Ciências ULisboa

Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

CARTOGRAFIA

Sebenta de apoio às aulas teóricas da disciplina de Cartografia

2019/2020

Licenciatura em Engenharia Geoespacial

Departamento de Engenharia Geográfica, Geofísica e Energia

Índice

Chapter 1 INTRODUÇÃO 1-1

1.1. O problema básico da representação cartográfica 1-1

1.2. Objetivos e métodos de representação 1-2

1.3 Classificação das projeções cartográficas 1-3

1.3.1. O problema extrínseco 1-4

1.3.2. O problema intrínseco 1-6

1.3.3. O esquema de classificação 1-6

Chapter 2 DEFINIÇÕES, NOTAÇÃO E DIMENSÕES 2-1

2.1. Definições e notação 2-1

2.1.1. Representação matemática da forma da terra 2-1

2.1.2. Definições e notação no elipsóide e na esfera 2-2

2.2. Linhas com propriedades especiais 2-4

2.2.1. A geodésica, o círculo máximo e a ortodrómica 2-5

2.2.2. A loxodrómica 2-6

Chapter 3 FÓRMULA GERAL DA TRANSFORMAÇÃO. A TEORIA DAS DISTORÇÕES 3-1

3.1. Fórmula geral da transformação. Condições de unicidade, reversabilidade e correspondência entre curvas paramétricas 3-1

3.2. Geometria diferencial elementar. A matriz de transformação 3-2

3.2.1. Elemento linear e expressões angulares 3-2

3.2.2. A matriz de transformação fundamental. O determinante do jacobiano 3-5

3.3. Outros conceitos 3-7

3.3.1. A deformação linear. Condições de conformidade e de equivalência 3-7

3.3.2. Coeficientes superficiais de Gauss no elipsóide, na esfera e no plano. Coordenadas isométricas 3-8

3.4. A teoria das distorções das distâncias, ângulos e áreas 3-12

3.4.1. Pares ortogonais correspondentes 3-12

3.4.2. A deformação linear 3-13

3.4.3. A deformação linear sobre curvas paramétricas 3-13

3.4.4. A deformação angular 3-14

3.4.5. A deformação linear correspondente à deformação angular máxima 3-16

3.4.6. A deformação areal 3-17

3.5. A indicatriz de Tissot 3-17

3.5.1. A teoria da indicatriz 3-17
3.5.2. A indicatriz na prática 3-19
Chapter 4 PROJEÇÕES EQUIVALENTES 4-1
4.1. Considerações gerais 4-1
4.1.1. Introdução 4-1
4.1.2. A deformação linear 4-1
4.2. Projeções equivalentes do elipsóide sobre o plano 4-4
4.3. A projeção pseudo-cónica equivalente de Bonne 4-5
4.3.1. Introdução 4-5
4.3.2. A projeção de Bonne. 4-6
4.3.2. Interpretação geométrica da projeção de Bonne 4-13
Chapter 5 PROJEÇÕES CONFORMES OU ISOGÓNICAS 5-1
5.1. Considerações gerais 5-1
5.1.1. Introdução 5-1
5.1.2. Sistemas de coordenadas isométricas. A deformação linear 5-2
5.2. Projeção de Gauss 5-6
5.2.1. Introdução 5-6
5.2.2. Fórmulas de transformação direta 5-7
5.2.3. Fórmulas de transformação inversa 5-9
5.2.4. A deformação linear 5-11
5.2.5. Correção tangente à corda 5-12
5.2.6. Correção de redução dos comprimentos finitos 5-14
5.2.7. Convergência de meridianos 5-16
5.3. Projeção de Mercator 5-17
5.3.1. Introdução 5-17
5.3.2. Fórmulas de transformação direta 5-18
5.3.3. Fórmulas de transformação inversa 5-22
5.3.4. Correção tangente à corda 5-22
5.3.5. Correção de redução dos comprimentos finitos 5-24
5.3.6. Comprimento de um arco de loxodrómica 5-26
5.4. Projeção de Lambert (cónica conforme) 5-26
5.4.1. Introdução 5-26
5.4.2. Fórmulas de transformação direta 5-27

5.4.3. Fórmulas de transformação inversa 5-33
5.4.4. Correção tangente à corda 5-34
5.3.5. Correção de redução dos comprimentos finitos 5-36

CHAPTER 1 INTRODUÇÃO

1.1. O problema básico da representação cartográfica

O problema básico da representação cartográfica consiste na representação de uma superfície curva numa superfície plana. A figura da terra é usualmente representada por um sólido de revolução, o elipsóide ou a esfera, o qual é considerado como a superfície de referência em relação à qual todos os pontos são relacionados. Estes pontos podem estão situados na superfície terrestre, na superfície dos oceanos e lagos ou abaixo dessas superfícies de água. Esta superfície de referência é a representação do nível médio do mar e a sua continuação sob as zonas mais elevadas ou sobre as zonas mais profundas da superfície terrestre. Tal afirmação não é necessariamente verdade dado que a figura da terra é, na realidade, representada por uma superfície equipotencial do campo gravítico terreste, denominada por geóide, e como tal essa superfície é irregular, ou ondulatória, sendo impossível a sua representação por uma fórmula matemática rigorosa. Assume-se então que as superfícies de referência utilizadas para a superfície terrestre são o elipsóide e a esfera e, desta forma, o problema das projeções cartográficas resume-se à representação de uma superfície elipsoidal ou esférica numa superfície plana (Figura 1.1).

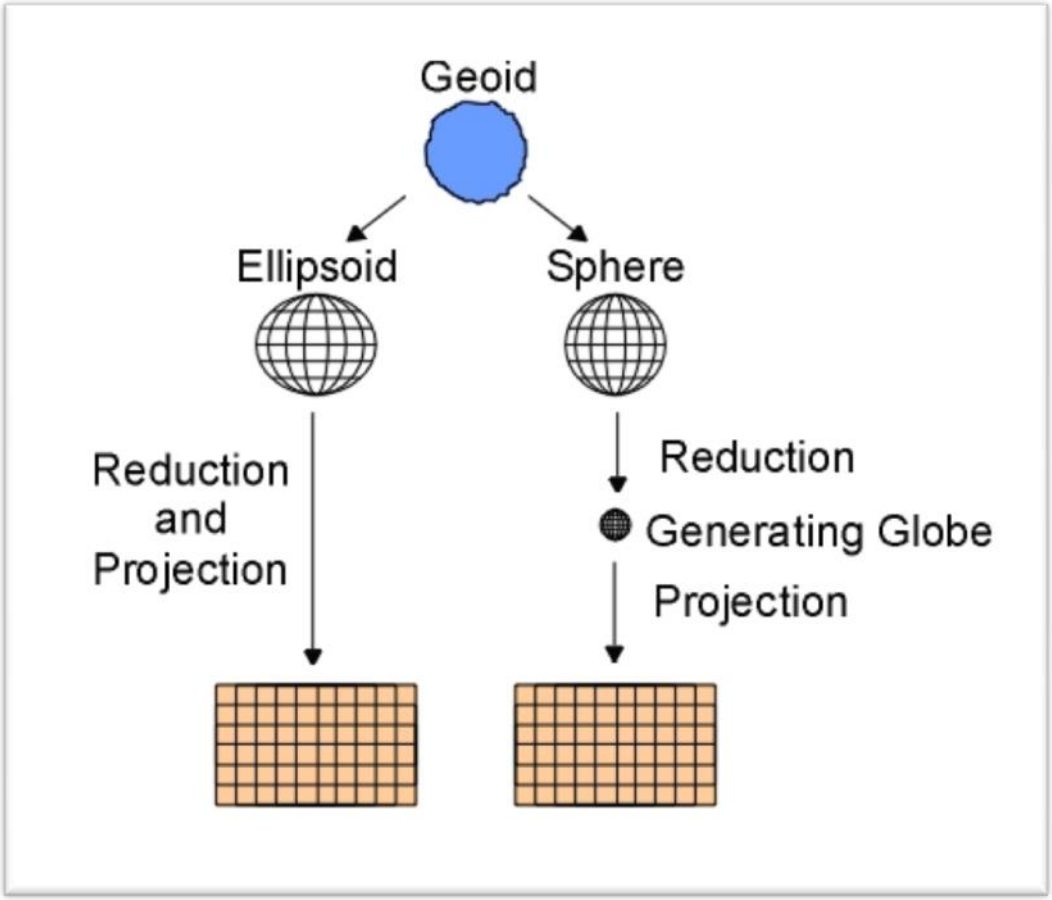


Figura 1.1 - Esquema de representação da superfície terrestre numa superfície plana.

A representação de uma superfície curva numa superfície plana apresenta as vantagens de ser muito mais fácil de produzir e de manusear um mapa plano do que um globo ou uma porção, reduzidos a uma determinada escala, da superfície terrestre e ainda de os cálculos matemáticos serem muito mais simples num plano do que num elipsóide ou esfera. No entanto, esta representação envolve distorções, sendo aplicadas diferentes técnicas de representação que possuam determinadas propriedades favoráveis a um propósito específico e considerando, ainda, a dimensão da área a ser representada. Esta técnica de representação é designada por projeção cartográfica.

1.2. Objetivos e métodos de representação

A representação da superfície terrestre numa superfície plana tem como principal objetivo a representação das posições de pontos discretos na superfície original num sistema de coordenadas planas e, consequentemente, o cálculo de distâncias e de ângulos entre esses pontos discretos.

É precisamente esta transformação da superfície da terra numa superfície plana a operação mais difícil de conseguir. No entanto, pode-se projetar a superfície física da terra, sobre um elipsóide de referência, por meio de projetantes normais ao elipsóide em cada um dos seus pontos (método de projeção de Helmert). Deste modo, cada um dos pontos da superfície terrestre fica definido por 3 coordenadas, a latitude φ (ângulo entre a normal do lugar e o plano do equador) e a longitude λ (ângulo entre o meridiano do lugar e o meridiano de referência, medido no plano do equador) das respetivas projeções sobre o elipsóide, e, pela altitude elipsoidal *h*.

Existem três critérios cartográficos que são aplicados para a avaliação das propriedades das projeções cartográficas:

a) Equidistância – representação correta das distâncias;

b) Conformidade – representação correta das formas;

c) Equivalência – representação correta das áreas.

Estes três critérios são básicos e mutuamente exclusivos, sendo do ponto de vista cartográfico, irrelevantes quaisquer outras caraterísticas de uma dada projeção. Dado isto, de notar que não existe uma representação ideal, apenas a melhor representação para um determinado propósito.

Os métodos de projeção ou representação podem ser classificados como:

a) Projeção direta do elipsóide na superfície de projeção;

b) Dupla projeção envolvendo a transformação do elipsóide numa superfície esférica e posterior representação da superfície esférica na superfície de projeção.

Existem, então, dois tipos de superfícies *datum* – o elipsóide e a esfera – e três tipos de superfícies de projeção – o plano, o cone e o cilindro – sendo as duas últimas superfícies planificáveis (Figura 1.2).

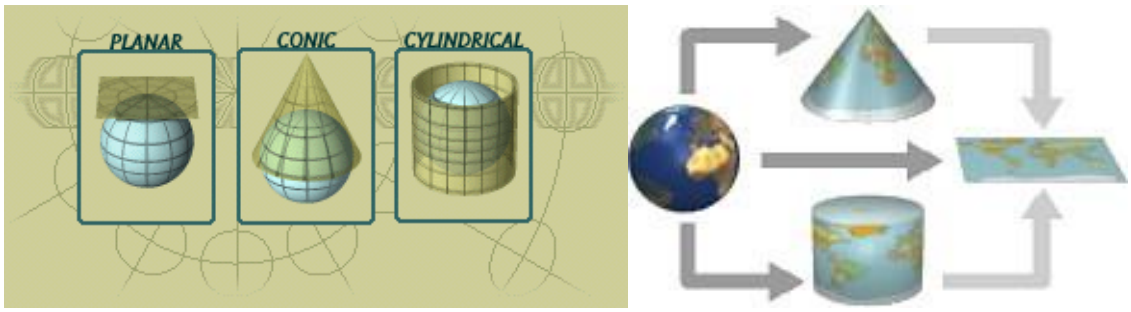


Figura 1.2. Classificação das projeções cartográficas segundo o critério da superfície de projeção.

A transformação da superfície datum na superfície projeção pode ser de natureza geométrica, semi-geométrica ou matemática (convencional). Muito poucas projeções são projeções verdadeiramente perspetivas em sentido geométrico.

É conveniente definir uma projeção cartográfica com um arranjo sistemático de linhas que se intersetam no plano, que representam e têm uma correspondência de um para um com os meridianos e paralelos da superfície datum. Este arranjo obedece a algum princípio consistente de modo a verificar determinadas condições pré-definidas. Cada conjunto de novas condições resulta numa projeção cartográfica diferente e, consequentemente, existe um número ilimitado de projeções cartográficas. Contudo, na prática, os três critérios cartográficos mencionados anteriormente – equidistância, conformidade e equivalência - são aplicados com um número limitado de outras condições resultando num número de cerca de duzentas projeções distintas criadas para fins específicos (Maling, 1968).

1.3 Classificação das projeções cartográficas

A classificação de projeções cartográficas deverá seguir um “standard” de modo que qualquer projeção (não convencional) possa ser descrita por um conjunto de critérios e inversamente um conjunto de critérios definirá uma qualquer projeção. Assim, um esquema de classificação deverá seguir um número de critérios subdivididos em classes e variedades conforme sugerido por Goussinsky (1951).

As classes podem ser consideradas de diferentes pontos de vista, sendo estes não mutuamente exclusivos. As variedades são as subdivisões de cada classe e são mutuamente exclusivas. Para facilitar o processo de construção de um esquema de classificação das projeções cartográficas composto por classes e variedades deverão ser consideradas determinados fatores específicos:

a) O objeto projetado ou a superfície datum;

b) A superfície projeção na qual a superfície datum é projetada;

c) A projeção ou a representação “per si”.

A superfície de projeção é considerada como o problema extrínseco e o processo de projeção ou representação como o problema intrínseco.

1.3.1. O problema extrínseco

Este problema considera as propriedades da superfície relativamente à superfície datum dando origem a três classes:

I. Natureza : natureza da superfície projeção definida como a figura geométrica

II. Coincidência : contato da superfície projeção com a superfície datum

III. Posição : alinhamento da superfície projeção em relação com a superfície datum.

Quanto à sua natureza, as projeções podem ainda ser dividida em três variedades, representando, cada uma, as superfícies básicas de projeção, nomeadamente o plano, o cone e o cilindro (Figura 1.3). A mais simples destas superfícies de projeção é o plano, que quando tangente à superfície datum tem um único ponto de contato que corresponde ao centro da área de distorção mínima. O cone e o cilindro, que são ambos planificáveis, foram introduzidos com o objetivo de aumentar a zona de contato e consequentemente a área de mínima distorção.

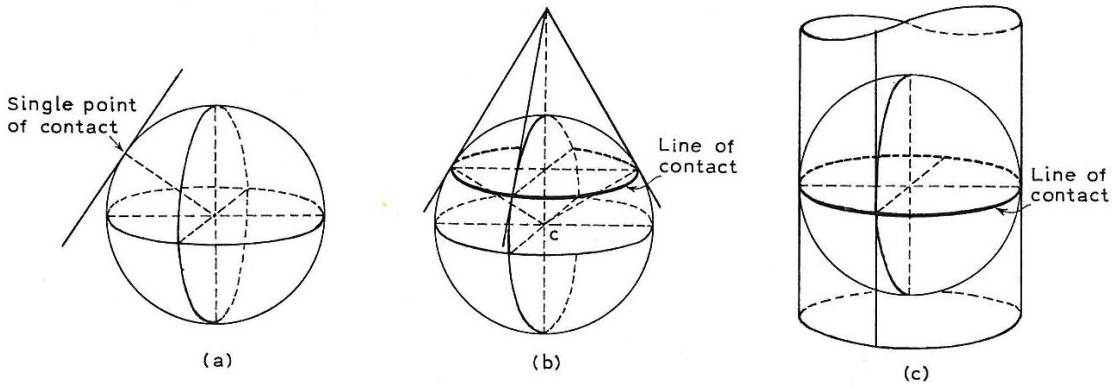


Figura 1.3. Classificação das projeções cartográficas quanto à natureza: a) plana, b) cónica e c) cilíndrica.

A classe coincidência pode ser dividida em três variedades representando os três tipos de coincidência entre a superfície datum e a superfície projeção, nomeadamente tangente, secante e polisuperficial (Figura 1.4). Verifica-se facilmente que a tangência entre a superfície datum e a superfície projeção resulta num ponto ou numa linha de contato, o primeiro no caso da superfície projeção ser um plano e a segunda no caso da superfície ser um cilindro ou um cone. Para aumentar a área de contato entre as duas superfícies, e consequentemente a área de distorção mínima, é introduzido o modo secante, resultando numa linha de contato no caso em que a superfície é o plano e em duas linhas de contato no caso do cilindro ou do cone. Para uma ainda maior área de contato é introduzido o múltiplo contato designado por polisuperficial. Neste caso uma série de planos sucessivos produzirá uma projeção poliédrica, uma sequência de cones produzirá uma projeção policónica e uma série de cilindros produzirá uma projeção policilíndrica.

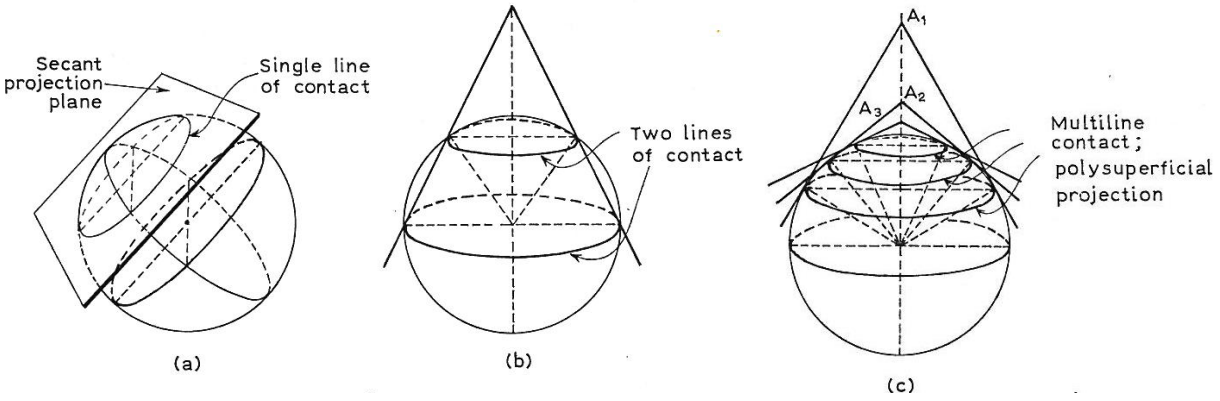


Figura 1.4. Classificação das projeções cartográficas quanto à coincidência: a) tangente, b) secante e c) polisuperfícial.

Quanto à posição as projeções são subdivididas em três variedades representando as três posições básicas ou alinhamentos da superfície de projeção relativamente à superfície datum, nomeadamente, normal, transversa e oblíqua (Figura 1.5). Caso o propósito da projeção seja a representação de uma área limitada da superfície datum, é então vantajoso alcançar uma distorção mínima nessa área particular. Tal é possível através da variação da atitude da superfície de projeção. Se o eixo de simetria da superfície de projeção coincide com o eixo de rotação do elipsóide ou da esfera, temos uma projeção normal. Com o eixo de simetria perpendicular ao eixo de rotação, obtêm-se um projeção transversa e para qualquer outra atitude do eixo de simetria, obtêm-se uma projeção oblíqua.

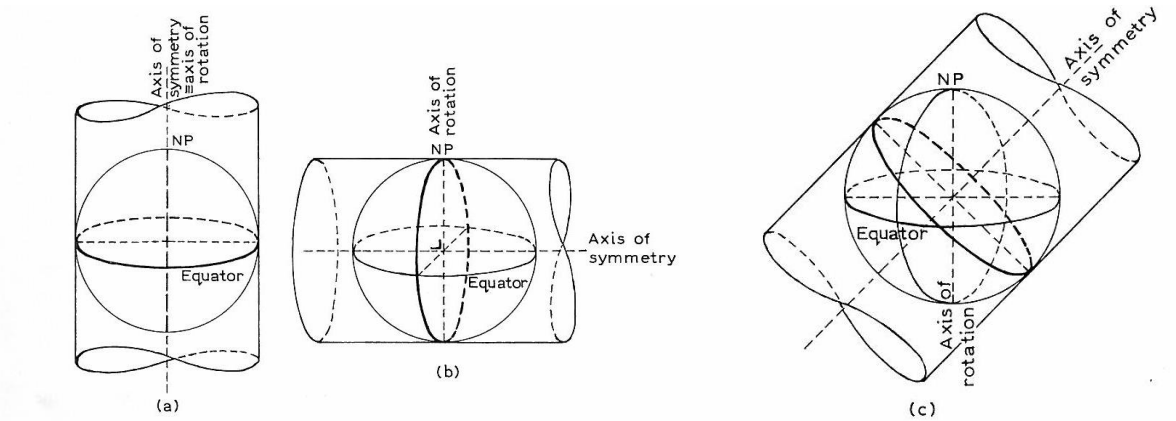


Figura 1.5. Classificação das projeções cartográficas quanto à posição: a) normal, b) transversa e c) oblíqua.

