{2\pi}{PQ} \right)$

Em que C é a distância entre dois nodos contíguos no equador.

A condição de cobertura no equador é escrita:

$$\left(\frac{2\pi}{PQ} \right) \leq (1-r)C_p$$

Em que C_p é o campo de visão medido no solo e r é a recobertura imposta. Assim, como Q é fixo obtemos o limite inferior ao valor de P: ou seja o limite superior ao semieixo maior da órbita.

Exercícios:

1. Determine os parâmetros orbitais de uma missão de observação da Terra sabendo que a cobertura dos sensores no solo é de 117 km

Constantes a utilizar:

$$G\mu = 3986005 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

$$R_t = 6378155 \text{ m}$$

$$J_2 = 1082.7 \text{ e}^{-6}$$