1. Camada limite atmosférica

Equações da dinâmica

Num referencial em rotação, a atmosfera satisfaz as ***equações de Navier-Stokes*** para um ***fluido newtoniano***:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + fv + \nu\nabla^2 u \tag{1-1}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} - fu + \nu\nabla^2 v \tag{1-2}$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - g + \nu\nabla^2 w \tag{1-3}$$

onde $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ é o operador laplaciano, f é o parâmetro de Coriolis, ν é a viscosidade cinemática do ar. As equações anteriores incluem 5 variáveis (u, v, w, ρ, P), pelo que não constituem um sistema fechado. A estas equações pode acrescentar-se a equação termodinâmica

$$\frac{ds}{dt} = c_p \frac{d\ln\theta}{dt} = \frac{\dot{Q}}{\rho T} \tag{1-4}$$

onde $\dot{Q}$ é a taxa de aquecimento por unidade de volume, a equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla.\rho\vec{v} = -\frac{\partial \rho u}{\partial x} - \frac{\partial \rho v}{\partial y} - \frac{\partial \rho w}{\partial z} \tag{1-5}$$

a equação de estado

$$p = R_d \rho\, T \tag{1-6}$$

e a definição de temperatura potencial

$$\theta = T\left(\frac{p}{p_{00}}\right)^{R_d/c_p} \tag{1-7}$$

O sistema total de 7 equações inclui exatamente 7 incógnitas $(u, v, w, P, \rho, T, \theta)$, constituindo portanto um sistema fechado passível de solução, se forem conhecidos os forçamentos $(\dot{Q})$, os parâmetros (f, g, ν) e as condições fronteira.

Equações de Reynolds e turbulência

As equações da dinâmica de fluidos (equações de Navier-Stokes no caso geral) representam o fluido como um "meio contínuo", i.e., referem-se às diferentes variáveis como funções contínuas do espaço e do tempo. No mundo real não é possível "ver" os fluidos com o detalhe infinito inerente a essa distribuição contínua. Qualquer sistema de observação realiza necessariamente operações de média (no espaço e no tempo) e limita-se a observar os valores médios resultantes.

Se as variáveis características do fluido (temperatura, velocidade, densidade, etc.) variarem "lentamente" de ponto para ponto, a observação de valores médios numa rede de pontos será suficiente para reconstruir a campo contínuo sem perda de informação. Se não for esse o caso, haverá perda. Em qualquer caso, podemos obter uma equação para a evolução das propriedades médias do fluido, a partir das equações de Navier-Stokes. Para o efeito, vamos definir a operação de média $(\overline{})$ com as seguintes propriedades:

$$\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b} \tag{1-8}$$

$$\overline{\alpha a} = \alpha \bar{a} \tag{1-9}$$

$$\overline{a'} = 0 \tag{1-10}$$

Em que:

$$a = \bar{a} + a' \tag{1-11}$$

a e b são funções contínuas, α é uma constante. A expressão (1-11) define a variável contínua num ponto genérico como a soma do seu valor médio com uma perturbação. As propriedades (1-8) e (1-9) definem a média como um operador linear.

Considere-se então uma das equações de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + fv + \nu\nabla^2 u \tag{1-12}$$

Aplicando o operador de média, obtém-se:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\overline{u\frac{\partial u}{\partial x}} - \overline{v\frac{\partial u}{\partial y}} - \overline{w\frac{\partial u}{\partial z}} - \overline{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}} + f\bar{v} + \nu\nabla^2\bar{u} \tag{1-13}$$

No primeiro membro e no último termo do segundo utilizou-se a condição de linearidade para permutar o operador de média com a derivação parcial (também uma operação linear). No quinto e último termos do segundo membro considerou-se $f, \nu = const$. Os termos restantes oferecem mais dificuldade, dado que não são lineares. Vamos considerar o primeiro termo advectivo:

$$\begin{aligned} -\overline{u\frac{\partial u}{\partial x}} &= -\overline{(\bar{u}+u')\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial x}} = -\overline{(\bar{u})\frac{\partial(\bar{u})}{\partial x}} - \overline{(u')\frac{\partial(\bar{u})}{\partial x}} - \overline{(\bar{u})\frac{\partial(u')}{\partial x}} - \overline{(u')\frac{\partial(u')}{\partial x}} \\ &= -\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}} \end{aligned} \tag{1-14}$$