1.3.2. O problema intrínseco

Este problema considera a projeção do ponto de vista das suas propriedades cartográficas e do seu modo de construção, dando origem a duas classes:

IV. Propriedades cartográficas

V. Modo de construção

Quanto às propriedades cartográficas, esta classe divide-se em três variedades mutuamente exclusivas que representam os três critérios cartográficos básicos : equidistância, conformidade e equivalência. A equidistância significa que existe uma correta representação da distância entre dois pontos na superfície datum e na superfície projeção, de modo que a escala é mantida ao longo de linhas que liguem quaisquer dois pontos. Esta caraterística é naturalmente limitada a um número específico de pontos e não é de forma alguma uma caraterística geral destas projeções. A conformidade representa a manutenção da forma dos elementos, e consequentemente a manutenção dos ângulos (direções), sendo esta propriedade limitada a áreas infinitamente pequenas e não certamente a figuras geométricas de grandes dimensões. A equivalência de áreas significa a manutenção das áreas dos elementos representados, mas à custa da deformação da sua forma e dos seus ângulos que são neste caso deformados. A última classe pode ser dividida em três variedades mutuamente exclusivas representando os três principais modos de construção de uma projeção: geométrica, semi-geométrica e convencional (matemática). As projeções geométricas ou semi-geométricas resultam de uma representação geométrica ou perspetiva pura ou por meio de um processo parcialmente projetivo. Neste caso enquadram-se as projeções gnonómica e estereográfica. Nas projeções convencionais não existe qualquer relação do tipo projetivo ou geométrico sendo a representação obtida por um processo puramente matemático.

1.3.3. O esquema de classificação

As classes e as variedades mencionadas nas duas seções anteriores podem ser organizadas da seguinte forma (Tabela 1.1):

Tabela 1.1. Classes e variedades das projeções cartográficas.

	Classes	**Variedades**		
Problema extrínseco – Superfície de projeção	I. Natureza	Plana	Cónica	Cilíndrica
	II. Coincidência	Tangente	Secante	Polisuperficial
	III. Posição	Normal	Transversa	Oblíqua
Problema intrínseco - Projeção	IV. Propriedades cartográficas	Equidistante	Equivalente	Conforme
	V. Modo de construção	Geométrica	Semi-geométrica	Convencional

Uma qualquer projeção pode ser descrita por um conjunto de variedades, uma de cada class; e inversamente, um conjunto de variedades, uma de cada classe, definem uma projeção. De salientar o facto de que o número de projeções é infinito. Na tabela 1.2 são apresentados os conjuntos de variedades que caraterizam algumas das projeções utilizadas na cartografia portuguesa.

Tabela 1.2.Variedades que caraterizam algumas das projeções utilizadas na cartografia portuguesa.

	Projeção de Bonne	**Projeção de Mercator**	**Projeção Transversa de Mercator (Gauss)**	**Projeção Universal Transversa de Marcator (UTM)**
Natureza	Cónica	Cilíndrica	Cilíndrica	Cilíndrica
Coincidência	Tangente	Tangente	Tangente	Secante
Posição	Normal	Normal	Transversa	Transversa
Propriedades	Equivalente	Conforme	Conforme	Conforme
Modo de construção	Convencional	Convencial	Convencial	Convencial

CHAPTER 2 DEFINIÇÕES, NOTAÇÃO E DIMENSÕES

2.1. Definições e notação

2.1.1. Representação matemática da forma da terra

A forma física da terra é muito irregular para ser utilizada diretamente em cálculos matemáticos. Consequentemente, diversas superfícies matemáticas fitícias têm sido definidas como aproximações da forma da terra com diferentes graus de precisão.

A melhor aproximação universalmente aceite é a uma superfície equipotencial correspondente ao nível médio do mar, designada por geóide. O geóide é uma superfície ondulatória, suave e contínua, que fiticiamente se estende sob os continentes ao mesmo nível e que, por definição, é perpendicular, em cada ponto, à direção da gravidade. Esta superfície não é simétrica em relação ao seu eixo de rotação, sendo irregular a distribuição de densidades no interior da Terra (Figura 2.1). O monte Everest constitui o ponto mais alto, com cerca de 8 km de altitude, e a fossa das Marianas, com cerca de 11 km de profundidade, constitui o ponto mais profundo da superfície da terra.

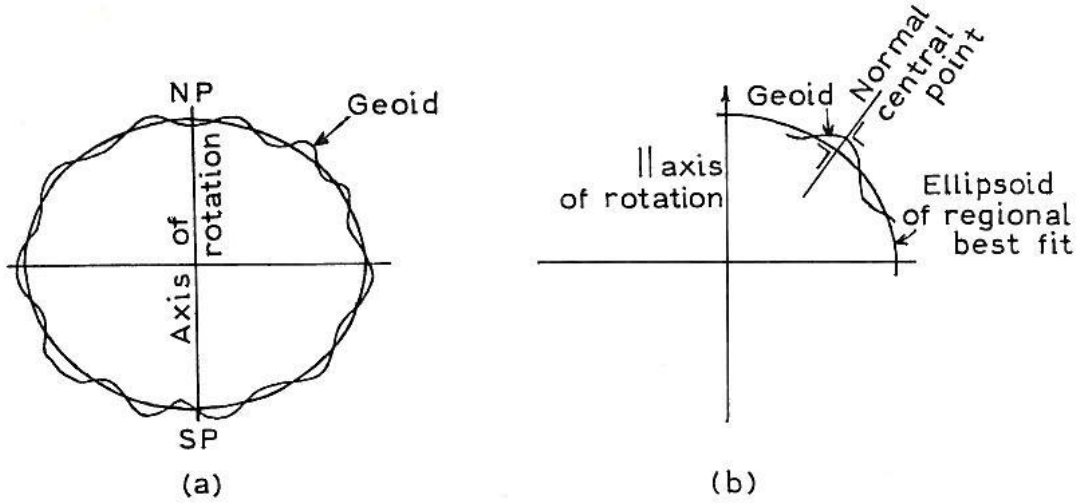


Figura 2.1. O geóide e o elipsóide.

Embora o geóide seja um meio conveniente para o estudo do campo gravítico da terra, este apresenta desvantagens quando se pretendem calcular coordenadas horizontais de pontos, distâncias e ângulos, dado que a formulação matemática necessária para esse cálculo é extremamente complexa.

Dado isto, é introduzida uma superfície de revolução simétrica considerada como a melhor aproximação ao geóide. Esta superfície é um elipsóide cujas dimensões dependem das condições que proporcionam o melhor ajustamento em relação à superfície do geóide que se pretende representar. Uma das propriedades mais comum consiste em fazer coincidir o seu eixo de revolução e centro, respetivamente, com o eixo de rotação e o centro de gravidade do geóide – datum global (Figura 2.1a). No entanto, para a representação de uma região parcial do geóide é considerado um elipsóide, tangente à superfície do

geóide no ponto central dessa região, cuja superfície constitua o melhor ajustamento regional e cujo eixo de revolução seja paralelo ao eixo de rotação do geóide – datum local (Figura 2.1b).

2.1.2. Definições e notação no elipsóide e na esfera

Para os próximos capítulos é necessário definir os elementos do elipsóide bem como os elementos correspondentes à esfera. Vamos considerar a Figura 2.2 onde está representada parte de um elipsóide.

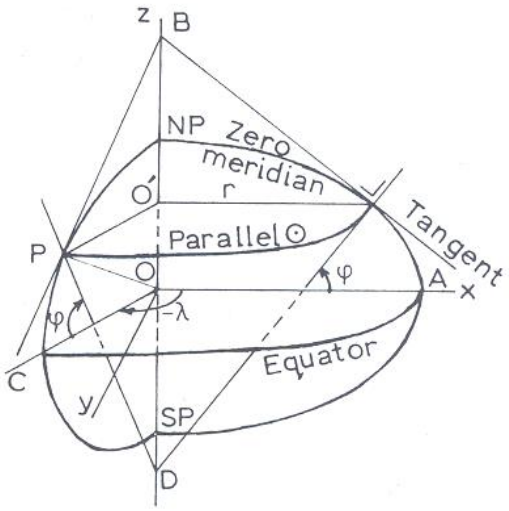


Figura 2.2. Parâmetros do elipsóide.

O eixo-z corresponde ao eixo de revolução. Um plano que passe por este eixo interseta a superfície ao longo de uma elipse meridional. O centro do elipsóide é *O*; o Polo Norte e Sul são indicados por *NP* e *SP*, respetivamente. O semieixo maior da elipse meridional *a* é igual ao raio equatorial representado na figura por *OA* ou *OC* (*OA*= *OC*= *a*). O semieixo menor da elipse meridional *b* é representado na figura por *ONP*= *b*. De seguida são apresentadas as relações matemáticas entre os diversos parâmetros do elipsóide.

O achatamento do elipsóide *f* é dado por

$$f = \frac{a-b}{a} \qquad (2.1)$$

A primeira excentricidade *e* é dada por

$$e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} \qquad (2.2)$$

com e^2 igual à seguinte expressão

$$e^2 = 1 - \left(1 - f\right)^2 \qquad (2.3)$$

O ângulo entre a normal ao elipsóide *PD* em *P* e o eixo equatorial *CO* é designado por latitude geodésica ϕ. O ângulo *COP* é designado por latitude geocêntrica.

O raio de curvatura do meridiano ρ em *P* é dado por

$$\rho = \frac{a.\left(1 - e^2\right)}{\left(1 - e^2.\sin^2\phi\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (2.4)$$

O raio do círculo paralelo *r* que passa por *P* (com ϕ constante), representado na figura por *PO'*, é igual a

$$PO' = N \cdot \cos\phi = r \qquad (2.5)$$

sendo *N* o raio de curvatura na direção da primeira vertical perpendicular à direção do meridiano, o qual é dado pela seguinte expressão

$$N = \frac{a}{\left(1 - e^2.\sin^2\phi\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (2.6)$$

O meridiano que passa por *P* é indicado pelo ângulo λ, designado por longitude de *P*, contado a partir do meridiano de referência. Por regra considera-se o meridiano de Greenwich como sendo o meridiano de referência. No entanto, no caso das representações cartográficas pode ser mais conveniente considerar o meridiano central da projeção de uma dada região como origem da contagem das longitudes. O ângulo λ é considerado positivo na direção Este e negativo na direção Oeste a partir do meridiano de origem.

A equação do elipsóide no sistema de coordenadas retangulares tridimensional (Figura 2.2) é dada por

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \qquad (2.7)$$

ou em coordenadas polares

$$\begin{cases} x = N \cdot \cos\phi.\cos\lambda \\ y = N \cdot \cos\phi.\sin\lambda \\ z = N \cdot \left(1 - e^2\right) \cdot \sin\phi \end{cases} \qquad (2.8)$$

O azimute de um arco arbitrário *PP'* sobre a superfície do elipsóide é designado por α e é contado no sentido dos ponteiros do relógio a partir da direção do Norte. Tal é mostrado na Figura 2.3.

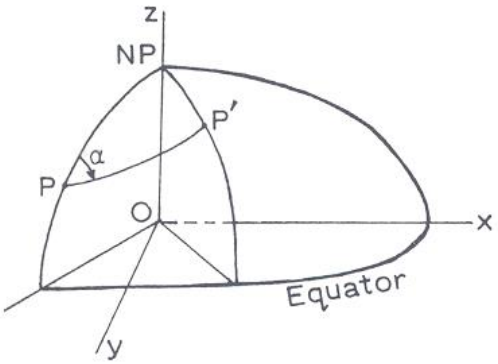


Figura 2.3. Azimute de *PP'*.

As correspondentes fórmulas para a esfera são obtidas colocando e= 0 nas expressões anteriores (Figura 2.4). No caso da esfera existe apenas um raio de curvatura pelo que ρ = N= R e é óbvio que a latitude geodésica ϕ é coincidente com a latitude geocêntrica.

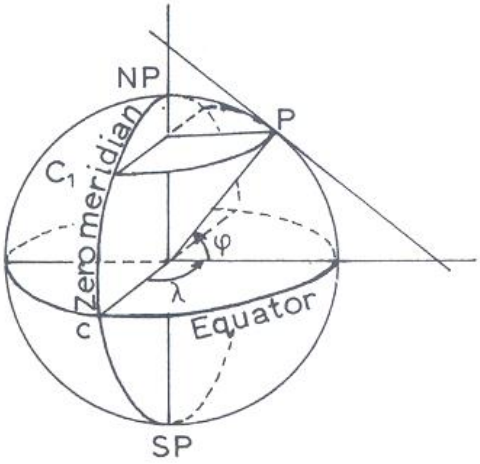


Figura 2.4. Parâmetros esféricos.

Quer no caso do elipsóide quer no caso da esfera a posição dos pontos sobre a superfície é dada pela latitude ϕ contada positiva a partir do equador até ao Norte e a longitude λ, ambas expressas em graus, minutos e segundos de arco.

2.2. Linhas com propriedades especiais

Existem algumas linhas com propriedades sobre a superfície do elipsóide (e as suas equivalentes esféricas). No caso concreto da cartografia, as linhas mais importantes são a geodésica e a loxodrómica.

2.2.1. A geodésica, o círculo máximo e a ortodrómica

O caminho mais curto entre dois pontos P_1 e P_2 sobre a superfície do elipsóide é designado por geodésica (Figura 2.5). Progredindo ao longo desta linha curva, o azimute da tangente muda continuamente a cada ponto.

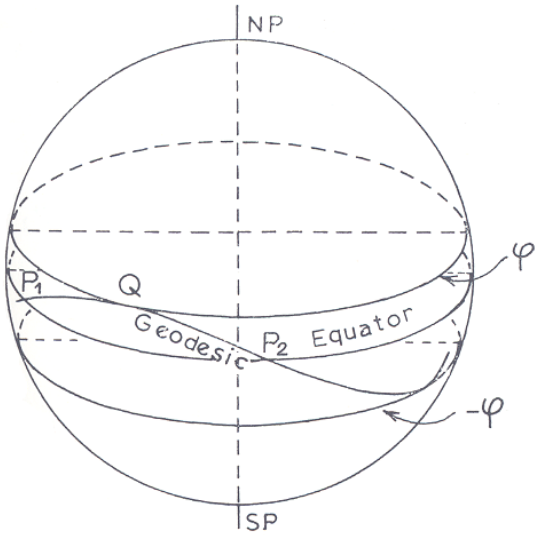


Figura 2.5. A geodésica.

De acordo com o teorema de Clairaut verifica-se a seguinte relação em cada ponto *P* da geodésica: "*o produto do raio de um círculo paralelo que passe por um dado ponto P pelo seno do azimute da geodésica é uma constante*", ou

$$r \cdot \sin\alpha = N \cdot \cos\phi \cdot \sin\alpha = C \qquad (2.9)$$

Desta expressão retiram-se algumas particularidades

(1) Para $\phi = 0$, $N = a$ e

$$\sin\alpha = \frac{C}{a} \qquad (2.10)$$

quando a geodésica interseta o equador, o azimute α é igual ao $arcsin(C/a)$.

(2) Para $\alpha = 90°$, verifica-se que

$$\begin{cases} \{N.\cos\phi = C \\ N.\cos(-\phi) = C \end{cases} \qquad (2.11)$$

a solução destas equações devolve dois valores para ϕ simétricos em relação ao equador.

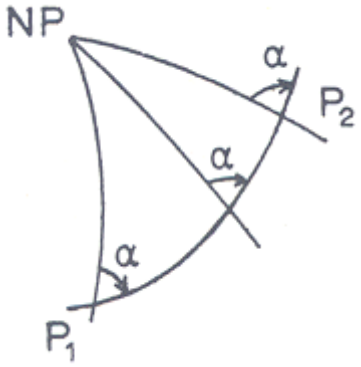
(3) Para α= 0, o valor de ϕ é indeterminado e a geodésica é um meridiano.

Caso P_1 e P_2 tenham uma distância máxima em longitude de 180° (λ_2-λ_1= 180°), o caminho mais curto é ao longo de uma secção meridional que passe por um dos polos. Os círculos paralelos não são geodésicas, embora o teorema de Clairaut seja satisfeito (equação 2.9).

Quer as seções normais entre dois pontos quer a geodésica correspondem a partes de círculos máximos na esfera dado que esta corresponde a um caso particular do elipsóide, isto é quando o semieixo maior e menor são iguais. Logo, o caminho mais curto entre 2 pontos é parte de um círculo máximo. No entanto, esta curva só é projetada como uma linha reta nas projeções gnomónicas (à projeção da geodésica é dado o nome de ortodrómica).

2.2.2. A loxodrómica

A loxodrómica entre dois pontos P_1 e P_2 é uma curva que interseta os meridianos com um azimute α constante (Figura 2.6).



2.6. A loxodrómica.

A equação dessa curva é gerada a partir de uma equação diferencial

$$d\lambda = \tan\alpha \cdot \frac{1}{\cos\phi} d\phi \qquad (2.12)$$

derivando diretamente a partir da Figura 2.7.

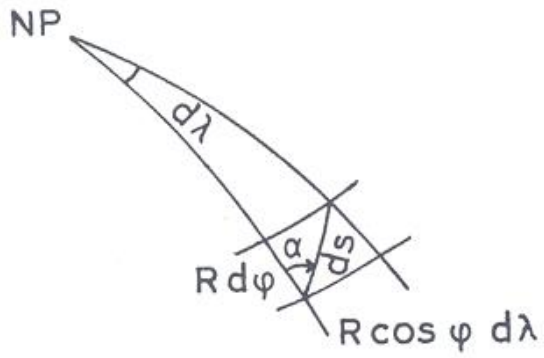


Figura 2.7. Elementos diferenciais da loxodrómica.

Integrando e resolvendo de modo a obter *tan* α, obtém-se

$$\tan\alpha = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\ln\tan(45° + \frac{1}{2}\phi_2) - \ln\tan(45° + \frac{1}{2}\phi_1)} \qquad (2.13)$$

Qualquer outro ponto *P* (φ, λ) ao longo da curva pode ser calculado através da integração de (2.12) com os limites λ_1 e λ

$$\lambda_1 - \lambda = \tan\alpha \left\{ \ln\tan(45° + \frac{1}{2}\phi_2) - \ln\tan(45° + \frac{1}{2}\phi_1) \right\} \qquad (2.14)$$

Desta expressão retiram-se algumas particularidades:

(1) Se $\phi_1 = \phi_2$, tg $\alpha = \infty$ ou $\alpha = 90°$, resultando num círculo paralelo;

(2) Se $\lambda_1 = \lambda_2$, $\alpha = 0$, resultando num meridiano;

(3) *Se* $\phi = 90°$, $\lambda - \lambda_1$ tende para infinito, resultando numa espiral em direção ao polo (Figura 2.8).

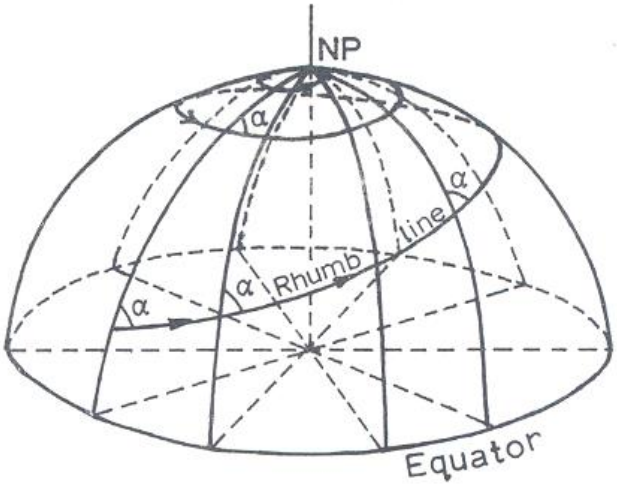


Figura 2.8. A loxodrómica em direção ao polo.

A loxodrómica é de especial importância na navegação dado que é projetada como uma linha reta entre pontos na projeção cilíndrica conforme de Mercator. As Figuras 2.9 e 2.10 mostram a ortodrómica e a loxodrómica numa projeção gnomónica e numa projeção conforme de Mercator, respetivamente.

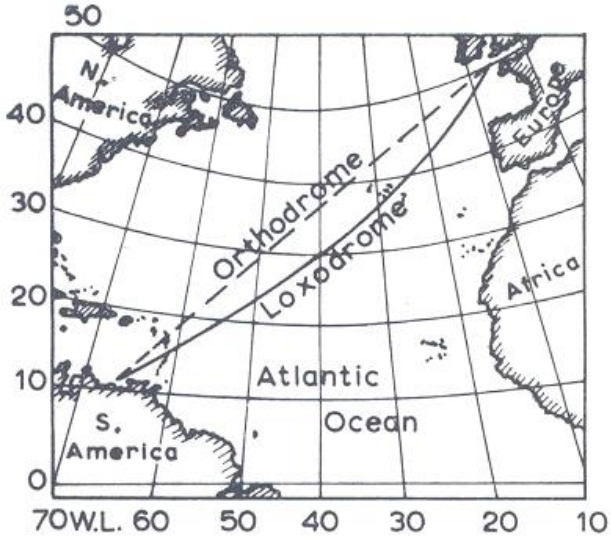


Figura 2.9. A ortodrómica e a loxodrómica na projeção gnomónica, ϕ_0= 30°.

