Mecânica Analítica

Série 5: Teoria de Hamilton-Jacobi

1. [1] Mostre que a função

$$S = \frac{m\omega}{2}\left(q^2 + \alpha^2\right)\cot\omega t - m\omega q\alpha\csc\omega t \quad , \tag{1}$$

é uma solução da equação de Hamilton-Jacobi para a função principal de Hamilton para o oscilador harmónico linear com

$$H = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right) \quad . \tag{2}$$

Mostre que esta equação gera a solução correta para o movimento do oscilador harmónico.

2. [2] Considere o movimento unidimensional de uma partícula de massa m sujeita a uma força uniforme αt que aumenta lineramente no tempo.

   (a) Determine o Hamiltoniano do sistema.

   (b) Qual a correspondente equação de Hamilton-Jacobi?

   (c) Mostre que a função principal de Hamilton S pode-se escrever na forma:

$$S = \frac{1}{2}\alpha t^2 x + \beta x - \phi(t) \tag{3}$$

   onde β é uma constante e ϕ uma função apenas do tempo.

   (d) Resolva a correspondente equação para ϕ. Consequentemente, determine a posição e o momento como funções do tempo.

3. [2] Considere uma pérola de massa m que se pode movimentar num aro de raio R. O aro está animado de um movimento de rotação uniforme (velocidade ângular ω) em torno de um eixo vertical. A aceleração da gravidade é uniforme g e vertical; designe por θ o ângulo que a posição da partícula faz em relação ao eixo vertical.

   (a) Obtenha o momento generalizado e o Hamiltoniano expresso em termos de p_θ e θ.

   (b) Use o método de Hamilton-Jacobi para construir um integral explícito para a lei horária $\theta(t)$.

4. [2] Considere um sistema físico descrito pelas seguintes energias cinética (T) e potencial (V):

$$T = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \tag{4}$$

$$V = \frac{1}{x^2 + y^2} \quad . \tag{5}$$

   (a) Qual a equação de Hamilton-Jacobi para este sistema?

   (b) Separando variáveis, encontre a função principal de Hamilton e, consequentemente, deduza o movimento dinâmico do sistema (não é necessário calcular explicitamente integrais simples).

5. [1] Resolva o problema do movimento de um projétil, usando o método de Hamilton-Jacobi. Escreva as equações do movimento e a dependência das coordenadas no tempo, assumindo que o projétil é lançado no instante $t = 0$ da origem do referencial, com velocidade de módulo v_0, fazendo um ângulo α com a horizontal.

6. Considere uma partícula de massa m num potencial central.

   (a) Escreva o Hamiltoniano do problema em coordenadas esféricas.

   (b) Mostre que, se a função característica de Hamilton é completamente separável, então a equação de Hamilton-Jacobi pode ser reduzida a

   $$\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{r^2} = 2m\left[E - V(r)\right] \quad , \tag{6}$$

   onde E é a energia do sistema, $W = W_r(r) + W_\theta(\theta) + W_\phi(\phi)$ a função característica de Hamilton e α_ϕ uma constante. Determine α_ϕ em função dos momentos p_ϕ e p_θ.

7. [1] Uma partícula de massa m move-se numa dimensão sujeita a um potencial $V(x) = k|x|$, onde k é constante. Usando as variáveis ação-ângulo, determine o período do movimento em função da energia.

8. Uma partícula de massa m move-se em uma dimensão, sujeita a um potencial,

   $$V = \alpha x^2 \quad . \tag{7}$$

   (a) Obtenha uma expressão integral para a função característica de Hamilton.

   (b) Em que condições podem as variáveis de ação-ângulo serem consideradas?

   (c) Assumindo que as variáveis de ação-ângulo podem ser consideradas, determine a frequência do movimento.

   (d) Verifique o resultado comparando com a solução das equações do movimento.

Referências

[1] Goldstein, H., Pool, C., and Safko, J. *Classical Mechanics.* Addison-Wesley Publishing Company, Boston, MA, USA, 2002.

[2] Lage, E. J. S. *Mecânica Avançada.* Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2015.