Se repetirmos o procedimento anterior para os outros termos não lineares, obtemos a ***equação de Reynolds***:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}} - \overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}} - \overline{w'\frac{\partial u'}{\partial z}} - \left(\overline{\frac{1}{\rho}}\right)\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \overline{\left(\frac{1}{\rho}\right)'\frac{\partial p'}{\partial x}} + f\bar{v} \\ + \nu\nabla^2\bar{u} \end{aligned} \tag{1-15}$$

Donde se conclui que a evolução dos campos médios ($\overline{\ }$) depende dos campos perturbados, por intermédio de médias dos produtos de perturbações, i.e. de ***covariâncias***. As pequenas escalas (turbulência) atuam sobre as escalas maiores, e vice-versa. A presença de turbulência tem efeito qualitativo sobre as equações da dinâmica, visto implicar a introdução de variáveis adicionais, transformando o sistema de Navier-Stokes (1-1)-(1-7) num sistema aberto, com um número de incógnitas superior ao número de equações. O "problema do fecho" das equações de Reynolds consiste na obtenção de novas equações, independentes das anteriores, que compensar as variáveis (turbulentas) extra. Não existe uma solução geral satisfatória para o problema do fecho.

Uma um pouco mais simples das equações obtém-se no caso de um fluido incompressível, i.e. que satisfaz a equação da continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1-16}$$

como será o caso se $\rho = const$. Nesse caso pode escrever-se:

$$-\overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}} - \overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}} - \overline{w'\frac{\partial u'}{\partial z}} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'u'}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{v'u'}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{w'u'}\right) \tag{1-17}$$

o que mostra que a turbulência está associada a fluxos perturbados de momento linear, $\overline{\vec{v}'u'}$, sendo o seu impacto sobre o escoamento médio dado pela convergência desses fluxos. Perto da superfície o termo de fluxo vertical ($\overline{w'u'}$) é, em geral, dominante.

Os fluxos turbulentos de momento linear (ou de outras propriedades) resultam da existência de movimentos perturbados de natureza estocástica, i.e. irregulares e dimensão variável inferior à escala do operador de média. Perto da superfície o escoamento médio apresenta sempre uma grande variação da velocidade com a vertical, resultante da necessidade de satisfazer a condição de vento nulo na superfície imposta pela viscosidade. Assim, pequenos turbilhões que transportem fluido na direção vertical vão trazer para cada nível partículas de fluido com velocidade muito diferente da média nesse nível. Este processo pode ser descrito qualitativamente se se admitir que os fluxos turbulentos são proporcionais e opostos ao gradiente do vento médio:

$$\left(\overline{w'u'}\right) = -K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \tag{1-18}$$

Introduzindo o ***fecho*** (de primeira ordem) anterior, obtém-se a equação de Navier-Stokes modificada:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f\bar{v} - \frac{\partial}{\partial z}\left(-K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right) + \nu \nabla^2 \bar{u} \tag{1-19}$$

e ainda, na direcção y,

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \bar{w}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f\bar{u} - \frac{\partial}{\partial z}\left(-K_m \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right) + \nu \nabla^2 \bar{v} \tag{1-20}$$

Nesta aproximação, a turbulência afeta o escoamento médio de forma em tudo semelhante à viscosidade, tomando o parâmetro K (difusividade turbulenta) o papel da viscosidade cinemática (ν). No caso do ar, K é várias ordens de grandeza maior que a viscosidade cinemática, excepto na região imediatamente vizinha da superfície (e.g. o primeiro mm). Note-se que K ***não*** é uma constante.