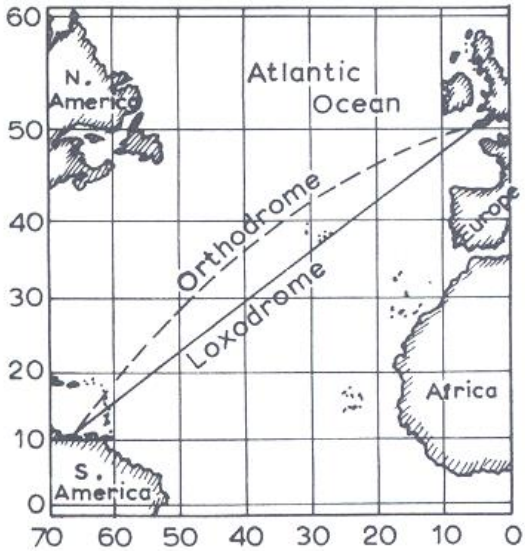


Figura 2.10. A ortodrómica e a loxodrómica na projeção de Mercator.

CHAPTER 3 FÓRMULA GERAL DA TRANSFORMAÇÃO. A TEORIA DAS DISTORÇÕES

3.1. Fórmula geral da transformação. Condições de unicidade, reversabilidade e correspondência entre curvas paramétricas

Um dado sistema de curvas paramétricas (*u*, *v*) pode ser adotado sobre uma superfície curva, logo cada ponto dessa superfície pode ser dado em coordenadas cartesianas tridimensionais *x*, *y*, z como função de *u* e *v* (Figura 3.1).

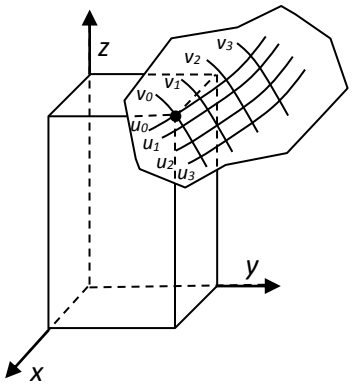


Figura 3.1. *Superfície datum*

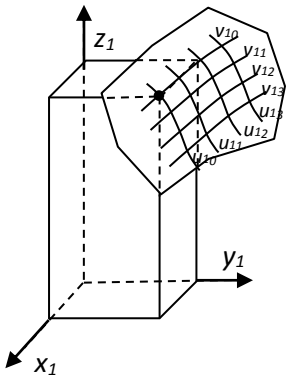


Figura 3.2. *Superfície de projeção*

$$\begin{cases} x = p_1(u,v) \\ y = p_2(u,v) \\ z = p_3(u,v) \end{cases} \qquad (3.1)$$

Por conveniência, a essa superfície irá chamar-se *superfície datum*. A mesma relação pode ser escrita para uma segunda superfície à qual se irá chamar *superfície de projeção* (Figura 3.2).

$$\begin{cases} x_1 = p'_1(u_1,v_1) \\ y_1 = p'_2(u_1,v_1) \\ z_1 = p'_3(u_1,v_1) \end{cases} \qquad (3.2)$$

As curvas paramétricas da superfície datum estão relacionadas com um sistema de curvas na superfície de projeção se existir uma relação matemática entre os parâmetros (*u*, *v*) e (u_1, v_1), e vice-versa.

$$\begin{cases} u_1 = q_1(u,v) \\ v_1 = q_2(u,v) \end{cases} \qquad (3.3)$$

É óbvio que para representarmos a superfície da Terra, ou qualquer outra superfície curva, numa esfera ou num plano, duas condições devem ser satisfeitas

(1) a projeção deve ser única (condição de unicidade);

(2) a projeção deve ser reversível (condição de reversabilidade).

Tal significa que a um dado ponto na superfície datum deve corresponder um único ponto na superfície de projeção e vice-versa. Matematicamente, tal pode ser expresso pela condição de que os parâmetros u e v devem ser resolúveis a partir das equações (3.3), tendo-os como função de u_1 e v_1.

$$\begin{cases} u = \overline{q}_1\left(u_1, v_1\right) \\ v = \overline{q}_2\left(u_1, v_1\right) \end{cases} \qquad (3.4)$$

Sem mais restrições, as curvas paramétricas u e v por norma não correspondem ao sistema (u_1, v_1), constituíndo um outro sistema arbitrário diferente. No entanto, a relação entre (u, v) e (u_1, v_1) pode ser estabelecida eliminando u_1 e v_1 da equação (3.2) com a ajuda de (3.3), obtendo-se a *fórmula geral da transformação*

$$\begin{cases} x = p_1\left(u,v\right) \\ y = p_2\left(u,v\right) \\ z = p_3\left(u,v\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \overline{p}_1\left(u,v\right) \\ y_1 = \overline{p}_2\left(u,v\right) \\ z_1 = \overline{p}_3\left(u,v\right) \end{cases} \qquad (3.5)$$

3.2. Geometria diferencial elementar. A matriz de transformação

3.2.1. Elemento linear e expressões angulares

De acordo com uma fórmula da geometria diferencial o quadrado do comprimento infinitesimal de uma parte de uma curva, designado abreviadamente por elemento linear ds, sobre uma superfície é dado por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (3.6)$$

Derivando as expressões (3.1) em ordem a u e v, obtem-se

$$\begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial u} \cdot du + \dfrac{\partial x}{\partial v} \cdot dv \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \dfrac{\partial y}{\partial v} \cdot dv \\ dz = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot dv \end{cases} \qquad (3.7)$$

substituíndo (3.7) em (3.6), resulta que

$$ds^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot du + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot dv\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\cdot du + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot dv\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot du + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot dv\right)^2 = \because.$$

$$= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right]\cdot du^2 + 2\left[\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right]\cdot dudv \qquad (3.8)$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]\cdot dv^2$$

Os coeficientes de du^2, $du.dv$ e dv^2 são designados por primeiros coeficientes superficiais de Gauss e são designados na literatura por E, F e G, respetivamente. Deste modo a expressão (3.6) passa e escrever-se da seguinte forma

$$ds^2 = E\cdot du^2 + 2F\cdot dudv + G\cdot dv^2 \qquad (3.9)$$

Considerando que uma dada curva sobre uma dada superfície é uma curva coordenada u= *const.*, então du= 0, logo substituíndo em (3.9) obtemos

$$ds_u^{\ 2} = G\cdot dv^2 \quad \Leftrightarrow \quad ds_u = \sqrt{G}\cdot dv$$

de igual modo, se v= *const.*, então dv= 0, logo

$$ds_v^{\ 2} = E\cdot du^2 \quad \Leftrightarrow \quad ds_v = \sqrt{E}\cdot du$$

As quantidades $\sqrt{E}$ e $\sqrt{G}$ atuam como unidades de medida ao longo das curvas u e v sobre uma dada superfície. Na Figura 3.3 é apresentado um paralelogramo diferencial num ponto P de uma dada curva

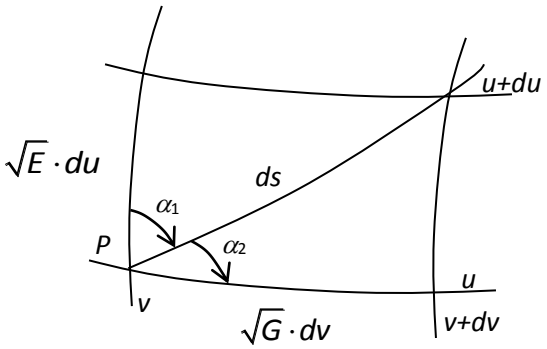


Figura 3.3. O paralelogramo diferencial

As curvas coordenadas u= *const.* e v= *const.* serão, no caso da Cartografia, os paralelos e meridianos, respetivamente. Consideremos então que

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \theta \qquad (3.10)$$

sendo θ o ângulo de interseção das curvas coordenadas *u* e *v* no ponto *P* (i.e., o ângulo entre as tangentes às curvas *u* e *v* em *P*). O paralelogramo pode considerar-se plano dada a sua área infinitamente pequena, pelo que se pode aplicar a lei do coseno, obtendo-se

$$ds^2 = \left(\sqrt{E}\cdot du\right)^2 + \left(\sqrt{G}\cdot dv\right)^2 - 2\left(\sqrt{E}\cdot du\right)\cdot\left(\sqrt{G}\cdot dv\right)\cdot\cos(180^\circ - \theta) \quad \Leftrightarrow$$

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2 + 2\sqrt{EG}\cdot dudv\cdot\cos\theta \qquad (3.11)$$

Igualando as expressões (3.11) e (3.9), obtem-se que

$$2F = 2\sqrt{EG}\cdot\cos\theta \Leftrightarrow$$

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}} \qquad (3.12)$$

A igualdade (3.12) mostra que a condição necessária e suficiente para que as curvas coordenadas *u* e *v* sejam ortogonais é que *F*= 0. Considerando que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, resulta que

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{F}{\sqrt{EG}}\right)^2} = \sqrt{\frac{EG-F^2}{EG}} \qquad (3.13)$$

O ângulo α_1 entre a tangente à curva coordenada *v= const.* e a tangente a uma curva *ds* num dado ponto *P*, denominado azimute de *ds*, obtem-se aplicando novamente a lei do coseno

$$\left(\sqrt{G}\cdot dv\right)^2 = \left(\sqrt{E}\cdot du\right)^2 + ds^2 - 2\left(\sqrt{E}\cdot du\right)\cdot ds\cdot\cos\alpha_1 \quad \Leftrightarrow$$

$$ds^2 = Gdv^2 - Edu^2 + 2\sqrt{E}\cdot du\cdot ds\cdot\cos\alpha_1$$

igualando esta expressão à expressão (3.11), obtem-se

$$\cos\alpha_1 = \frac{2Edu^2 + 2\sqrt{EG}\cdot du\cdot dv\cdot\cos\theta}{2\sqrt{E}\cdot du\cdot ds} = \frac{Edu + \sqrt{EG}\cdot dv\cdot\cos\theta}{\sqrt{E}\cdot ds}$$

substituíndo $\cos\theta$ pela sua expressão em (3.12), resulta que

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\cdot\left(E\cdot\frac{du}{ds} + F\cdot\frac{dv}{ds}\right) \qquad (3.14)$$

de igual modo se obtem para $\cos\alpha_2$ a seguinte expressão

$$\cos\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \left(F \cdot \frac{du}{ds} + G \cdot \frac{dv}{ds} \right) \qquad (3.15)$$

Considerando, novamente, que $\cos^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_1 = 1$, resulta que

$$\sin\alpha_1 = \sqrt{1-\cos^2\alpha_1} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \left(E \cdot \frac{du}{ds} + F \cdot \frac{dv}{ds} \right)\right)^2} = \cdots$$
$$= \sqrt{\frac{E \cdot ds^2 - E^2 \cdot du^2 - 2E \cdot F \cdot du \cdot dv - F^2 \cdot dv^2}{E \cdot ds^2}}$$

substituindo no numerador ds^2 pela sua expressão em (3.9), obtem-se que

$$\sin\alpha_1 = \sqrt{\frac{E \cdot G - F^2}{E}} \cdot \frac{dv}{ds} \qquad (3.16)$$

de igual modo se obtem que

$$\sin\alpha_2 = \sqrt{\frac{E \cdot G - F^2}{G}} \cdot \frac{du}{ds} \qquad (3.17)$$

A área elementar do paralelogramo é dada pelo produto externo de dois vetores

$$A = \sqrt{EG} \cdot du \cdot dv \cdot \sin\theta$$

substituindo $\sin\theta$ pela sua expressão (3.13), obtem-se que

$$A = \sqrt{EG - F^2} \cdot du \cdot dv \qquad (3.18)$$

A expressão $EG - F^2$ é definida positiva. Estas mesmas expressões são aplicáveis à superfície de projeção usando as letras e_1, f_1 e g_1 (em vez de E, F e G, respetivamente) e os ângulos Ω e β (em vez de θ e α, respetivamente). Num sistema paramétrico ortogonal (u, v) onde θ= 90°, F= 0 e a expressão para a área do paralelogramo passa a ser

$$A = \sqrt{EG} \cdot du \cdot dv$$

3.2.2. A matriz de transformação fundamental. O determinante do jacobiano

Considerando duas superfícies S e S_1, e sobre cada uma delas um sistema de coordenadas curvilíneas (u, v) e (u_1, v_1), obtemos os seguintes elementos lineares ds e ds_1

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= E \cdot du^2 + 2F \cdot dudv + G \cdot dv^2 \\
ds_1{}^2 &= E_1 \cdot du_1{}^2 + 2F_1 \cdot du_1 dv_1 + G_1 \cdot dv_1{}^2
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Derivando as expressões (3.3) que estabelecem a correspondência entre os pontos das duas superfícies, obtem-se que

$$
\begin{aligned}
du_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot dv \\
dv_1 &= \frac{\partial v_1}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial v_1}{\partial v} \cdot dv
\end{aligned}
$$

Substituíndo estas expressões na segunda expressão em (3.19), vamos obter o elemento linear ds_1 em termos das cooordenadas u e v

$$
\begin{aligned}
ds_1{}^2 = E_1 \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot dv \right)^2 + 2F_1 \cdot \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot dv \right) \cdot \left(\frac{\partial v_1}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial v_1}{\partial v} \cdot dv \right) \right] + \\
G_1 \cdot \left(\frac{\partial v_1}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial v_1}{\partial v} \cdot dv \right)^2 = \cdots = e_1 \cdot du^2 + 2f_1 \cdot dudv + g_1 \cdot dv^2
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
e_1 &= E_1 \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \right)^2 + 2F_1 \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial u} \right) + G_1 \cdot \left(\frac{\partial v_1}{\partial u} \right)^2 \\
f_1 &= E_1 \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial v} \right) + F_1 \cdot \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v} \right) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial u} \right) \right] + G_1 \cdot \left(\frac{\partial v_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v} \right) \\
g_1 &= E_1 \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial v} \right)^2 + 2F_1 \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v} \right) + G_1 \cdot \left(\frac{\partial v_1}{\partial v} \right)^2
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

A relação entre os coeficientes e_1, f_1 e g_1 e os coeficientes E_1, F_1 e G_1 pode ser expressa em notação matricial da seguinte forma

$$
\begin{bmatrix} e_1 \\ f_1 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
\left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \right)^2 & 2 \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial u} \right) & \left(\frac{\partial v_1}{\partial u} \right)^2 \\
\left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial v} \right) & \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v} \right) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial u} \right) & \left(\frac{\partial v_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v} \right) \\
\left(\frac{\partial u_1}{\partial v} \right)^2 & 2 \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v} \right) & \left(\frac{\partial v_1}{\partial v} \right)^2
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ F_1 \\ G_1 \end{bmatrix}
\tag{3.21}
$$

sendo esta matriz designada por matriz fundamental da transformação. O termo $e_1 \cdot g_1 - f_1^2$ pode ser deduzido a partir das expressões anteriores, podendo também ser expresso como o produto de dois determinantes

$$e_1 \cdot g_1 - f_1^2 = \begin{vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial u} & \frac{\partial u_1}{\partial v} \\ \frac{\partial v_1}{\partial u} & \frac{\partial v_1}{\partial v} \end{vmatrix}^2 = \left(E_1 \cdot G_1 - F_1^2\right) \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v} - \frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2 = \left(E_1 \cdot G_1 - F_1^2\right) \cdot \Delta^2 \quad (3.22)$$

sendo o segundo determinante, designado abreviadamente por Δ, o determinante do jacobiano de (u_1, v_1) com respeito a (u, v).

Com as funções descritas desta forma pode garantir-se que a cada par (u, v) corresponde um ponto sobre a superfície datum e outro sobre a superfície de projeção, dado que este determinante é sempre diferente de zero ($\Delta \neq 0$, pois $\frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v} \neq \frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial u}$). Caso fosse nulo o determinante, uma função dependeria da outra e a correspondência não era unívoca.

3.3. Outros conceitos

3.3.1. A deformação linear. Condições de conformidade e de equivalência

O módulo da deformação linear k, também designado por fator de escala, é definido pela seguinte razão

$$k^2 = \frac{ds_1^{\,2}}{ds^2} = \frac{e_1 du^2 + 2 f_1 du dv + g_1 dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} = \frac{e_1 \left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2 f_1 \frac{du}{dv} + g_1}{E \left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2F \frac{du}{dv} + G} \quad (3.23)$$

de notar que k depende da direção $\frac{du}{dv}$ da tangente ao ponto P e que é diferente em cada direção. No entanto, existe uma excepção, nomeadamente, quando os coeficientes do denominador são respetivamente proporcionais aos do numerador

$$k^2 = \frac{e_1}{E} = \frac{f_1}{F} = \frac{g_1}{G} \quad (3.24)$$

O fator de escala é então independente de $\frac{du}{dv}$ e é o mesmo em todas as direções. Esta condição deve ser satisfeita para todas as *projeções conformes*. Esta mesma condição mantém os ângulos livres de distorções na imagem. Tal pode ser observado a partir das expressões (3.13) e (3.16) em combinação com (3.24), resultando em

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{EG}} = \frac{\sqrt{\frac{e_1}{k^2}\cdot\frac{g_1}{k^2}-\left(\frac{f_1}{k^2}\right)^2}}{\sqrt{\frac{e_1}{k^2}\cdot\frac{g_1}{k^2}}} = \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2}}\cdot\frac{\sqrt{e_1\cdot g_1-f_1^2}}{\sqrt{e_1\cdot g_1}} = \sin\Omega$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E}}\cdot\frac{dv}{ds} = \frac{\sqrt{\frac{e_1}{k^2}\cdot\frac{g_1}{k^2}-\left(\frac{f_1}{k^2}\right)^2}}{\sqrt{\frac{e_1}{k^2}}}\cdot\frac{dv}{ds} = \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k}}\cdot\frac{\sqrt{e_1\cdot g_1-f_1^2}}{\sqrt{e_1}}\cdot\frac{dv}{ds} = \sin\beta$$

considerando k= 1.

De acordo com (3.18), a área de um paralelogramo infinitamente pequeno é dada por

$$A = \sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

se a imagem (*projeção*) deste paralelogramo tiver a mesma área, a seguinte condição deve ser satisfeita

$$EG-F^2 = \frac{1}{k^4}\cdot(e_1\cdot g_1-f_1^2) = e_1\cdot g_1-f_1^2 = \begin{vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial u} & \frac{\partial u_1}{\partial v} \\ \frac{\partial v_1}{\partial u} & \frac{\partial v_1}{\partial v} \end{vmatrix}^2 \qquad (3.25)$$

considerando um fator de escala igual a 1.

3.3.2. Coeficientes superficiais de Gauss no elipsóide, na esfera e no plano. Coordenadas isométricas

No caso da Cartografia o que se pretende é a representação da superfície do elipsóide de revolução sobre uma superfície de projeção (plano, cilindro ou cone). Em geral, consideram-se sobre a superfície do elipsóide as coordenadas latitude e longitude (ϕ, λ) e sobre a superfície de projeção as coordenadas cartesianas, também designadas por retangulares ou planas, (x, y) ou as cooordenadas polares (R, θ). Um elipsóide pode ser descrito pelas seguintes equações

$$\begin{cases} X = N\cdot\cos\phi\cdot\cos\lambda \\ Y = N\cdot\cos\phi\cdot\sin\lambda \\ Z = N\cdot\left(1-e^2\right)\cdot\sin\phi \end{cases} \qquad (3.26)$$

sendo N o raio de curvatura na direção da primeira vertical perpendicular à direção do meridiano.