Espiral de Ekman

As equações de Reynolds, mesmo na aproximação do fecho de primeira ordem e sendo difusividade turbulenta especificada, não têm solução analítica. É, no entanto, possível obter uma solução analítica para o caso, muito especial, em que se admite existir estacionaridade (solução independente do tempo), homogeneidade horizontal (solução independente da posição horizontal, mas a homogeneidade horizontal não se estende ao campo da pressão médio) e difusividade turbulenta constante e muito maior que a viscosidade cinemática. Nesse caso, as equações do movimento horizontal escrevem-se:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f\bar{v} - \frac{\partial}{\partial z}\left(-K_m\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right) = 0 \qquad (1\text{-}21)$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f\bar{u} - \frac{\partial}{\partial z}\left(-K_m\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right) = 0 \qquad (1\text{-}22)$$

ou, introduzindo a definição do vento geostrófico e notando que K_m é constante e que z é a única variável independente:

$$f\left(\bar{v} - v_g\right) + K_m\frac{d^2\bar{u}}{dz^2} = 0 \qquad (1\text{-}23)$$

$$-f\left(\bar{u} - u_g\right) + K_m\frac{d^2\bar{v}}{dz^2} = 0 \qquad (1\text{-}24)$$

Definindo:

$$\begin{cases} c = \bar{u} + i\bar{v} \\ c_g = u_g + iv_g \end{cases} \qquad (1\text{-}25)$$

onde $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária, multiplicando (1-23) por i e subtraindo (1-24) obtém-se uma única equação para o vento (complexo) na camada limite (estacionária, homogénea de difusividade turbulenta constante):

$$iK_m\frac{d^2c}{dz^2} + f\left(c - c_g\right) = 0 \qquad (1\text{-}26)$$

A equação (1-26) é uma equação diferencial ordinária com coeficientes constantes, facilmente resolúvel no caso em que o vento geostrófico (c_g) é constante (i.e. independente de z). Sendo o vento geostrófico constante é conveniente definir um sistema de coordenadas com o eixo x alinhado com o vento geostrófico, i.e. paralelo às isóbaras. Nesse caso será $c_g = u_g$ e pode escrever-se

$$K_m\frac{d^2\left(c - c_g\right)}{dz^2} - if\left(c - c_g\right) = 0 \qquad (1\text{-}27)$$

A equação (1-27) é uma equação homogénea. A sua equação característica é:

$$K_m\lambda^2 - if = 0 \qquad (1\text{-}28)$$

com soluções:

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{if}{K_m}} = \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{f}{K_m}} = \pm(1+i)\sqrt{\frac{f}{2K_m}} = \pm(1+i)\gamma \quad (1\text{-}29)$$

Assim a solução geral será:

$$\left(c - c_g\right) = Ae^{\gamma z}e^{i\gamma z} + Be^{-\gamma z}e^{-i\gamma z} \quad (1\text{-}30)$$

onde A e B são constantes de integração. Impondo as condições fronteira:

$$\begin{cases} \lim\limits_{z\to\infty} u = u_g \\ \lim\limits_{z\to\infty} v = 0 \\ u(z=0) = v(z=0) = 0 \end{cases} \quad (1\text{-}31)$$

vem

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = -u_g \end{cases} \quad (1\text{-}32)$$

$$\left(u + iv - u_g\right) = -u_g e^{-\gamma z}(\cos\gamma z - i\sin\gamma z) \quad (1\text{-}33)$$

Logo, a solução de (1-26) vem:

$$\begin{cases} u = u_g(1 - e^{-\gamma z}\cos\gamma z) \\ v = u_g e^{-\gamma z}\sin\gamma z \end{cases} \quad (1\text{-}34)$$

constituindo a ***espiral de Ekman***. Em (1-34) $\gamma = \sqrt{\frac{f}{2K_m}}$ define a escala vertical da camada limite planetária.

Exercício 1-1. Calcule o ângulo entre o vento e as isóbaras junto da superfície, na espiral de Ekman.

O ângulo será definido por:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)$$

Em $z = 0$, tem-se $u = v = 0$ o que implicaria um ângulo indeterminado. No entanto é possível fazer o cálculo, levantando a indeterminação (utilizando a regra de l'Hôpital):

$$\tan\alpha = \lim_{z\to 0}\left(\frac{u_g(1-e^{-\gamma z}\cos(\gamma z))}{u_g e^{-\gamma z}\sin(\gamma z)}\right) = 1$$

ou seja, junto da superfície o ângulo vale 45°.

Exercício 1-2. Numa espiral de Ekman aos 40N o vento torna-se paralelo às isóbaras aos 1000 m. Calcule o valor do coeficiente de difusividade turbulenta K_m. Compare com o valor da viscosidade cinemática do ar.

O vento será paralelo às isóbaras quando $v = 0$ e $z > 0$. O primeiro valor de $z = h$ em que se verifica essa condição será dado por:

$$z = h = \frac{\pi}{\gamma}$$

Logo

$$h = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{f}{2K_m}}} \Longrightarrow K_m = \frac{fh^2}{2\pi^2} \approx 4.75\ m^2 s^{-1} \gg \nu$$

Camada limite de superfície

A aproximação $K = const$ utilizada na solução de Ekman não pode ser válida perto da superfície, visto que a dimensão dos turbilhões é limitada nas proximidades da superfície, implicando que $\lim_{z\to 0} K = 0$.

Se nos colocarmos perto da superfície, mas ainda fora da camada viscosa,

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(-K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right) = 0 \tag{1-35}$$

ou

$$\left(K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right) = const \tag{1-36}$$

Se admitirmos que K_m é proporcional a z junto da superfície, o que satisfaz a condição $\lim_{z\to 0} K = 0$, fica:

$$kz\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = u_* \tag{1-37}$$

onde $k \approx 0.4$ é a constante de von Karman, e u_* é a ***velocidade de atrito***. Note-se que a equação (1-37) não pode ser válida na vizinhança da superfície, visto que nessa região a viscosidade se torna relevante. Integrando (1-37) obtém-se:

$$\bar{u} = \frac{u_*}{k} ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \tag{1-38}$$

onde z_0 representa o nível inferior de validade desta teoria, no qual a velocidade média se anula, e é designado por ***comprimento de rugosidade***. Em primeira aproximação o comprimento de rugosidade é uma fracção da altura dos elementos de rugosidade, existindo tabelas empíricas que permitem estabelecer o seu valor para superfícies homogéneas típicas.

Exercício 1-3. Numa superfície homogénea coberta de relva com $z_0 = 3\ mm$, mediu-se um vento aos 10m de 10 ms^{-1}. Estime o vento aos 80 m.

Utiliza-se (1-38) aos dois níveis referidos (10 e 80):

$$u_{10} = \frac{u_*}{k} \ln\left(\frac{10}{z_0}\right)$$

$$u_{80} = \frac{u_*}{k} \ln\left(\frac{80}{z0}\right)$$

Da primeira equação retira-se:

$$u_* = \frac{k u_{10}}{\ln\left(\frac{10}{z_0}\right)} \approx 0.49\ ms^{-1}$$

Logo: $$u_{80} = \frac{u_*}{k} \ln\left(\frac{80}{z0}\right) \approx 12.5\ ms^{-1}$$

Exercício 1-4. Numa superfície homogénea mediu-se um vento a dois níveis obtendo-se $u(z = 10m) = 10ms^{-1}$, $u(z = 30m) = 12ms^{-1}$. Calcule o vento aos 80m.

Tem-se:

$$u_{10} = \frac{u_*}{k} \ln\left(\frac{10}{z_0}\right)$$

$$u_{30} = \frac{u_*}{k} \ln\left(\frac{30}{z_0}\right)$$

Subtraindo:

$$u_{30} - u_{10} = \frac{u_*}{k}\left[\ln\left(\frac{30}{z_0}\right) - \ln\left(\frac{10}{z_0}\right)\right] = \frac{u_*}{k} \ln 3 \Longrightarrow u_* = k\,\frac{u_{30} - u_{10}}{\ln 3} \approx 0.73\ ms^{-1}$$

Substituindo:

$$z_0 = 10\, e^{-k u_{10}/u_*} \approx 0.04\ m$$

E finalmente:

$$u_{80} = \frac{u_*}{k} \ln\left(\frac{80}{z_0}\right) \approx 13.8\ ms^{-1}$$