As curvas paramétricas sobre a superfície do elipsóide são os meridianos e as trajetórias *ortogonais* são os círculos de paralelo (u= ϕ e v= λ). A expressão do elemento linear sobre a superfície datum é dada por

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$$

derivando as expressões (3.26) e considerando as expressões dos coeficientes superficiais de Gauss, *E*, *F* e *G*, na expressão (3.8), obtem-se que

$$\begin{cases} E = \left(\dfrac{dX}{d\phi}\right)^2 + \left(\dfrac{dY}{d\phi}\right)^2 + \left(\dfrac{dZ}{d\phi}\right)^2 = \ldots = \rho^2 \\ F = 0 \\ G = \left(\dfrac{dX}{d\lambda}\right)^2 + \left(\dfrac{dY}{d\lambda}\right)^2 + \left(\dfrac{dZ}{d\lambda}\right)^2 = \left(-N \cdot \cos\phi \cdot \sin\lambda\right)^2 + \left(N \cdot \cos\phi \cdot \cos\lambda\right)^2 = \ldots \\ \quad = N^2 \cdot \cos^2\phi = r^2 \end{cases} \tag{3.27}$$

e consequentemente a expressão do elemento linear passa a escrever-se da seguinte forma

$$ds^2 = \rho^2 d\phi^2 + N^2 \cos^2\phi \, d\lambda^2 = \rho^2 d\phi^2 + r^2 d\lambda^2 \tag{3.28}$$

No caso da esfera tem-se que $\rho = N = R$, sendo descrita pelas seguintes equações

$$\begin{cases} X = R \cdot \cos\phi \cdot \cos\lambda \\ Y = R \cdot \cos\phi \cdot \sin\lambda \\ Z = R \cdot \sin\phi \end{cases} \tag{3.29}$$

de igual modo se obtem que

$$\begin{cases} E = \left(\dfrac{dX}{d\phi}\right)^2 + \left(\dfrac{dY}{d\phi}\right)^2 + \left(\dfrac{dZ}{d\phi}\right)^2 = \left(-R \cdot \sin\phi \cdot \cos\lambda\right)^2 + \left(-R \cdot \sin\phi \cdot \sin\lambda\right)^2 + \left(R \cdot \cos\phi\right)^2 = \ldots \\ \quad = R^2 \\ F = 0 \\ G = \left(\dfrac{dX}{d\lambda}\right)^2 + \left(\dfrac{dY}{d\lambda}\right)^2 + \left(\dfrac{dZ}{d\lambda}\right)^2 = \left(-R \cdot \cos\phi \cdot \sin\lambda\right)^2 + \left(R \cdot \cos\phi \cdot \cos\lambda\right)^2 = \ldots \\ \quad = R^2 \cos^2\phi \end{cases} \tag{3.30}$$

e consequentemente

$$ds^2 = R^2 d\phi^2 + R^2 \cos^2\phi \, d\lambda^2 \tag{3.31}$$

No plano tem-se a seguinte expressão para o elemento linear ds_1, considerando $u_1 = x$ e $v_1 = y$

$$ds_1^{\,2} = E_1 dx^2 + G_1 dy^2 = dx^2 + dy^2 \tag{3.32}$$

pelo que

$$E_1 = G_1 = 1 \qquad e \qquad F_1 = 0 \qquad (3.33)$$

as unidades de medida ao longo dos eixos coordenados são iguais. Tal não se verifica nas expressões (3.28) e (3.31), pois $E \neq G$.

No caso do elipsóide, o sistema de coordenadas (ϕ, λ) não é um sistema isométrico, i. e. não tem a mesma métrica ao longo dos dois eixos principais. No entanto, estas coordenadas podem ser submetidas a uma transformação com vista a tornar as unidades de medida iguais. Considerando a expressão (3.28)

$$ds^2 = \rho^2 d\phi^2 + N^2 \cos^2\phi \, d\lambda^2 = \rho^2 d\phi^2 + r^2 d\lambda^2$$

colocando $N^2 \cdot \cos^2\phi$ em evidência obtem-se

$$ds^2 = N^2 \cdot \cos^2\phi \cdot \left[\left(\frac{\rho d\phi}{N\cos\phi} \right)^2 + d\lambda^2 \right] = r^2 \cdot \left[\left(\frac{\rho d\phi}{r} \right)^2 + d\lambda^2 \right] \qquad (3.34)$$

Introduzindo uma nova variável Φ, designada por latitude isométrica, cuja relação com a latitude geodésica é dada por

$$d\Phi = \frac{\rho}{N \cdot \cos\phi} d\phi = \frac{(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\phi)\cdot\cos\phi} d\phi \qquad (3.35)$$

e integrando esta expressão, obtem-se a seguinte expressão para a latitude isométrica Φ

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \frac{\rho}{N\cos\phi} d\phi = \ell n \left[tg\left(45° + \frac{1}{2}\phi \right) \cdot \left(\frac{1 - e\sin\phi}{1 + e\sin\phi} \right)^{e/2} \right] = \ldots \\ &= \ell n \; tg\left(45° + \frac{1}{2}\phi \right) + \frac{e}{2} \ell n \left(\frac{1 - e\sin\phi}{1 + e\sin\phi} \right) + c \end{aligned} \qquad (3.36)$$

em que e representa a excentricidade do elipsóide, ℓn o logaritmo natural e c é uma constante, a qual é igual a zero. De notar que a latitude isométrica se torna infinita nas regiões polares e assume o valor zero no equador.

A expressão (3.34) passa então a escrever-se da seguinte forma

$$ds^2 = N^2 \cdot \cos^2\phi \cdot \left(d\Phi^2 + d\lambda^2 \right) \qquad (3.37)$$

sendo o novo sistema de coordenadas designado por sistema de coordenadas isométricas.

A latitude isométrica na esfera deriva-se diretamente da expressão (3.36) colocando a excentricidade e igual a zero, resultando em

$$\Phi_{esf} = \ell n\ tg\left(45° + \frac{1}{2}\phi\right) \qquad (3.38)$$

O elemento linear, no caso da esfera, é então dado por

$$ds^2 = R^2 \cdot \cos^2\phi \cdot \left(d\Phi^2 + d\lambda^2\right) \qquad (3.39)$$

Num sistema de coordenadas polares plano, onde o elemento linear ds_1é dado por, considerando u_1= R e v_1= θ

$$ds_1{}^2 = E_1 dR^2 + G_1 d\theta^2$$

$$x = R\cos\theta$$
$$y = R\sin\theta$$

$$E_1 = \left(\frac{dx}{dR}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dR}\right)^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$F_1 = 0$$
$$G_1 = \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = R^2\sin^2\theta + R^2\cos^2\theta = R^2$$

$$ds_1{}^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2 \qquad (3.40)$$

onde R é o raio polar e θ o ângulo polar. Os primeiros coeficientes de Gauss E_1 e G_1 não são iguais aos da equação (3.32), pelo que o sistema também não é isométrico. De igual forma se pode transformar este sistema num outro sistema equivalente que seja isométrico. Colocando R^2 em evidência, obtem-se

$$ds_1{}^2 = R^2\left(\frac{dR^2}{R^2} + d\theta^2\right) = R^2\left(d\mu^2 + d\theta^2\right) \qquad (3.41)$$

onde $d\mu = \frac{dR}{R}$. Integrando $d\mu$, obtem-se que

$$\mu = \ell n\ R + c$$

donde resulta que

$$\mu - c = \ell n\ R \Leftrightarrow$$
$$R = e^{\mu - c} = e^{\mu} \cdot e^{-c} = e^{\mu} \cdot p$$

sendo assim a expressão do elemento linear passa a ter a seguinte forma

$$ds_1^{\,2} = e^{2\mu} \cdot p^2 \left(d\mu^2 + d\theta^2 \right) \qquad (3.42)$$

onde as coordenadas μ e θ são isométricas.

Num sistema de coordenadas retangulares os paralelogramos elementares são retângulos, logo θ = 90° e *F*= 0. Estes paralelogramos tornam-se quadrados num sistema de coordenadas isométrico.

As coordenadas isométricas são de extrema importância nas projeções conformes. Embora os coeficientes principais de Gauss, na condição de conformidade (3.24), possam ser derivados diretamente de (3.21), a introdução dos parâmetros isométricos simplifica consideravelmente as expressões.

3.4. A teoria das distorções das distâncias, ângulos e áreas

3.4.1. Pares ortogonais correspondentes

Definindo um sistema retangular de curvas paramétricas (*u*, *v*) sobre a superfície *datum* (*F*= 0), o correspondente conjunto de curvas na superfície de projeção é por regra não retangular ($f_1 \neq 0$). Sendo assim, a expressão da deformação linear *k* assume a seguinte forma

$$k^2 = \frac{ds_1^{\,2}}{ds^2} = \frac{e_1 du^2 + 2 f_1 du dv + g_1 dv^2}{ds^2}$$

Atendendo às expressões do *cos* (3.14) e do *sin* (3.16) do azimute α de uma linha qualquer sobre uma superfície, omitindo o índice $_1$ em α por conveniência, e considerando que *F*= 0, obtem-se que

$$k^2 = e \cdot \cos^2 \alpha + 2 f \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha + g \cdot \sin^2 \alpha \qquad (3.43)$$

sendo $e = \frac{e_1}{E}$, $f = \frac{f_1}{\sqrt{EG}}$ e $g = \frac{g_1}{G}$.

No entanto, Tissot (1881) provou que em cada ponto da superfície *datum* existe um conjunto de curvas paramétricas retangulares, as quais têm um conjunto de curvas correspondentes com as mesmas caraterísticas na superfície de projeção. Estas curvas são designadas por curvas paramétricas principais (f_1=0). Consequentemente, a expressão de *k* pode então ser simplificada passando a

$$k^2 = \frac{ds_1^{\,2}}{ds^2} = \frac{e_1 du^2 + g_1 dv^2}{ds^2} = e \cdot \cos^2 \alpha + g \cdot \sin^2 \alpha \qquad (3.44)$$

3.4.2. A deformação linear

De acordo com a expressão 3.43, a deformação linear *k* assume a seguinte forma

$$k^2 = e \cdot \cos^2\alpha + 2f \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha + g \cdot \sin^2\alpha$$

Para determinar o valor máximo e minímo para a deformação linear, anula-se a derivada do segundo membro da expressão em ordem a α, obtendo-se

$$\begin{aligned} \frac{d\left(k^2\right)}{d\alpha} &= -2 \cdot e \cdot \cos\alpha \sin\alpha + 2 \cdot f \cdot \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) + 2 \cdot g \cdot \sin\alpha \cos\alpha = \\ &(g - e) \cdot \sin 2\alpha + 2f \cdot \cos 2\alpha = 0 \end{aligned} \qquad (3.45)$$

expressão esta que é equivalente a

$$tg2\alpha = \frac{2f}{(e-g)} \quad (3.46)$$

Reescrevendo a expressão da deformação linear em coordenadas cartesianas obtem-se que

$$\begin{aligned} e \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \cos^2\alpha + 2f \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha + g \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \sin^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \\ e \cdot x^2 + 2f \cdot x \cdot y + g \cdot y^2 = 1 \end{aligned}$$

calculando os valores próprios desta expressão, obtem-se o valor máximo e minímo para a deformação linear

$$\begin{cases} k_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[(e+g) + \sqrt{(e-g)^2 + 4 \cdot f^2} \right]} \\ k_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[(e+g) - \sqrt{(e-g)^2 + 4 \cdot f^2} \right]} \end{cases} \qquad (3.47)$$

Analisando estas duas igualdades rapidamente se verifica que

$$k_2{}^2 + k_1{}^2 = e + g \qquad (3.48)$$

3.4.3. A deformação linear sobre curvas paramétricas

A deformação linear ao longo da curva *u* (onde *du*= 0, α= 90°) é igual a

$$k_1 = \sqrt{\frac{g_1}{G}} \qquad (3.49)$$

de igual forma, a deformação linear ao longo da curva *v* (onde *dv*= 0, α= 0°) é igual a

$$k_2 = \sqrt{\frac{e_1}{E}} \qquad (3.50)$$

Usando (3.14) e (3.16) e considerando que *F*=0

$$\sin\alpha = \sqrt{G}\frac{dv}{ds} \qquad \cos\alpha = \sqrt{E}\frac{du}{ds} \qquad (3.51)$$

e as expressões (3.49) e (3.50), a expressão (3.44) passa a escrever-se da seguinte forma:

$$k^2 = \frac{Ek_2{}^2du^2 + Gk_1{}^2dv^2}{ds^2} = Ek_2{}^2\left(\frac{\cos\alpha}{\sqrt{E}}\right)^2 + Gk_1{}^2\left(\frac{\sin\alpha}{\sqrt{G}}\right)^2 = k_2{}^2\cos^2\alpha + k_1{}^2\sin^2\alpha \qquad (3.52)$$

e devolve o valor da deformação linear para um elemento linear *ds* de azimute α, sendo k_2 a deformação linear principal da linha origem da contagem dos azimutes (α= 0).

Para determinar o valor máximo e minímo para a deformação linear, anula-se a derivada do segundo membro da expressão (3.52) em ordem a α, obtendo-se:

$$\frac{d\left(k^2\right)}{d\alpha} = -2k_2{}^2\cos\alpha\sin\alpha + 2k_1{}^2\sin\alpha\cos\alpha = (k_1{}^2 - k_2{}^2)\sin 2\alpha = 0$$

um valor extremo para *k* com α= 0

$$k_{ext} = k_2 \qquad (3.53)$$

e com α= 90°

$$k_{ext} = k_1 \qquad (3.54)$$

Estas expressões são particularmente importantes dado que demonstram que as direções onde a deformação linear é máxima e mínima correspondem às direções das curvas paramétricas *u* e *v*, e são consequentemente ortogonais.

3.4.4. A deformação angular

Representando por α e β os ângulos que os elementos lineares *ds* e ds_1 fazem com as linhas *v*= *const.*, chama-se deformação angular δ à diferença entre os azimutes α e β (Figura 3.4).

$$\delta = \beta - \alpha \qquad (3.55)$$

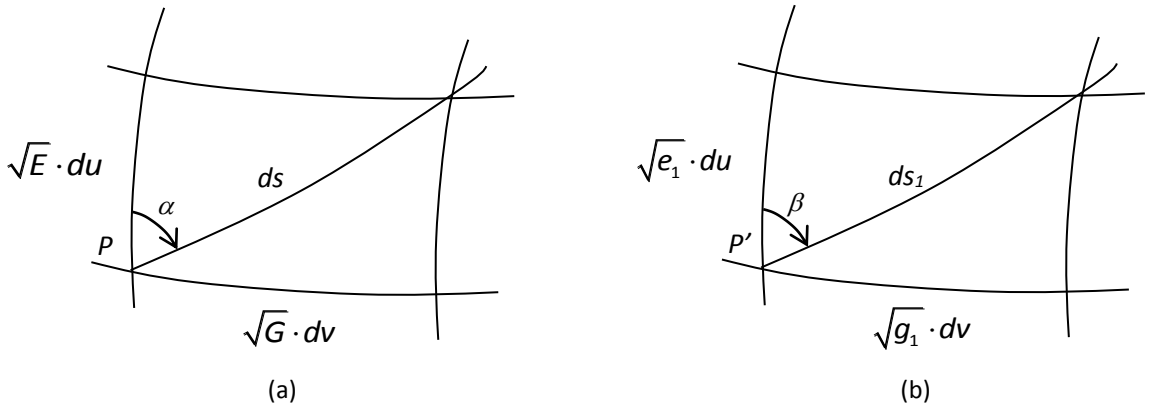


Figura 3.4. O paralelogramo diferencial, (a) *Superfície datum*, (b) *Superfície de projeção*

Considerando as expressões do $sin\alpha$ e do $cos\alpha$ sobre a superfície *datum*, as quais são dadas por (3.51)

$$\sin\alpha = \sqrt{G}\,\frac{dv}{ds} \qquad \cos\alpha = \sqrt{E}\,\frac{du}{ds}$$

e as expressões correspondentes sobre a superfície de projeção

$$\sin\beta = \sqrt{g_1}\,\frac{dv}{ds_1} \qquad \cos\beta = \sqrt{e_1}\,\frac{du}{ds_1}$$

tem-se que

$$tg\alpha = \sqrt{\frac{G}{E}}\,\frac{dv}{du} \qquad tg\beta = \sqrt{\frac{g_1}{e_1}}\,\frac{dv}{du}$$

escrevendo a expressão da $tg\beta$ em função de $tg\alpha$ e considerando as expressões (3.49) e (3.50), obtemos

$$tg\beta = \sqrt{\frac{g_1}{e_1}}\,\frac{dv}{du} = \sqrt{\frac{g_1 E}{e_1 G}}\,tg\alpha = k_1\cdot\frac{1}{k_2}\,tg\alpha = \frac{k_1}{k_2}\,tg\alpha$$

de onde se pode observar que, para $\alpha = \beta$, se tem que $\frac{k_1}{k_2} = 1$ e consequentemente $k_1 = k_2$, como se verifica em todas as *projeções conformes*.

Sendo $\delta = \beta - \alpha$, tem-se que

$$tg\delta = tg\left(\beta - \alpha\right) = \frac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\beta \cdot tg\alpha} = \frac{\left(\frac{k_1}{k_2} tg\alpha\right) - tg\alpha}{1 + \frac{k_1}{k_2} tg^2\alpha} = \left(\frac{k_1}{k_2} - 1\right) \frac{tg\alpha}{1 + \frac{k_1}{k_2} tg^2\alpha} \tag{3.56}$$

de notar que, como seria esperado, para α= 0 e α= 90° a deformação angular é nula ($tg\delta$ = 0 e δ = 0). Para achar o valor do azimute α_m correspondente à deformação angular máxima, anula-se a derivada do segundo membro da expressão (3.56) em ordem a α, obtendo-se

$$\frac{d\left(tg\delta\right)}{d\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad tg\alpha_m = \pm\sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \tag{3.57}$$

substituíndo este valor na expressão da deformação angular, obtem-se a expressão para a deformação angular máxima

$$tg\delta_m = \left(\frac{k_1}{k_2} - 1\right) \frac{\pm\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}}{1 + \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{k_2}{k_1}} = \ldots = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} - \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}\right) \tag{3.58}$$

3.4.5. A deformação linear correspondente à deformação angular máxima

Considerando a expressão (3.52)

$$k^2 = k_2^{\,2} \cos^2\alpha + k_1^{\,2} \sin^2\alpha$$

e a expressão (3.57)

$$tg\alpha_m = \pm\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$$

obtem-se que

$$k_{\alpha_m}^{\;\;2} = k_2^{\,2} \cos^2\alpha + k_1^{\,2} \sin^2\alpha = k_2^{\,2} \frac{k_1}{k_2} \sin^2\alpha_m + k_1^{\,2} \frac{k_2}{k_1} \cos^2\alpha_m = k_1 \cdot k_2 \tag{3.59}$$

pelo que a deformação linear para o azimute α_m correspondente à máxima deformação angular é igual a $\sqrt{k_1 \cdot k_2}$.

3.4.6. A deformação areal

A expressão para a deformação areal *m* deriva-se a partir da expressão (3.18)

$$A_D = \sqrt{EG - F^2}\,dudv$$

combinando-a com as expressões (3.49) e (3.50) e considerando *F*= 0

$$m = \frac{A_P}{A_D} = \frac{\sqrt{e_1 g_1}}{\sqrt{EG}} = k_1 \cdot k_2 \qquad (3.60)$$

Para projeções equivalentes, A_P/A_D= 1 pelo que

$$k_1 \cdot k_2 = 1$$

logo, com base na expressão (3.59) pode concluir-se que nas projeções equivalentes as distâncias na direção da máxima deformação angular são representadas sem deformação, pois $k_{\alpha_m} = \sqrt{k_1 \cdot k_2} = 1$.

3.5. A indicatriz de Tissot

3.5.1. A teoria da indicatriz

A teoria das distorções de Tissot diz que um círculo, sobre uma superfície *datum*, com centro em *P* e raio *ds* pode considerar-se plano dada a sua área infinitamente pequena e que esta área permanece infinitamente pequena e plana na superfície de projeção. De um modo geral, este círculo é projetado sobre a superfície de projeção como uma elipse. Apenas no caso particular de a superfície *datum* ser paralela à superfície de projeção é que este círculo permanece com a sua forma original, embora a uma escala diferente.

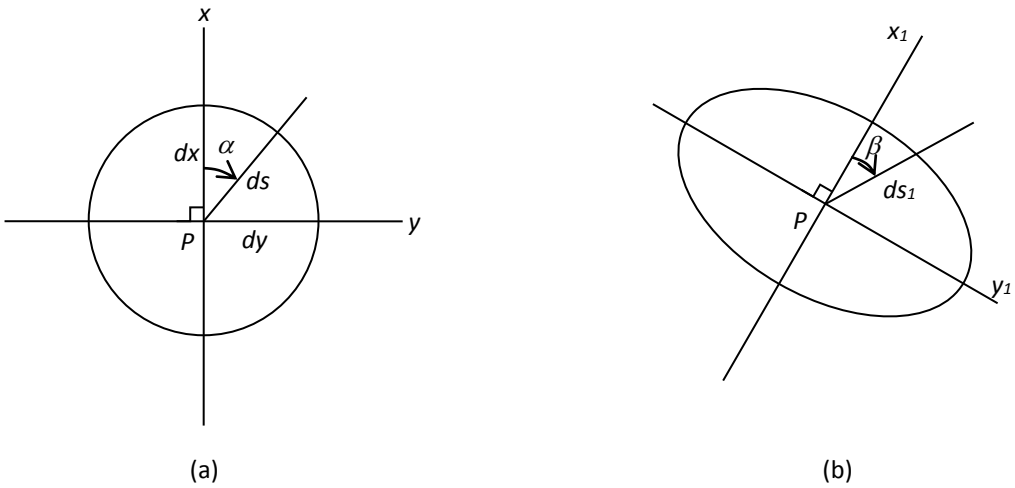


Figura 3.5. A elipse de deformação (elipse de *Tissot*), (a) Superfície datum, (b) Superfície de projeção

Considerando um círculo com centro em *P* num sistema de coordenadas retangulares (*x, y*) e a sua projeção num sistema retangular correspondente (x_1, y_1), os eixos coordenados são então as tangentes aos correspondentes sistemas (*u, v*) em ambas as superfícies. Com base na expressão (3.51) e na Figura 3.5.

$$\sin\alpha = \sqrt{G}\,\frac{dv}{ds} \qquad \cos\alpha = \sqrt{E}\,\frac{du}{ds}$$

$$\begin{cases} dx = ds.\cos\alpha = \sqrt{E}du \\ dy = ds.\sin\alpha = \sqrt{G}dv \end{cases} \qquad (3.61)$$

e correspondentemente

$$\begin{cases} dx_1 = ds_1.\cos\beta = \sqrt{e_1}du \\ dy_1 = ds_1.\sin\beta = \sqrt{g_1}dv \end{cases} \qquad (3.62)$$

Substituíndo

$$\begin{cases} du = \dfrac{1}{\sqrt{E}} \cdot \cos\alpha \cdot ds \\ dv = \dfrac{1}{\sqrt{G}} \cdot \sin\alpha \cdot ds \end{cases}$$

em (3.62), obtem-se

$$\begin{cases} dx_1 = \sqrt{\dfrac{e_1}{E}} \cdot \cos\alpha \cdot ds \\ dy_1 = \sqrt{\dfrac{g_1}{G}} \cdot \sin\alpha \cdot ds \end{cases}$$

recorrendo às expressões (3.49) e (3.50)

$$\begin{cases} dx_1 = k_2 \cdot \cos\alpha \cdot ds \\ dy_1 = k_1 \cdot \sin\alpha \cdot ds \end{cases} \qquad (3.63)$$

colocando $\dfrac{dx_1}{k_2}$ e $\dfrac{dy_1}{k_1}$ ao quadrado e somando estes dois termos, obtem-se

$$\left(\frac{dx_1}{k_2}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{k_1}\right)^2 = cos^2\alpha \cdot ds^2 + sin^2\alpha \cdot ds^2 = ds^2 \qquad (3.64)$$

Esta expressão corresponde à equação de uma elipse com semieixo maior (menor) igual a $k_2.ds$ e semieixo menor (maior) igual a $k_1.ds$. Considerando que ds é igual a 1, a expressão anterior assume a seguinte forma

$$\left(\frac{dx_1}{k_2}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{k_1}\right)^2 = 1 \qquad (3.65)$$

Esta elipse é designada por *indicatriz de Tissot*, dado que indica as caraterísticas da projeção na vizinhança de um dado ponto *P*.

Sabe-se que a área da superfície da Terra que se pode considerar como plana tem um raio de aproximadamente 10 km, podendo até ser maior caso os requisitos de precisão sejam menos exigentes. No interior desta região, pode então escrever-se a equação (3.65) em função das coordenadas (x_1, y_1) de um sistema de coordenadas retangulares omitindo as derivadas

$$\left(\frac{x_1}{k_2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{k_1}\right)^2 = 1 \qquad (3.66)$$

3.5.2. A indicatriz na prática

Foi já demonstrado que um círculo de raio unitário ds= 1 sobre a superfície datum que possa ser substituído por um plano tangencial local, é de uma forma geral projetado como uma elipse, designada por indicatriz. Demonstrou-se também que o semieixo maior e semieixo menor são iguais à deformação linear máxima e mínima, respetivamente. Estes são então calculados utilizando as expressões (3.50) e (3.49), respetivamente:

$$k_2 = \sqrt{\frac{e_1}{E}}$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{g_1}{G}}$$

A máxima distorção angular de um azimute é dada pela expressão (3.58)

$$tg\delta_m = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} - \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}\right)$$

A deformação angular num determinado azimute arbitrário α é calculada com base na expressão (3.52)

$$k_\alpha{}^2 = k_2{}^2\cos^2\alpha + k_1{}^2\sin^2\alpha$$

sendo a deformação linear no azimute correspondente à deformação angular máxima α_m dada pela expressão (3.59)

$$k_{\alpha_m} = \sqrt{k_1 \cdot k_2}$$

A deformação areal é obtida através da expressão (3.60)

$$m = \frac{A_P}{A_D} = k_1 \cdot k_2$$

CHAPTER 4 PROJEÇÕES EQUIVALENTES

4.1. Considerações gerais

4.1.1. Introdução

Uma projeção diz-se *equivalente* se a deformação areal *m* tiver um valor constante em todos os pontos, tem-se então que

$$m = \frac{A_P}{A_D} = \frac{\sqrt{e_1 g_1 - f_1^{\,2}}}{\sqrt{EG - F^2}} = const.$$

Foi anteriormente demonstrado que a combinação da matriz de transformação fundamental com a condição de equivalência conduz à equação (3.25), utilizando um fator de escala igual a 1

$$EG - F^2 = (e_1 \cdot g_1 - f_1^{\,2}) = \begin{vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial u} & \frac{\partial u_1}{\partial v} \\ \frac{\partial v_1}{\partial u} & \frac{\partial v_1}{\partial v} \end{vmatrix}^2$$

No caso das *projeções equivalentes* as áreas não sofrem distorção, a deformação linear varia e os ângulos são deformados. Como anteriormente mencionado, a equivalência e a conformidade não podem ser verificadas completamente em simultâneo. Tal pode ser demonstrado, no caso de uma projeção equivalente, considerando a expressão (3.55)

$$m = k_1 \cdot k_2 = 1$$

para que esta projeção fosse simultaneamente conforme ter-se-ia que verificar, em cada ponto, a seguinte igualdade

$$k_1 = k_2$$

se a deformação linear máxima e mínima forem iguais, e se se designar esse valor por *k*, tem-se que

$$m = k^2 = 1$$

logo, pode concluir-se que esta última expressão não é possível de ser verificada em todos os pontos da superfíce.

4.1.2. A deformação linear

A distorção linear numa direção arbitrária pode ser determinada através da seguinte expressão

$$k^2 = \frac{ds_1^{\,2}}{ds^2} = \frac{e_1 d\phi^2 + 2 f_1 \cdot d\phi d\lambda + g_1 d\lambda^2}{E d\phi^2 + G d\lambda^2} \qquad (4.1)$$

considerando o caso geral de que o sistema ortogonal (ϕ, λ) sobre o elipsóide não é transformado num sistema ortogonal sobre o plano.

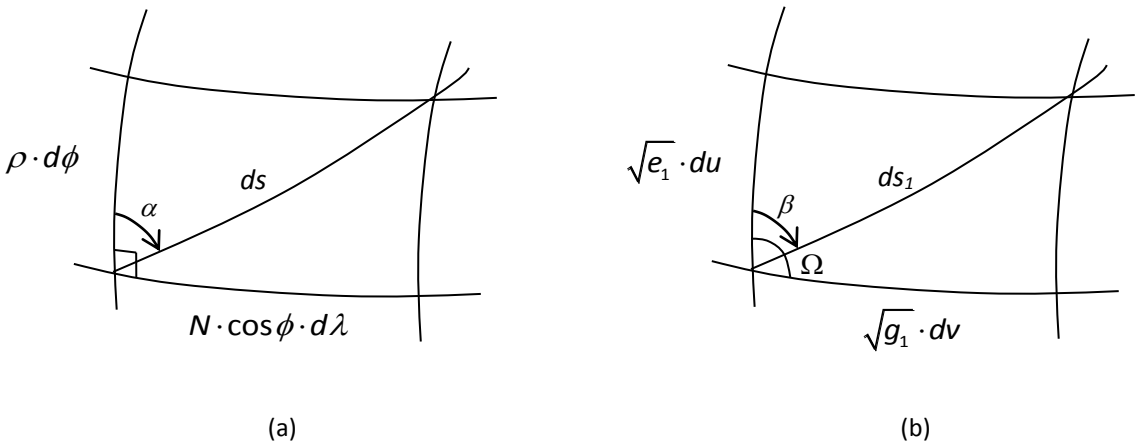


Figura 4.1. O paralelogramo diferencial, (a) *Superfície datum*, (b) *Superfície de projeção*

Considerando a Figura 4.1 e as expressões (3.12) e (3.28), a expressão (4.1) passa a escrever-se da seguinte forma

$$k^2 = \frac{e_1 d\phi^2 + 2\sqrt{e_1 \cdot g_1} \cdot \cos\Omega \cdot d\phi d\lambda + g_1 d\lambda^2}{\rho^2 \cdot d\phi^2 + N^2 \cdot \cos^2\phi \cdot d\lambda^2} \qquad (4.2)$$

com

$$\cos\Omega = \frac{f_1}{\sqrt{e_1 \cdot g_1}} \qquad (4.3)$$

Recorrendo às expressões (3.14), (3.16) e (3.27), obtêm-se as seguintes expressões

$$\tan\alpha = \frac{N \cdot \cos\phi}{\rho} \cdot \frac{d\lambda}{d\phi} \qquad (4.4)$$

$$\tan\beta = \frac{\sqrt{g_1} \cdot \sin\Omega \cdot d\lambda}{\sqrt{e_1} \cdot d\phi + \sqrt{g_1} \cdot \cos\Omega \cdot d\lambda} \qquad (4.5)$$

Substituíndo (4.4) em (4.5), obtem-se

$$\tan\beta = \frac{\rho \cdot \sqrt{g_1} \cdot \tan\alpha \cdot \sin\Omega}{N \cdot \cos\phi \cdot \sqrt{e_1} + \rho \cdot \sqrt{g_1} \cdot \tan\alpha \cdot \cos\Omega} \qquad (4.6)$$

Sendo a *projeção equivalente* e considerando a expressão (3.60) tem-se que

$$\rho \cdot N \cdot \cos\phi = \sqrt{e_1 \cdot g_1 - f_1^{\,2}} \Leftrightarrow$$
$$\rho \cdot N \cdot \cos\phi = \sqrt{e_1 \cdot g_1 - \left(\sqrt{e_1 \cdot g_1} \cdot \cos\Omega\right)^2} \Leftrightarrow$$
$$\rho \cdot N \cdot \cos\phi = \sqrt{e_1 \cdot g_1} \cdot \sin\Omega$$

logo,

$$\sin\Omega = \frac{\rho \cdot N \cdot \cos\phi}{\sqrt{e_1 \cdot g_1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{e_1}{E} \cdot \frac{g_1}{G}}} = \frac{1}{k_2 \cdot k_1} \qquad (4.7)$$

Multiplicando a expressão (4.6) por ρ, a expressão da $\tan\beta$ passa a escrever-se da seguinte forma

$$\tan\beta = \frac{\rho^2 \cdot \sqrt{g_1} \cdot \tan\alpha \cdot \sin\Omega}{\rho \cdot N \cdot \cos\phi \cdot \sqrt{e_1} + \rho^2 \cdot \sqrt{g_1} \cdot \tan\alpha \cdot \cos\Omega} = \frac{\sqrt{g_1} \cdot \sin\Omega \cdot \left(\rho^2 \cdot \tan\alpha\right)}{\sqrt{g_1} \cdot \sin\Omega \cdot \left(e_1 + \rho^2 \cdot \tan\alpha \cdot \cot\Omega\right)} =$$
$$\frac{\rho^2 \cdot \tan\alpha}{\rho^2 \cdot \left(\frac{e_1}{\rho^2} + \tan\alpha \cdot \cot\Omega\right)} = \frac{\tan\alpha}{k_2^{\,2} + \tan\alpha \cdot \cot\Omega} \qquad (4.8)$$

Esta é a expressão geral da transformação de um azimute de um arco sobre o elipsóide no correspondente azimute desse mesmo arco após a projeção.

Numa direção qualquer, contada a partir do eixo k_2, tem-se segundo a expressão (3.52) que

$$k^2 = k_2^{\,2} \cos^2\alpha + k_1^{\,2} \sin^2\alpha$$

A deformação linear numa determinada direção torna-se igual à identidade se

$$k^2 = k_2^{\,2} \cos^2\alpha + k_1^{\,2} \sin^2\alpha = 1 = k_1 \cdot k_2$$

pelo que

$$k_2 \cos^2\alpha = k_1 \sin^2\alpha$$

ou

$$\tan\alpha = \pm\sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \qquad (4.9)$$

que é idêntica à expressão (3.57), a qual devolve o valor do azimute α correspondente à deformação angular máxima.

No caso das projeções equivalentes, com $k_1 \cdot k_2 = 1$, a expressão anterior passa a ser a seguinte

$$\tan\alpha = \pm\sqrt{k_2^{\,2}} = \pm k_2 \qquad (4.10)$$

4.2. Projeções equivalentes do elipsóide sobre o plano

Considerando sobre o elipsóide as coordenadas curvilíneas ϕ e λ (com $u = \phi$ e $v = \lambda$) então os coeficientes superficiais de Gauss são $E = \rho^2$ e $G = r^2$, em que ρ é o raio principal de curvatura na direção do meridiano e r é o raio do paralelo num determinado ponto P sobre o elipsóide. Então o elemento linear sobre S é dado por

$$ds^2 = \rho^2 d\phi^2 + N^2 \cos^2\phi \, d\lambda^2 = \rho^2 d\phi^2 + r^2 d\lambda^2$$

e sobre o plano, o elemento linear em coordenadas cartesianas x e y (com $u_1 = x$ e $v_1 = y$) é dado por

$$ds_1^{\,2} = dx^2 + dy^2$$

Fazendo as respetivas substituições na seguinte expressão

$$m^2 = \frac{e_1 g_1 - f_1^{\,2}}{EG - F^2} \Leftrightarrow m^2 \cdot \left(EG - F^2\right) = e_1 g_1 - f_1^{\,2} \Leftrightarrow$$

$$m^2 \cdot \left(EG - F^2\right) = e_1 g_1 - f_1^{\,2} = \begin{vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial u} & \dfrac{\partial u_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial u} & \dfrac{\partial v_1}{\partial v} \end{vmatrix}^2$$

obtem-se

$$m^2 \cdot \left(EG - F^2\right) = \begin{vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \phi} & \dfrac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \phi} & \dfrac{\partial y}{\partial \lambda} \end{vmatrix}^2 \Leftrightarrow m \cdot \rho \cdot r = \left| \frac{\partial x}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial \phi} \right| \qquad (4.11)$$

Considerando agora sobre o plano as coordenadas polares R e θ (com $u_1 = R$ e $v_1 = \theta$), o elemento linear é dado por

$$ds_1^{\,2} = dR^2 + R^2 \, d\theta^2$$

obtendo-se a seguinte expressão geral das representações equivalentes em coordenadas polares

$$m^2 \cdot \left(EG - F^2\right) = \begin{vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial R}{\partial \phi} & \frac{\partial R}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \phi} & \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \end{vmatrix}^2 \Leftrightarrow m \cdot \rho \cdot r = R \cdot \left| \frac{\partial R}{\partial \phi} . \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} - \frac{\partial R}{\partial \lambda} . \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right| \qquad (4.12)$$

As expressões (4.11) e (4.12) são as expressões gerais das representações equivalentes entre o elipsóide, com um sistema de coordenadas ortogonais (ϕ, λ), e o plano com um sistema de coordenadas cartesianas (x, y) e polares (R, θ), respetivamente.

4.3. A projeção pseudo-cónica equivalente de Bonne

4.3.1. Introdução

A projeção de Bonne é uma projeção cónica, equivalente, normal com uma linha de contato tangente ao paralelo de referência. Nesta projeção apenas o meridiano central de referência é uma linha reta e os meridianos e círculos de paralelo não formam um sistema ortogonal no plano. A deformação linear ao longo do meridiano central e ao longo de todos os paralelos é igual a 1, não sendo preservada a escala ao longo dos restantes meridianos.

O arco de meridiano σ entre o paralelo de latitude ϕ_0 e um paralelo de latitude ϕ (os quais são projetados como círculos concêntricos em torno do vértice do cone) é calculado por

$$\sigma = \int_{\phi_0}^{\phi} \rho \cdot d\phi \qquad (4.13)$$

Como tal os círculos paralelos não são igualmente espaçados, tendo ρ um valor diferente em função da latitude. A distância ao longo de um paralelo à latitude ϕ desde o meridiano central λ_0 até ao meridiano de longitude λ é igual a

$$\left(\lambda - \lambda_0\right) \cdot N \cdot \cos\phi \qquad (4.14)$$

Tal é ilustrado na Figura 4.2, onde a rede paramétrica é desenhada na projeção de Bonne.

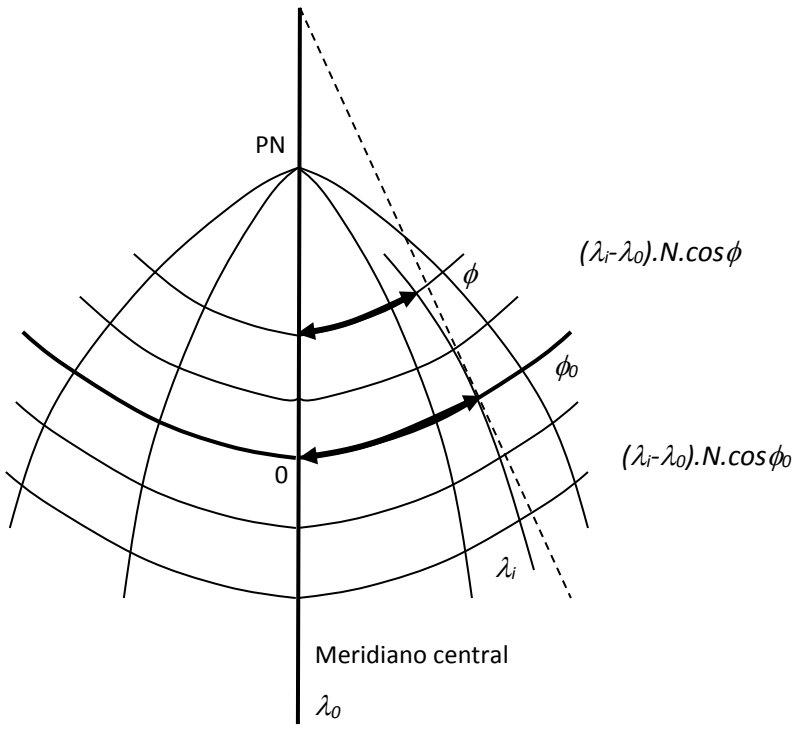


Figura 4.2. A rede paramétrica na projeção de Bonne.

Os eixos principais da indicatriz de Tissot não coincidem com o sistema de curvas paramétricas (ϕ, λ). Tal requer cálculos adicionais com vista à determinação de k_1 e k_2 conforme já mostrado na secção 4.1.2.

Os sistemas cartográficos equivalentes têm como se sabe um interesse geodésico reduzido para mapas de escala média em virtude das grandes deformações lineares e angulares. No entanto, para regiões alongadas na direção Norte-Sul e estreitas na direção Este-Oeste, como é o caso de Portugal continental, a projeção de Bonne tem deformações angulares pequenas, sendo praticamente conforme. De facto, a projeção de Bonne é mesmo rigorosamente conforme sobre o meridiano central e sobre o paralelo central.

4.3.2. A projeção de Bonne.

Comecemos por impor a condição de que os paralelos sejam representados por arcos de circunferência concêntricos, pelo que é conveniente adotar coordenadas polares sobre o plano e fazer com que o raio polar R seja função exclusiva da latitude ϕ

$$R = R(\phi) \qquad (4.15)$$

Impondo esta condição, a equação geral das projeções equivalentes (4.12) reduz-se a

$$m \cdot \rho \cdot r = R \cdot \left| \frac{\partial R}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \right| \qquad (4.16)$$

donde

$$\frac{\partial \theta}{\partial \lambda} = \pm \frac{m \cdot \rho \cdot r}{R \cdot \left| \frac{\partial R}{\partial \phi} \right|} \qquad (4.17)$$

Com a condição imposta as fórmulas de transformação são então

$$\begin{cases} R = R(\phi) \\ \theta = \pm \dfrac{m \cdot \rho \cdot r}{R \cdot \left| \dfrac{\partial R}{\partial \phi} \right|} \cdot \lambda + const. \end{cases} \qquad (4.18)$$

Considerando que esta constante é nula, resulta que para $\lambda = 0$ o valor de $\theta = 0$ e portanto tem-se o meridiano origem das longitudes, o qual se vai tomar como sendo o meridiano central da projeção e que será representado pelo eixo polar (apenas o meridiano central da projeção é ortogonal a todos os círculos paralelos). As fórmulas de transformação (4.18) ficam então

$$\begin{cases} R = R(\phi) \\ \theta = \pm \dfrac{m \cdot \rho \cdot r}{R \cdot \left| \dfrac{\partial R}{\partial \phi} \right|} \cdot \lambda \end{cases} \qquad (4.19)$$

Nestas fórmulas dispomos de dois graus de liberdade, representados pela função arbitrária $R(\phi)$ e pela constante m. Os elementos lineares sobre o elipsóide e sobre o plano são respetivamente

$$ds^2 = \rho^2 d\phi^2 + r^2 d\lambda^2$$
$$ds_1^{\,2} = dR^2 + R^2 d\theta^2$$

Introduzindo, provisoriamente, a quantidade $F(\phi)$

$$F(\phi) = \frac{\rho \cdot r}{R \cdot \left| \frac{\partial R}{\partial \phi} \right|} \qquad (4.20)$$

as fórmulas (4.19) passam a ter a seguinte forma

$$\begin{cases} R = R(\phi) \\ \theta = \pm m \cdot \lambda \cdot F(\phi) \end{cases} \qquad (4.21)$$

Para calcular ds_1^2 é necessário determinar dR e $d\theta$

$$\begin{cases} dR = \dfrac{\partial R}{\partial \phi} \cdot d\phi \\ d\theta = \dfrac{\partial \theta}{\partial \phi} \cdot d\phi + \dfrac{\partial \theta}{\partial \lambda} \cdot d\lambda = m \cdot \lambda \cdot \dfrac{dF}{d\phi} \cdot d\phi + m \cdot F(\phi) \cdot d\lambda = \\ \qquad = m \cdot \left(\lambda \cdot \dfrac{dF}{d\phi} \cdot d\phi + F(\phi) \cdot d\lambda \right) \end{cases} \tag{4.22}$$

O elemento linear ds_1^2 será então dado por

$$ds_1^{\ 2} = \left(\frac{\partial R}{\partial \phi} \right)^2 \cdot d\phi^2 + R^2 \cdot m^2 . \left(\lambda \cdot \frac{dF}{d\phi} \cdot d\phi + F(\phi) \cdot d\lambda \right)^2 \tag{4.23}$$

A deformação linear sobre o meridiano central (λ= 0) e na direção do meridiano central ($d\lambda$= 0) será então dado por

$$k = \frac{ds_1}{ds} = \frac{\left| \dfrac{\partial R}{\partial \phi} \right| \cdot d\phi}{\rho \cdot d\phi} = \frac{\left| \dfrac{\partial R}{\partial \phi} \right|}{\rho} \tag{4.24}$$

Impondo que esta deformação seja a mesma em todos os pontos do meridiano central, resulta que

$$k = \frac{\left| \dfrac{\partial R}{\partial \phi} \right|}{\rho} = const. > 0$$

donde se obtem, integrando esta expressão, que

$$R = \pm k \cdot \int \rho \cdot d\phi + const. \tag{4.25}$$

correspondendo o sinal positivo ao caso de R crescer com ϕ e o sinal negativo ao caso de R decrescer com ϕ (Figura 4.3).

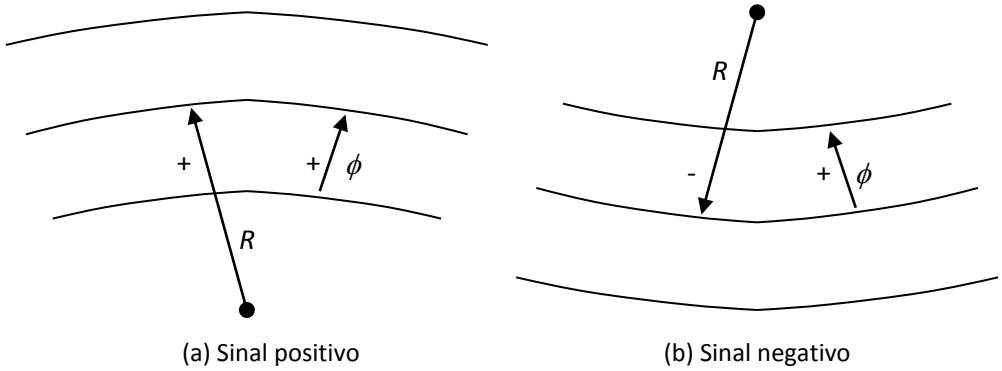


Figura 4.3. Sinal a atribuir ao raio polar *R* consoante no caso de o seu valor crescer com a latitude (a) e no caso de o seu valor decrescer com a latitude (b).

Se representarmos por ϕ_0 a latitude do paralelo central da projeção e por R_0 o raio do arco de circunferência correspondente, então a expressão (4.25) passa a escrever-se da seguinte forma

$$R_0 = \pm k \cdot \left| \int \rho \cdot d\phi \right|_{\phi=\phi_0} + const. \qquad (4.26)$$

sendo *const.* uma constante qualquer, esta pode ser eliminada conjugando as expressões (4.25) e (4.26), obtendo-se

$$R = R_0 \pm k \cdot \int_{\phi_0}^{\phi} \rho \cdot d\phi \qquad (4.27)$$

Note-se que o integral $\int_{\phi_0}^{\phi} \rho \cdot d\phi$ representa o arco de meridiano σ (Figura 4.4) entre o paralelo de latitude ϕ_0 e um paralelo de latitude ϕ expresso na equação (4.13).

No caso de uma projeção de uma zona no hemisfério Norte, deverá ser adotado o sinal negativo para que o valor de *R* cresça do polo Norte para o ponto e a ϕ cresça do equador para o polo Norte (ou seja, que as duas coordenadas tenham sentidos contrários de crescimento).

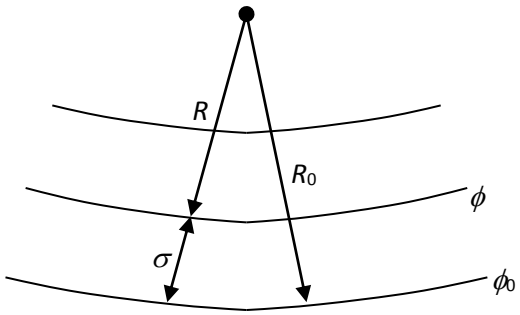


Figura 4.4. Relação entre o raio vetor (R) de um dado paralelo e o raio vetor do paralelo de referência (R_0).

Neste caso, a expressão (4.27) assume o seguinte aspeto

$$R = R_0 - k \cdot \int_{\phi_0}^{\phi} \rho \cdot d\phi \qquad (4.28)$$

Numa tentativa de fazer com que o sistema seja conforme no meridiano central e na direção dos paralelos vamos impor que a deformação linear no meridiano central (λ= 0) e na direção dos paralelos ($d\phi$= 0) seja igual , obtendo-se deste modo os seguintes elementos lineares sobre o elipsóide e sobre o plano, respetivamente

$$ds^2 = r^2 d\lambda^2$$
$$ds_1{}^2 = R^2 \cdot m^2 \cdot F^2(\phi) \cdot d\lambda^2$$

logo, a deformação linear é igual a

$$k = \frac{ds_1}{ds} = \frac{R \cdot m \cdot F(\phi) \cdot d\lambda}{r \cdot d\lambda} = \frac{R \cdot m \cdot F(\phi)}{r}$$

Substituíndo $F(\phi)$ pela sua expressão em (4.20), obtem-se

$$k = \frac{R \cdot m \cdot F(\phi)}{r} = \frac{R \cdot m \cdot \dfrac{\rho \cdot r}{R \cdot \left|\dfrac{\partial R}{\partial \phi}\right|}}{r} = \frac{m \cdot \rho}{\left|\dfrac{\partial R}{\partial \phi}\right|}$$

tendo em consideração a expressão (4.24), a expressão anterior passa a ter a seguinte forma

$$k = \frac{m \cdot \rho}{\left|\frac{\partial R}{\partial \phi}\right|} = \frac{m}{k} \Leftrightarrow k = \sqrt{m} \qquad (4.29)$$

Introduzindo estes novos elementos, as fórmulas de transformação (4.19) passam a escrever-se da seguinte maneira

$$\begin{cases} R = R_0 - k \cdot \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho \cdot d\phi \\ \theta = \pm \frac{\sqrt{m} \cdot r}{R} \cdot \lambda \end{cases} \qquad (4.30)$$

Na expressão do θ poderia ter sido omitido o sinal, bastando escolher o sentido crescente de θ de acordo com o sentido de crescimento de λ para que a carta não fique invertida.

A última etapa consiste em impor que a deformação linear seja tanto quanto possível constante, ou seja, que a projeção seja tanto quanto possível conforme. Vai-se então impor como condição que a deformação linear k respeitante aos elementos lineares sobre o paralelo central (ϕ=ϕ_0) e sobre o meridiano central ($d\lambda$= 0) seja igual a $\sqrt{m}$. Deste modo, sobre o elipsóide tem-se a seguinte expressão para o elemento linear

$$ds^2 = \rho_0{}^2 d\phi^2$$

e sobre o plano tem-se que

$$ds_1{}^2 = dR^2 + R_0{}^2 \cdot d\theta^2 \qquad (4.31)$$

como, a partir da primeira expressão em (4.22), se sabe que

$$dR = \frac{\partial R}{\partial \phi} \cdot d\phi$$

pode obter-se uma nova expressão para dR com base nas expressões (4.24) e (4.29)

$$dR = k \cdot \rho_0 \cdot d\phi = \sqrt{m} \cdot \rho_0 \cdot d\phi \Leftrightarrow$$
$$dR^2 = m \cdot \rho_0{}^2 \cdot d\phi^2$$

Relativamente a $d\theta$, e considerando novamente as expressões em (4.22), tem-se que

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \cdot d\phi$$

derivando a expressão de θ nas equações (4.30)

$$d\theta = \left(-\frac{\sqrt{m}\cdot\lambda}{R_0}\cdot\frac{\partial r_0}{\partial\phi} - \frac{\sqrt{m}\cdot\lambda\cdot r_0}{R_0^{\ 2}}\cdot\frac{\partial R}{\partial\phi} \right)\cdot d\phi = \left(\frac{\sqrt{m}\cdot\lambda\cdot\sin\phi_0\cdot\rho_0}{R_0} - \frac{m\cdot\lambda\cdot r_0\cdot\rho_0}{R_0^{\ 2}} \right)\cdot d\phi$$

Substituíndo dR e $d\theta$ na expressão (4.31), o elemento linear sobre o plano é

$$ds_1^{\ 2} = m\cdot\rho_0^{\ 2}\cdot d\phi^2 + R_0^{\ 2}\cdot\left(\frac{\sqrt{m}\cdot\lambda\cdot\sin\phi_0\cdot\rho_0}{R_0} - \frac{m\cdot\lambda\cdot r_0\cdot\rho_0}{R_0^{\ 2}} \right)^2\cdot d\phi^2$$

e consequentemente, a deformação linear será então dada por

$$k^2 = \frac{ds_1^{\ 2}}{ds^2} = \frac{m\cdot\rho_0^{\ 2}\cdot d\phi^2 + R_0^{\ 2}\cdot\left(\frac{\sqrt{m}\cdot\lambda\cdot\sin\phi_0\cdot\rho_0}{R_0} - \frac{m\cdot\lambda\cdot r_0\cdot\rho_0}{R_0^{\ 2}} \right)^2\cdot d\phi^2}{\rho_0^{\ 2} d\varphi^2} =$$

$$= m + R_0^{\ 2}\cdot\lambda^2\cdot\left(\frac{\sqrt{m}\cdot\sin\phi_0}{R_0} - \frac{m\cdot r_0}{R_0^{\ 2}} \right)^2 = m$$

Para que esta igualdade seja verificada para qualquer valor de λ, tem que se verificar a seguinte condição

$$R_0^{\ 2}\cdot\lambda^2\cdot\left(\frac{\sqrt{m}\cdot\sin\phi_0}{R_0} - \frac{m\cdot r_0}{R_0^{\ 2}} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$R_0 = \frac{m\cdot r_0}{\sqrt{m}\cdot\sin\phi_0} = \frac{\sqrt{m}\cdot N_0\cdot\cos\phi_0}{\sin\phi_0} = \sqrt{m}\cdot N_0\cdot\cot\phi_0$$

Logo, as fórmulas de transformação finais são as seguintes

$$\begin{cases} R = R_0 - \sqrt{m}\cdot\int_{\varphi_0}^{\varphi}\rho\cdot d\phi \\ R_0 = \sqrt{m}\cdot N_0\cdot\cot\phi_0 \\ \theta = \pm\frac{\sqrt{m}\cdot r}{R}\cdot\lambda \end{cases} \qquad (4.32)$$

Estas são as fórmulas da projeção de Bonne. Fazendo m= 1, como é o caso da cartografia portuguesa continental, obtem-se

$$\begin{cases} R = R_0 - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho \cdot d\phi = R_0 - \sigma \\ R_0 = N_0 \cdot \cot\phi_0 \\ \theta = \pm \dfrac{r \cdot \lambda}{R} \end{cases} \qquad (4.33)$$

4.3.2. Interpretação geométrica da projeção de Bonne

Trace-se uma reta representativa do meridiano central e escolha-se um ponto O para centro dos arcos de circunferência representativos do paralelo. Trace-se um arco de raio R_0 (Figura 4.5).

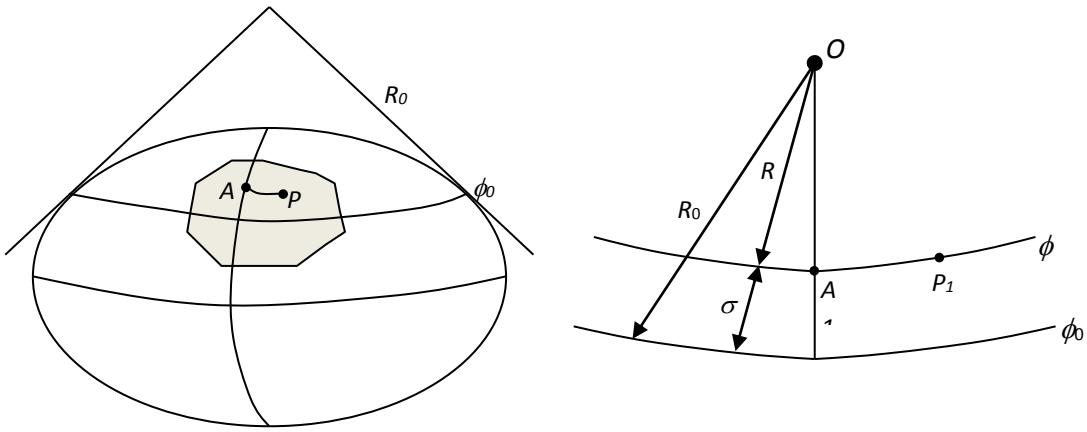


Figura 4.5. Projeção equivalente de Bonne.

$$R_0 = N_0 \cdot \cot\phi_0$$

Desta forma temos representado o paralelo central. Note-se que R_0 é o lado do cone circunscrito ao elipsóide e tangente ao longo do paralelo central de latitude ϕ_0.

Para representar um ponto genérico P, trace-se o arco de circunferência de raio R

$$R = R_0 - \sigma$$

sendo σ o arco de meridiano entre as latitudes ϕ_0 e ϕ. O arco traçado é a imagem do paralelo que passa por P. Marcando sobre ele um comprimento A_1P_1 igual ao correspondente AP sobre o elipsóide, fica assim definido o mecanismo geométrico da correspondência.

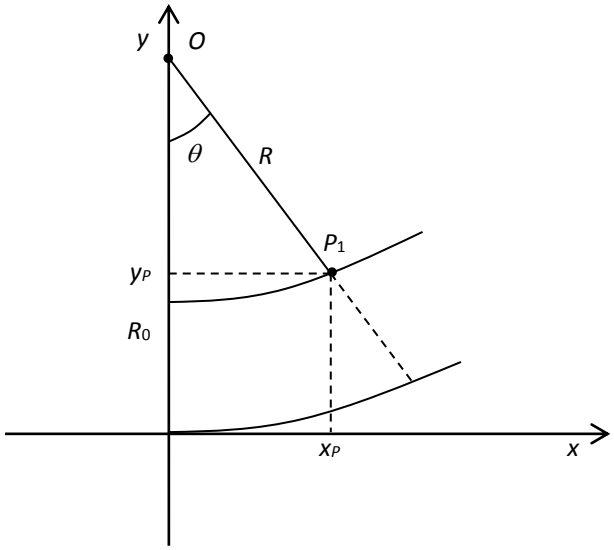


Figura 4.6. Sistema de coordenadas polares na projeção de Bonne.

As coordenadas cartesianas retangulares são então dadas pelas expressões

$$\begin{cases} x_{P_1} = R \cdot \sin\theta = \left(R_0 - \sigma\right) \cdot \sin\theta \\ y_{P_1} = R_0 - R \cdot \cos\theta = R_0 - \left(R_0 - \sigma\right) \cdot \cos\theta \end{cases} \tag{4.34}$$

em que

$$R_0 = N_0 \cdot \cot\phi_0$$
$$R = R_0 - \sigma$$
$$\theta = \frac{r \cdot \lambda}{R}$$

A transformação direta fica resolvida pelas expressões anteriores. Para a transformação inversa têm-se as seguintes expressões

$$\begin{cases} \theta = \arctan\left(\dfrac{x_{P_1}}{R_0 - y_{P_1}}\right) \\ R = \dfrac{R_0 - y_{P_1}}{\cos\theta} = \dfrac{x_{P_1}}{\sin\theta} \end{cases} \tag{4.35}$$

em que

$$R_0 = N_0 \cdot \cot \phi_0$$
$$\sigma = R_0 - R$$
$$\lambda = \frac{R \cdot \theta}{r}$$

CHAPTER 5 PROJEÇÕES CONFORMES OU ISOGÓNICAS

5.1. Considerações gerais

5.1.1. Introdução

Uma projeção diz-se conforme ou isogónica se a deformação linear k for independente do azimute, isto é, o seu valor terá de ser o mesmo em todas as direções. Foi anteriormente demonstrado que a combinação da matriz de transformação fundamental com a condição de conformidade conduz à equação (3.24).

$$k^2 = \frac{e_1}{E} = \frac{f_1}{F} = \frac{g_1}{G}$$

Assumindo dois sistemas ortogonais correspondentes ($F_1 = F = f_1 = 0$)

$$k^2 = \frac{e_1}{E} = \frac{g_1}{G} \qquad (5.1)$$

pelo que, neste caso, as expressões (3.20) passam a ser

$$\begin{cases} e_1 = \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 \cdot E_1 + \left(\dfrac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2 \cdot G_1 \\ f_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial u}\dfrac{\partial u_1}{\partial v} \cdot E_1 + \dfrac{\partial v_1}{\partial u}\dfrac{\partial v_1}{\partial v} \cdot G_1 = 0 \\ g_1 = \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 \cdot E_1 + \left(\dfrac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2 \cdot G_1 \end{cases} \qquad (5.2)$$

combinando (5.1) e (5.2) obtêm-se as seguintes condições de conformidade

$$\begin{cases} e_1 = \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 \cdot E_1 + \left(\dfrac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2 \cdot G_1 = E \cdot k^2 \\ f_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial u}\dfrac{\partial u_1}{\partial v} \cdot E_1 + \dfrac{\partial v_1}{\partial u}\dfrac{\partial v_1}{\partial v} \cdot G_1 = 0 \\ g_1 = \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 \cdot E_1 + \left(\dfrac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2 \cdot G_1 = G \cdot k^2 \end{cases} \qquad (5.3)$$

Para que a deformação linear k seja independente do azimute, a derivada de k em ordem a α tem de ser nula. Sendo a deformação linear dada pela expressão (3.43) na secção 3.4.1

$$k^2 = e \cdot \cos^2\alpha + 2f \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha + g \cdot \sin^2\alpha$$

tem-se então que

$$\frac{d}{d\alpha}\left(k^2\right)=\left(g-e\right)\cdot\sin 2\alpha+2f\cdot\cos 2\alpha=0$$

logo

$$\tan 2\alpha=\frac{2f}{\left(e-g\right)} \qquad (5.4)$$

Devendo esta equação ser verificada para qualquer valor de α, verifica-se, em particular, que para α= 0 e α= 45°, o valor da expressão (5.4) é igual a

$$\alpha=0\Rightarrow\tan 2\alpha=0\Rightarrow f=0$$

$$\alpha=45^\circ\Rightarrow\tan 2\alpha=+\infty\Rightarrow e-g=0\Leftrightarrow e=g$$

Assim, para uma representação conforme a expressão (3.43) passa a escrever-se da seguinte forma

$$k^2=e\cdot\cos^2\alpha+e\cdot\sin^2\alpha=e \qquad (5.5)$$

A indicatriz da deformação linear será então uma circunferência; sendo k_1= k_2 a expressão da deformação angular (3.56) reduz-se a

$$tg\delta=\left(\frac{k_1}{k_2}-1\right)\frac{tg\alpha}{1+\frac{k_1}{k_2}tg^2\alpha}=0 \qquad (5.6)$$

ou seja, a deformação angular é nula para todos os azimutes. Sendo assim, o ângulo entre dois elementos não é alterado pela representação.

5.1.2. Sistemas de coordenadas isométricas. A deformação linear

As unidades de medida ao longo dos eixos coordenados (u, v) podem tornar-se iguais conforme demonstrado na secção 3.3.2. Considerando as expressões do elemento linear sobre o elipsóide

$$ds^2=E\cdot du^2+G\cdot dv^2$$

e sobre o plano

$$ds_1{}^2=E_1\cdot du_1{}^2+G_1\cdot dv_1{}^2$$

tem-se que

$$ds^2=G\cdot\left(d\overline{u}^2+d\overline{v}^2\right)$$

com

$$\begin{cases} d\bar{u} = \sqrt{\dfrac{E}{G}}du \Leftrightarrow du = \sqrt{\dfrac{G}{E}}d\bar{u} \\ d\bar{v} = dv \end{cases} \qquad (5.7)$$

e também que

$$ds_1{}^2 = G_1 \cdot \left(d\bar{u}_1{}^2 + d\bar{v}_1{}^2 \right)$$

com

$$\begin{cases} d\bar{u}_1 = \sqrt{\dfrac{E_1}{G_1}}du_1 \Leftrightarrow du_1 = \sqrt{\dfrac{G_1}{E_1}}d\bar{u}_1 \\ d\bar{v}_1 = dv_1 \end{cases} \qquad (5.8)$$

substituíndo (5.7) e (5.8) em (5.3)

$$\begin{cases} e_1 = \left(\dfrac{\sqrt{\dfrac{G_1}{E_1}}d\bar{u}_1}{\sqrt{\dfrac{G}{E}}d\bar{u}} \right)^2 \cdot E_1 + \left(\dfrac{\partial \bar{v}_1}{\sqrt{\dfrac{G}{E}}d\bar{u}} \right)^2 \cdot G_1 = E \cdot k^2 \\ f_1 = \dfrac{\sqrt{\dfrac{G_1}{E_1}}d\bar{u}_1}{\sqrt{\dfrac{G}{E}}d\bar{u}} \cdot \dfrac{\sqrt{\dfrac{G_1}{E_1}}d\bar{u}_1}{\partial \bar{v}} \cdot E_1 + \dfrac{\partial \bar{v}_1}{\sqrt{\dfrac{G}{E}}d\bar{u}} \cdot \dfrac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{v}} \cdot G_1 = 0 \\ g_1 = \left(\dfrac{\sqrt{\dfrac{G_1}{E_1}}d\bar{u}_1}{\partial \bar{v}} \right)^2 \cdot E_1 + \left(\dfrac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{v}} \right)^2 \cdot G_1 = G \cdot k^2 \end{cases}$$

obtem-se, após algumas transformações da primeira e da terceira equação, que

$$\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{u}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{u}} \right)^2 = \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{v}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{v}} \right)^2 \qquad (5.9)$$

e, da segunda equação, que

$$\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{u}} \right) \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{v}} \right) = -\left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{u}} \right) \cdot \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{v}} \right) \qquad (5.10)$$

reescrevendo esta expressão da seguinte forma

$$\frac{\left(\frac{\partial \overline{u}_1}{\partial \overline{u}}\right)}{\left(\frac{\partial \overline{v}_1}{\partial \overline{u}}\right)} = -\frac{\left(\frac{\partial \overline{v}_1}{\partial \overline{v}}\right)}{\left(\frac{\partial \overline{u}_1}{\partial \overline{v}}\right)} = \eta$$

representando por η o valor comum das duas frações. Separando as duas frações desta expressão, resulta que

$$\frac{\partial \overline{u}_1}{\partial \overline{u}} = \eta \cdot \frac{\partial \overline{v}_1}{\partial \overline{u}} \qquad \frac{\partial \overline{v}_1}{\partial \overline{v}} = -\eta \cdot \frac{\partial \overline{u}_1}{\partial \overline{v}}$$

substituíndo estas expressões em (5.9), tem-se que

$$\frac{\partial \overline{v}_1}{\partial \overline{u}} = \pm \frac{\partial \overline{u}_1}{\partial \overline{v}} \qquad (5.11)$$

e substituíndo (5.11) em (5.10), obtem-se a seguinte igualdade

$$\frac{\partial \overline{u}_1}{\partial \overline{u}} = \pm \frac{\partial \overline{v}_1}{\partial \overline{v}} \qquad (5.12)$$

as equações (5.11) e (5.12) constituem as condições de conformidade.

Existindo parâmetros isométricos tanto na superfície *datum* como na superfície de projeção, então a projeção

$$\begin{cases} \overline{u}_1 = q_1\left(\overline{u}, \overline{v}\right) \\ \overline{v}_1 = q_2\left(\overline{u}, \overline{v}\right) \end{cases} \qquad (5.13)$$

é conforme se forem verificadas as equações (5.11) e (5.12).

As equações (5.11) e (5.12) contêm as condições de Cauchy-Riemann que definem a condição necessária e suficiente para que uma qualquer função seja analítica, sendo por isso designadas por equações de Cauchy-Riemann. Deste modo, as derivadas parciais em (5.11) e (5.12) podem ser consideradas como as derivadas parciais da parte real e imaginária da equação

$$\overline{u}_1 + i \cdot \overline{v}_1 = q\left(\overline{u} + i \cdot \overline{v}\right) \qquad (5.14)$$

sendo $q_1\left(\overline{u}, \overline{v}\right)$ e $q_2\left(\overline{u}, \overline{v}\right)$ a parte real e imaginária da expressão (5.13), respetivamente. A expressão (5.14) é designada por expressão geral das representações conformes. O termo da direita da expressão (5.14) pode ser expandido numa série de potências, obtendo-se

$$\overline{u}_1 + i \cdot \overline{v}_1 = \left(\overline{u} + i \cdot \overline{v}\right) + (A + i \cdot B) \cdot \left(\overline{u} + i \cdot \overline{v}\right)^2 + (C + i \cdot D) \cdot \left(\overline{u} + i \cdot \overline{v}\right)^3 + \ldots \qquad (5.15)$$

A escolha desta expansão pressupõe que

(1) as origens em ambos os sistemas sejam pontos correspondentes;

(2) a deformação linear k nas origens seja igual a 1 (k_0= 1), e;

(3) ambos os sistemas tenham a mesma orientação.

Separando a parte real da imaginária em (5.15), resulta que

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = \bar{u} + A \cdot \left(\bar{u}^2 - \bar{v}^2\right) - 2 \cdot B \cdot \bar{u} \cdot \bar{v} + C \cdot \left(\bar{u}^3 - 3 \cdot \bar{u} \cdot \bar{v}^2\right) + D \cdot \left(-3 \cdot \bar{u}^2 \cdot \bar{v} + \bar{v}^3\right) + \ldots \\ \bar{v}_1 = \bar{v} + 2 \cdot A \cdot \bar{u} \cdot \bar{v} + B \cdot \left(\bar{u}^2 - \bar{v}^2\right) + C \cdot \left(3 \cdot \bar{u}^2 \cdot \bar{v} - \bar{v}^3\right) + D \cdot \left(\bar{u}^3 - 3 \cdot \bar{u} \cdot \bar{v}^2\right) + \ldots \end{cases} \tag{5.16}$$

Os elementos lineares sobre a superfície *datum* e sobre a superfície de projeção podem ser escritos, respetivamente, em termos de parâmetros isométricos

$$ds^2 = G \cdot \left(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2\right)$$

e

$$ds_1^{\,2} = G_1 \cdot \left(d\bar{u}_1^{\,2} + d\bar{v}_1^{\,2}\right)$$

A deformação linear, em termos de coordenadas isométricas, é então

$$k^2 = \frac{G_1 \cdot \left(d\bar{u}_1^{\,2} + d\bar{v}_1^{\,2}\right)}{G \cdot \left(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2\right)} \tag{5.17}$$

sendo

$$\begin{cases} d\bar{u}_1 = \dfrac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{u}} \cdot d\bar{u} + \dfrac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{v}} \cdot d\bar{v} \\ d\bar{v}_1 = \dfrac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{u}} \cdot d\bar{u} + \dfrac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{v}} \cdot d\bar{v} \end{cases}$$

obtem-se, considerando as igualdades em (5.9) e (5.10), que

$$d\bar{u}_1^{\,2} + d\bar{v}_1^{\,2} = \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{u}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{u}}\right)^2\right] \cdot \left(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2\right) = \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{v}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{v}}\right)^2\right] \cdot \left(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2\right)$$

substituíndo em (5.17), resulta que

$$k^2 = \frac{G_1}{G} \cdot \left[\left(\frac{\partial \overline{u}_1}{\partial \overline{u}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{v}_1}{\partial \overline{u}} \right)^2 \right] = \frac{G_1}{G} \cdot \left[\left(\frac{\partial \overline{u}_1}{\partial \overline{v}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{v}_1}{\partial \overline{v}} \right)^2 \right] \qquad (5.18)$$

Derivando as expressões (5.11) e (5.12), obtêm-se as seguintes relações

$$\frac{\partial^2 \overline{u}_1}{\partial \overline{u}^2} + \frac{\partial^2 \overline{v}_1}{\partial \overline{v}^2} = \frac{\partial^2 \overline{v}_1}{\partial \overline{u}^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}_1}{\partial \overline{v}^2} = 0 \qquad (5.19)$$

as quais constituem as equações de Laplace para $\overline{u}_1$ e $\overline{v}_1$ com respeito aos parâmetros independentes $\overline{u}$ e $\overline{v}$.

5.2. Projeção de Gauss

5.2.1. Introdução

A projeção de Gauss, também designada por tranversa de Mercator, é uma projeção conforme, cilíndrica e transversa que se presta à representação de zonas alongadas na direção N-S e estreitas na direção E-W (Figura 5.1). Sendo uma projeção conforme, esta mantem a forma dos elementos infinitamente pequenos e consequentemente os ângulos (direções), no entanto esta mantem também os comprimentos ao longo do meridiano central da projeção.

A projeção de Gauss difere da de Mercator no que diz respeito à posição da superfície de projeção relativamente à superfície *datum*, sendo que nesta última o cilindro fica numa posição normal à superfície *datum*. Deste modo, a projeção de Mercator presta-se à representação de zonas alongadas na direção E-W e mantem os comprimentos ao longo do equador.

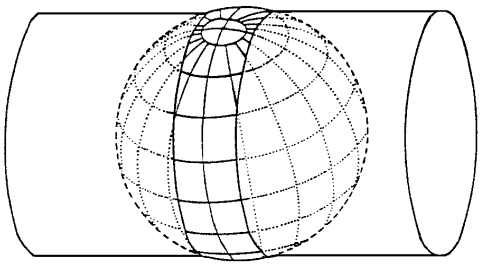


Figura 5.1. Projeção transversa de mercator.

5.2.2. Fórmulas de transformação direta

Na projeção de Gauss a linha de tangência do cilindro assume uma posição transversa relativamente ao equador, sendo a linha transversa o meridiano central da zona a representar. Impondo a condição de conformidade (5.14) e designando q por f, sendo f uma função analítica qualquer, tem-se que

$$y + i \cdot x = f\left(\Phi + i \cdot \lambda\right) \qquad (5.20)$$

para $\lambda = 0$ é evidente que

$$x = 0$$
$$y = f\left(\Phi\right)$$

o eixo oy representa o meridiano origem das longitudes que deverá ser, naturalmente, o meridiano central da zona.

Seja $d\sigma$ um elemento do meridiano central então temos que $d\lambda = 0$ e que

$$d\sigma = \rho \cdot d\phi = r \cdot d\Phi \qquad (5.21)$$

resultando esta igualdade da definição de Φ. Este elemento será representado na carta por

$$d\sigma_1 = dy = \frac{df}{d\Phi} d\Phi \qquad (5.22)$$

Querendo que sobre o meridiano central não haja deformação linear, então o valor de k tem de ser igual a 1

$$k = \frac{d\sigma_1}{d\sigma} = \frac{dy}{d\sigma} = \frac{\frac{df}{d\Phi}}{r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{df}{d\Phi} = 1$$

donde se obtem que

$$\frac{df}{d\Phi} = r \qquad (5.23)$$

e então nesse caso a função f é dada por

$$f\left(\Phi\right) = \int_0^{\Phi} r \cdot d\Phi = \int_0^{\phi} \rho \cdot d\phi \qquad (5.24)$$

Desenvolvendo a expressão (5.20) em série de Mac-Laurin e separando a parte real da imaginária, tem-se que

$$y = f(\Phi) - \frac{\lambda^2}{2!}\cdot\left(\frac{d^2 f}{d\Phi^2}\right)_{\lambda=0} + \frac{\lambda^4}{4!}\cdot\left(\frac{d^4 f}{d\Phi^4}\right)_{\lambda=0} - \frac{\lambda^6}{6!}\cdot\left(\frac{d^6 f}{d\Phi^6}\right)_{\lambda=0} + \cdots$$

$$x = \lambda\cdot\left(\frac{df}{d\Phi}\right)_{\lambda=0} - \frac{\lambda^3}{3!}\cdot\left(\frac{d^3 f}{d\Phi^3}\right)_{\lambda=0} + \frac{\lambda^5}{5!}\cdot\left(\frac{d^5 f}{d\Phi^5}\right)_{\lambda=0} - \frac{\lambda^7}{7!}\cdot\left(\frac{d^7 f}{d\Phi^7}\right)_{\lambda=0} + \cdots \tag{5.25}$$

As derivadas da função f em ordem a Φ são calculadas a partir da expressão (5.24), obtendo-se as seguintes expressões

$$f(\Phi) = \int_0^{\phi} \rho\cdot d\phi = \int_0^{\phi} d\sigma = \sigma$$

$$\frac{df}{d\Phi} = r = N\cdot\cos\phi$$

$$\frac{d^2 f}{d\Phi^2} = \frac{dr}{d\Phi} = \frac{dr}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{d\phi}\cdot\frac{d\phi}{d\Phi} = -\sin\phi\cdot\rho\cdot\frac{r}{\rho} = -r\cdot\sin\phi = -N.\cos\phi.\sin\phi$$

$$\frac{d^3 f}{d\Phi^3} = \frac{d}{d\Phi}\left(-r\cdot\sin\phi\right) = -\frac{dr}{d\Phi}.\sin\phi - r\cdot\cos\phi.\frac{d\phi}{d\Phi} = -r\cdot\sin^2\phi - r\cdot\cos\phi\cdot\frac{r}{\rho} =$$
$$= -N\cdot\cos^3\phi\cdot\left[\frac{N}{\rho} - \tan^2\phi\right] = -N\cdot\cos^3\phi\cdot k_1$$

e de modo análogo para os restantes termos de ordem superior

$$\frac{d^4 f}{d\Phi^4} = N\cdot\sin\phi\cdot\cos^3\phi\cdot\left[\frac{N}{\rho} + 4\cdot\frac{N^2}{\rho^2} - \tan^2\phi\right] = N\cdot\sin\phi\cdot\cos^3\phi\cdot k_2$$

$$\frac{d^5 f}{d\Phi^5} = N\cdot\cos^5\phi\cdot\left[4\cdot\frac{N^3}{\rho^3}\cdot(1-6\cdot tg^2\phi) + \frac{N^2}{\rho^2}\cdot(1+8\cdot tg^2\phi) - 2\cdot\frac{N}{\rho}\cdot tg^2\phi + tg^4\phi\right] = N\cdot\cos^5\phi\cdot k_3$$

$$\frac{d^6 f}{d\Phi^6} = N\cdot\sin\phi\cdot\cos^5\phi\cdot\left[8\cdot\frac{N^4}{\rho^4}\cdot(11-24\cdot tg^2\phi) - 28\cdot\frac{N^3}{\rho^3}\cdot(1-6\cdot tg^2\phi) + \right.$$
$$\left. + \frac{N^2}{\rho^2}\cdot(1-32\cdot tg^2\phi) - 2\cdot\frac{N}{\rho}\cdot tg^2\phi + tg^4\phi\right] = N\cdot\sin\phi\cdot\cos^5\phi\cdot k_4$$

$$\frac{d^7 f}{d\Phi^7} = N \cdot \cos^7 \phi \cdot \left[61 - 479 \cdot tg^2\phi + 179 \cdot tg^4\phi - tg^6\phi \right] = N \cdot \cos^7 \phi \cdot k_5$$

$$\frac{d^8 f}{d\Phi^8} = N \cdot \sin\phi \cdot \cos^7 \phi \cdot \left[1385 - 3111 \cdot tg^2\phi + 543 \cdot tg^4\phi + tg^6\phi \right] = N \cdot \sin\phi \cdot \cos^7 \phi \cdot k_6$$

substituíndo nas expressões de *x* e de *y*, obtem-se

$$y = \sigma + \frac{\lambda^2}{2} \cdot N \cdot \sin\phi.\cos\phi + \frac{\lambda^4}{24} \cdot N \cdot \sin\phi.\cos^3\phi.k_2 + \frac{\lambda^6}{720} \cdot N \cdot \sin\phi.\cos^5\phi.k_4 + \frac{\lambda^8}{40320} \cdot N \cdot \sin\phi.\cos^7\phi.k_6 \tag{5.26}$$

$$x = \lambda \cdot N \cdot \cos\phi + \frac{\lambda^3}{6} \cdot N\cos^3\phi.k_1 + \frac{\lambda^5}{120} \cdot N\cos^5\phi.k_3 + \frac{\lambda^7}{5040} \cdot N\cos^7\phi.k_5$$

sendo λ a diferença de longitude entre o ponto e o meridiano central da projeção.

5.2.3. Fórmulas de transformação inversa

As fórmulas de transformação inversa são as seguintes

$$\begin{aligned}\phi = \phi' &- \left(\frac{t}{k_0 \cdot \rho}\right) \cdot \left(\frac{M^2}{2 \cdot k_0 \cdot N}\right) + \left(\frac{t}{k_0 \cdot \rho}\right) \cdot \left(\frac{M^4}{24 \cdot k_0^{\,3} \cdot N^3}\right) \cdot \left(-4\psi^2 + 9\psi \cdot \left(1 - t^2\right) + 12t^2\right) - \\ &- \left(\frac{t}{k_0 \cdot \rho}\right) \cdot \left(\frac{M^6}{720 \cdot k_0^{\,5} \cdot N^5}\right) \cdot \left(8\psi^4 \cdot \left(11 - 24t^2\right) - 12\psi^3 \cdot \left(21 - 71t^2\right) + 15\psi^2 \cdot \left(15 - 98t^2 + 15t^4\right) + \right. \\ &\left. + 180\psi \cdot \left(5t^2 - 3t^4\right) - 360t^4\right) + \left(\frac{t}{k_0 \cdot \rho}\right) \cdot \left(\frac{M^8}{40320 \cdot k_0^{\,7} \cdot N^7}\right) \cdot \left(1385 + 3633t^2 + 4095t^4 + 1575t^6\right)\end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}\left(\lambda - \lambda_0\right) \cdot \cos\phi' &= \left(\frac{M}{k_0 \cdot N}\right) - \left(\frac{M^3}{6 \cdot k_0^{\,3} \cdot N^3}\right) \cdot \left(\psi + 2t^2\right) + \\ &+ \left(\frac{M^5}{120 \cdot k_0^{\,5} \cdot N^5}\right) \cdot \left(-4\psi^3 \cdot \left(1 - 6t^2\right) + \psi^2 \cdot \left(9 - 68t^2\right) + 72\psi t^2 + 24t^4\right) - \\ &- \left(\frac{M^7}{5040 \cdot k_0^{\,7} \cdot N^7}\right) \cdot \left(61 + 662t^2 + 1320t^4 + 720t^6\right)\end{aligned}$$

sendo M a distância à meridiana, $\psi = \frac{N}{\rho}$ (com N e ρ calculados com um valor aproximado para a latitude ϕ') e $t = \tan\phi'$. A determinação de ϕ' é feita através de um processo iterativo, o qual é descrito de seguida

1) toma-se como ponto de partida um valor aproximado para o arco de meridiano σ_{ap}

$$\sigma_{ap} = \frac{P}{k_0}$$

sendo P a distância à perpendicular;

2) com base neste valor calcula-se uma primeira aproximação para $\phi\left(\phi_{ap}\right)$, a qual é dada por

$$\phi = \phi_0 + \frac{\sigma_{ap}}{A \cdot a \cdot \left(1 - e^2\right)}$$

3) com este valor aproximado para a latitude recalcula-se o comprimento de arco de meridiano σ usando a seguinte expressão

$$\sigma = a \cdot \left(1 - e^2\right) \cdot \left\{ A \cdot \left(\phi - \phi_0\right) - \frac{B}{2} \cdot \left(\sin 2\phi - \sin 2\phi_0\right) + \frac{C}{4} \cdot \left(\sin 4\phi - \sin 4\phi_0\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{D}{6} \cdot \left(\sin 6\phi - \sin 6\phi_0\right) + \frac{E}{8} \cdot \left(\sin 8\phi - \sin 8\phi_0\right) - \frac{F}{10} \cdot \left(\sin 10\phi - \sin 10\phi_0\right) \right\}$$

4) com este novo valor para σ determina-se a correção a aplicar a ϕ' através de:

$$\Delta\phi = \frac{\left(\sigma_{ap} - \sigma\right)}{\rho}$$

onde

$$\rho = \frac{a.\left(1 - e^2\right)}{\left(1 - e^2.\sin^2\phi\right)^{\frac{3}{2}}}$$

sendo o novo valor da latitude igual a

$$\phi' = \phi + \Delta\phi$$

5) repetem-se as etapas 3), 4) e 5), recalculando σ, ρ e $\Delta\phi$ e o novo valor da ϕ' até que $\Delta\phi$ seja inferior à precisão desejada (10^{-10}).

5.2.4. A deformação linear

O comprimento de um elemento linear *ds*, no elipsóide, sobre um paralelo de latitude ϕ ($d\phi$= 0) é dado por

$$ds^2 = r^2 \cdot d\lambda^2 \qquad (5.28)$$

e o comprimento da sua representação sobre o plano é dado por

$$ds_1{}^2 = dx^2 + dy^2 \qquad (5.29)$$

As componentes *dx* e *dy* obtêm-se diferenciando as expressões de *x* e de *y* em (5.26), obtendo-se as seguintes expressões

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot d\lambda = \left(r + \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 \cdot r \cdot \cos^2 \phi \cdot k_1 \right) \cdot d\lambda$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \lambda} \cdot d\lambda = \lambda \cdot r \cdot \sin\phi \cdot d\lambda$$

desprezando os termos de ordem igual ou superior a λ^3. Substituíndo estas expressões em (5.29), resulta que

$$ds_1{}^2 = r^2 \cdot d\lambda^2 + r^2 \cdot \cos^2 \phi \cdot k_1 \cdot \lambda^2 \cdot d\lambda^2 + \lambda^2 \cdot r^2 \cdot \sin^2 \phi \cdot d\lambda^2$$

desprezando também os termos iguais ou superiores a λ^3.

A deformação linear será então

$$k^2 = \frac{ds_1{}^2}{ds^2} = 1 + \cos^2 \phi \cdot k_1 \cdot \lambda^2 + \sin^2 \phi \cdot \lambda^2 \qquad (5.30)$$

ou então, substituíndo k_1 pela sua expressão, será

$$k^2 = 1 + \cos^2 \phi \cdot \left(\frac{N}{\rho} - \tan^2 \phi \right) \cdot \lambda^2 + \sin^2 \phi \cdot \lambda^2 = 1 + \frac{r^2 \cdot \lambda^2}{\rho \cdot N}$$

e portanto

$$k = \sqrt{1 + \frac{r^2 \cdot \lambda^2}{\rho \cdot N}} \qquad (5.31)$$

Fazendo um desenvolvimento em série da expressão (5.31), obtem-se

$$k = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2 \cdot \lambda^2}{\rho \cdot N}$$

atendendo a que

$$x \approx N.\cos\phi \cdot \lambda = r \cdot \lambda$$

pela sua expressão em (5.26), então a deformação linear k em coordenadas retangulares é dada por

$$k = 1 + \frac{x^2}{2 \cdot \rho \cdot N} \qquad (5.32)$$

ou seja, a deformação linear é unicamente função do quadrado da distância ao meridiano central da projeção dado que o coeficiente $\frac{1}{2 \cdot \rho \cdot N}$ varia pouco com a latitude. Esta é a razão pela qual a projeção de Gauss se adapta bem à representação de regiões alongadas na direção N-S. Se a zona a representar não for muito extensa na direção N-S, pode adotar-se o valor médio correspondente à latitude média ϕ_0 e então tem-se que

$$k = 1 + \frac{x^2}{2 \cdot \rho_0 \cdot N_0} \qquad (5.33)$$

5.2.5. Correção tangente à corda

As representações conformes mantêm o ângulo entre as tangentes, mas o que interessa para a aplicação das fórmulas da geometria plana é o ângulo entre as cordas, surgindo assim a necessidade de aplicar às direções azimutais elipsoidais a correção tangente à corda β, também designada por redução à corda (Figura 5.2).

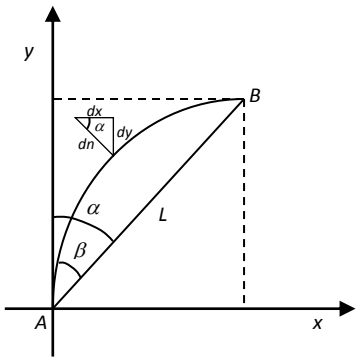


Figura 5.2. Correção tangente à corda (β).

A curvatura geodésica Γ é dada pelo teorema de Schols

$$\Gamma = \frac{1}{k} \cdot \frac{dk}{dn} \qquad (5.34)$$

sendo $\frac{dk}{dn}$ a derivada de *k* segundo a normal à linha, a qual se pode escrever da seguinte forma

$$\frac{dk}{dn} = \frac{dk}{dx} \cdot \frac{dx}{dn} + \frac{dk}{dy} \cdot \frac{dy}{dn}$$

como no caso da projeção de Gauss *k* só depende de *x*, tem-se que

$$\frac{dk}{dn} = \frac{dk}{dx} \cdot \frac{dx}{dn}$$

logo

$$\Gamma = \frac{1}{k} \cdot \frac{dk}{dx} \cdot \frac{dx}{dn}$$

derivando a expressão de *k* em (5.33) em ordem a *x*, obtem-se

$$\frac{dk}{dx} = \frac{x}{\rho_0 \cdot N_0}$$

e da figura deduz-se que (sendo α o azimute da linha *AB*)

$$dx = dn \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow \frac{dx}{dn} = \cos\alpha$$

e ainda que

$$\frac{y_B - y_A}{\cos\alpha} = L \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{y_B - y_A}{L}$$

pelo que a expressão da curvatura geodésica Γ passa a escrever-se da seguinte forma

$$\Gamma = \frac{1}{k} \cdot \frac{x}{\rho_0 \cdot N_0} \cdot \frac{y_B - y_A}{L}$$

sendo *L* o comprimento da linha *AB* (corda).

Através da geometria diferencial, sabe-se que a correção tangente à corda

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \Gamma_{1/3} \cdot L \qquad (5.35)$$

onde *L* é o comprimento de linha *AB* e $\Gamma_{1/3}$ é a curvatura num ponto a 1/3 da distância *AB*. Trata-se de uma fórmula aproximada mas, como a curvatura é muito pequena e o erro desprezável, considera-se suficientemente rigorosa nas aplicações cartográficas. Atendendo a que *k* é próximo de 1 e fazendo

$$x_{1/3} = x_A + \frac{1}{3} \cdot \left(x_B - x_A \right) = \frac{2 \cdot x_A + x_B}{3}$$

tem-se que

$$\Gamma_{1/3} = \frac{\left(2 \cdot x_A + x_B \right) \cdot \left(y_B - y_A \right)}{3 \cdot \rho_0 \cdot N_0 \cdot L}$$

donde finalmente, se obtem a correção β

$$\beta'' = \frac{1}{6 \cdot \rho_0 \cdot N_0 \cdot \sin 1''} \cdot \left(2 \cdot x_A + x_B \right) \cdot \left(y_B - y_A \right) \qquad (5.36)$$

Nesta expressão o valor de β'' é maior ou menor que zero consoante o sinal que convencionalmente se tenha adotado para o sentido positivo dos eixos. No caso da projeção de Gauss a transformada de uma geodésica volta sempre a concavidade para o meridiano central.

5.2.6. Correção de redução dos comprimentos finitos

Esta correção é aplicada a um comprimento finito elipsóidico para se obter o correspondente comprimento cartográfico. Sendo ds_1 o elemento linear sobre a carta, o elemento correspondente sobre o elipsóide será dado por

$$ds = \frac{ds_1}{k} = \frac{ds_1}{1 + \frac{x^2}{2 \cdot \rho_0 \cdot N_0}}$$

desenvolvendo o denominador em série, obtem-se

$$ds = \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot \rho_0 \cdot N_0} \right) \cdot ds_1$$

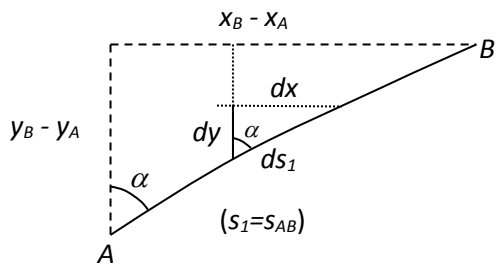


Figura 5.3. Correção de um elemento finito.

Considerando a Figura 5.3., deduz-se que

$$ds_1 = \frac{dx}{\sin\alpha}$$

e que

$$s_1 = \frac{x_B - x_A}{\sin\alpha} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{x_B - x_A}{s_1}$$

logo

$$ds = \left(1 - \frac{x^2}{2\cdot\rho_0\cdot N_0}\right)\cdot\frac{s_1}{x_B - x_A}\cdot dx$$

Integrando a expressão anterior, obtem-se a seguinte expressão para *s*

$$s = \frac{s_1}{x_B - x_A}\cdot\int_{x_A}^{x_B}\left(1 - \frac{x^2}{2\cdot\rho_0\cdot N_0}\right)\cdot dx = \frac{s_1}{x_B - x_A}\cdot\left\{\left[x\right]_{x_A}^{x_B} - \left[\frac{x3}{6\cdot\rho_0\cdot N_0}\right]_{x_A}^{x_B}\right\} = \cdots$$

$$= s_1 - \frac{s_1}{6\cdot\rho_0\cdot N_0}\cdot\left(x_B^2 + x_B\cdot x_A + x_A^2\right)$$

logo, a correção s_1-s é dada por

$$s_1 - s = \frac{s_1}{6\cdot\rho_0\cdot N_0}\cdot\left(x_B^2 + x_B\cdot x_A + x_A^2\right) \qquad (5.37)$$

Para Portugal continental considerando o sistema PT-TM06/ETRS89, com a latitude do Ponto Central perto do V.G. Melriça (ϕ_0= 39° 40’ 5.73” N), as expressões (5.33), (5.36) e (5.37) assumem os seguintes valores

$$k = 1 + 12306\cdot 10^{-18}\cdot x^2$$

$$\beta'' = 84612\cdot 10^{-14}\cdot\left(2\cdot x_A + x_B\right)\cdot\left(y_B - y_A\right)$$

$$s_1 - s = 41021\cdot 10^{-19}\cdot s_1\cdot\left(x_B^2 + x_B\cdot x_A + x_A^2\right)$$

5.2.7. Convergência de meridianos

Seja *P* um ponto sobre o elipsóide e *Q* o seu homólogo num sistema cartográfico qualquer. Na Figura 5.4 está representado o ponto *Q*, uma reta paralela ao eixo das ordenadas e a transformada de um meridiano. Chama-se ângulo de convergência de meridianos, ou simplesmente convergência de meridianos, ao ângulo γ entre o meridiano cartográfico e o meridiano geodésico num dado ponto *Q*. Pela Figura 5.4 tem-se a seguinte igualdade:

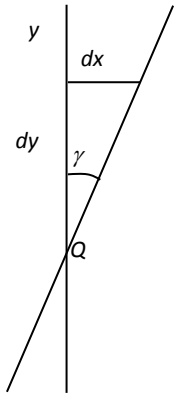


Figura 5.4. Convergência de meridianos

$$\frac{dx}{\sin\gamma} = \frac{dy}{\cos\gamma} \Leftrightarrow \tan\gamma = \frac{dx}{dy}$$

representando $\frac{dx}{dy}$ a derivada calculada a partir da equação $x = f(y)$ da transformada do meridiano. As seguintes fórmulas de transformação

$$x = x(\phi, \lambda)$$
$$y = y(\phi, \lambda)$$

são, para cada valor fixo de λ, as equações paramétricas (parâmetro ϕ) da transformada do meridiano fixado, donde

$$\tan\gamma = \frac{\frac{dx}{d\phi}}{\frac{dy}{d\phi}} \qquad (5.38)$$

No caso da projeção de Gauss as fórmulas de transformação, desprezando os termos iguais ou superiores a λ^2, são de acordo com as expressões (5.26)

$$y = \sigma$$

$$x = \lambda \cdot N \cdot \cos\phi = \lambda \cdot r$$

donde se obtem

$$\frac{dy}{d\phi} = \rho$$

$$\frac{dx}{d\phi} = \lambda \cdot \frac{dr}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{d\phi} = -\lambda \cdot \sin\phi \cdot \rho$$

pelo que a expressão (5.38) passa a escrever-se da seguinte forma

$$\tan\gamma = \frac{-\lambda \cdot \sin\phi \cdot \rho}{\rho} = -\lambda \cdot \sin\phi$$

sendo assim, a convergência de meridianos é dada pela seguinte expressão dado que γ é um ângulo muito pequeno

$$\gamma = -\lambda \cdot \sin\phi$$

sendo λ a diferença de longitude entre o ponto e o meridiano central da projeção. Dado isto, tem-se a seguinte expressão para o cálculo da convergência de meridianos

$$\gamma = -\left(\lambda - \lambda_0\right) \cdot \sin\phi \qquad (5.39)$$

5.3. Projeção de Mercator

5.3.1. Introdução

A projeção de Mercator é uma projeção cilíndrica conforme. Gerardo Kramer (1512-1591), cartógrafo flamengo, tenta corrigir a representação do Mediterrâneo de Ptolomeu e constroí um Mapa Mundo com base numa projeção matemática, em que os paralelos e os meridianos se projetam num plano perpendiculares entre si.

A projeção de Mercator foi concebida para reduzir os problemas de orientação no decorrer da navegação. O principal problema de um navegador é saber como orientar o navio para que, partindo de um determinado lugar, consiga atingir um destino previamente definido. Combinando o ser uma projeção conforme com o facto de ter os meridianos e paralelos retilíneos faz com que as loxodrómias, ou seja as linhas com um rumo constante, sejam representadas por segmentos de reta.

Para sabermos qual o azimute α da loxodrómica que une dois pontos (Figura 5.5), dispondo de uma carta com esta projeção basta unir os dois pontos por uma reta e medir o ângulo α. A formulação existente na projeção de Mercator baseia-se fundamentalmente no elipsóide sobre o qual escolhemos

as coordenadas Φ e λ, respetivamente a latitude isométrica e a longitude, e nas coordenadas cartesianas *x*, *y* sobre o plano, cuja relação com a latitude isométrica e longitude é obtida por uma função analítica qualquer *f* que obedece à condição geral das projeções conformes.

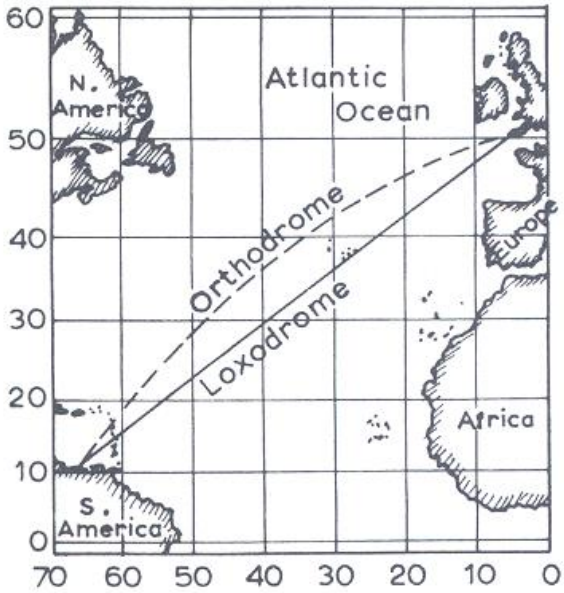


Figura 5.5. Loxodrómica: linha de azimute constante.

A projeção de Mercator é especialmente apropriada para a representação de regiões equatoriais ou, de um modo geral, de regiões com pequeno desenvolvimento em latitude, desde que a latitude seja pequena. A partir dos 60°, a escala aumenta rapidamente, o que leva a que as deformações areais aumentem ainda mais (uma vez que a escala areal varia com o quadrado da escala linear).

5.3.2. Fórmulas de transformação direta

Estabelecendo um sistema cartesiano (*x*, *y*) sobre o plano e adotando um sistema curvilíneo (Φ, λ) no elipsóide, em que Φ é a latitude isométrica, verifica-se, pela expressão (5.20),

$$y + i \cdot x = f\left(\Phi + i \cdot \lambda\right)$$

que para λ= 0 se tem *x*= 0, o que significa que o meridiano central é representado pelo eixo *oy* das ordenadas, logo os outros meridianos terão de ser representados por retas paralelas a esse eixo. Sendo assim, para λ= constante tem-se que *x*= constante.

Desenvolvendo *f* em série de McLaurin e separando as partes reais das partes imaginárias, obtem-se as expressões (5.25)

$$y = f(\Phi) - \frac{\lambda^2}{2!} \cdot \left(\frac{d^2 f}{d\Phi^2} \right)_{\lambda=0} + \cdots$$
$$x = \lambda \cdot \left(\frac{df}{d\Phi} \right)_{\lambda=0} - \frac{\lambda^3}{3!} \cdot \left(\frac{d^3 f}{d\Phi^3} \right)_{\lambda=0} + \cdots$$

Para que a coordenada *x* dependa unicamente da longitude é necessário impor que

$$\left(\frac{df}{d\Phi} \right)_{\lambda=0} = C \qquad (5.40)$$

onde C é uma constante. Assim, para λ= 0 a função f é dada por

$$f = C \cdot \Phi + C_1 \qquad (5.41)$$

e para um qualquer valor da longitude

$$f = C(\Phi + i\lambda) + C_1 \qquad (5.42)$$

logo

$$y + ix = C(\Phi + i\lambda) + C_1 \qquad (5.43)$$

Desta última equação resultam as fórmulas de transformação da latitude isométrica e longitude em coordenadas cartesianas *x* e *y*

$$\begin{aligned} y &= f(\Phi) = C \cdot \Phi + C_1 \\ x &= \lambda \cdot \left(\frac{df}{d\Phi} \right)_{\lambda=0} = \lambda \cdot C \end{aligned} \qquad (5.44)$$

Para um valor constante da latitude isométrica Φ, obtem-se um valor de *y*, e consequentemente os paralelos são representados por retas paralelas ao eixo *ox*, dada a conformidade do sistema. Caso se pretenda que o equador seja representado pelo eixo das abcissas deverá fazer-se C_1= 0 de modo a obter

$$\begin{aligned} y &= C \cdot \Phi \\ x &= \lambda \cdot C \end{aligned} \qquad (5.45)$$

Um elemento linear sobre o equador (ϕ= 0, $d\phi$= 0) e o seu correspondente sobre a carta (y= 0, dy= 0) serão, respetivamente

$$ds = r \cdot d\lambda = a \cdot d\lambda$$

sendo a o semieixo maior do elipsóide

$$ds_1 = dx = C \cdot d\lambda$$

Por outro lado, os elementos lineares, sobre o elipsóide e sobre o plano são

$$ds^2 = r^2 \cdot (d\Phi^2 + d\lambda^2)$$

$$ds_1{}^2 = dx^2 + dy^2 = C^2 \cdot d\lambda^2 + C^2 \cdot d\Phi^2 = C^2.(d\Phi^2 + d\lambda^2)$$

então o módulo da deformação linear é dado por

$$k = \frac{C}{r} \qquad (5.46)$$

Pretendendo que sobre o equador o módulo da deformação linear seja igual a 1, então r é igual a a logo C deverá ser igual a a, sendo a o raio equatorial do elipsóide.

Substituíndo o valor de C em (5.45), as fórmulas de transformação escrevem-se

$$\begin{aligned} y &= a \cdot \Phi \\ x &= a \cdot \lambda \end{aligned} \qquad (5.47)$$

O módulo da deformação areal na projeção de Mercator é então dado por

$$m = k^2 = \frac{a^2}{r^2} \qquad (5.48)$$

Considerando uma esfera de raio a, e atendendo que $r = a.\cos\phi$, tem-se neste caso que

$$m = k^2 = \frac{a^2}{a^2.\cos^2\phi} = \frac{1}{\cos^2\phi} \qquad (5.49)$$

Para valores da latitude geodésica de ϕ= 0°, 45°, 60° obtêm-se os seguintes valores de deformação areal de m= 1, 2, 4, respetivamente. Verifica-se que as deformações areais assumem rapidamente valores muito elevados com o afastamento em relação ao equador ou ao paralelo origem da projeção.

Tendo como objetivo a obtenção de uma expressão para a deformação linear que seja função direta do afastamento ao equador, desenvolve-se a fórmula (5.47) em série de Taylor em função do comprimento do arco de meridiano, obtendo-se

$$y = \sigma \cdot \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)_{\sigma=0} + \frac{\sigma^2}{2!} \cdot \left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right)_{\sigma=0} + \frac{\sigma^3}{3!} \cdot \left(\frac{d^3y}{d\sigma^3}\right)_{\sigma=0} + \cdots \qquad (5.50)$$

As derivadas de *y* em ordem a σ são dadas por

$$\frac{dy}{d\sigma} = a \cdot \frac{d\Phi}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{d\sigma} = a \cdot \frac{\rho}{r} \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{a}{r}$$

$$\frac{d^2y}{d\sigma^2} = -\frac{a}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\sigma} = \frac{a \cdot \sin\phi}{r^2}$$

$$\frac{d^3y}{d\sigma^3} = \frac{a \cdot \cos\phi}{r^2} \cdot \frac{1}{\rho} + \ldots$$

Fazendo ϕ= 0 e substituíndo estas expressões na expressão (5.50) desprezando os termos de grau superior a 3, obtem-se

$$y = \sigma + \frac{\sigma^3}{6a\rho_0} \qquad (5.51)$$

O comprimento de um elemento linear *ds*, no elipsóide, sobre um meridiano de longitude λ ($d\lambda$= 0) é dado por

$$ds^2 = \rho^2 \cdot d\phi^2$$

e o comprimento da sua representação sobre o plano (com *dx*= 0)é dado por

$$ds_1^{\ 2} = dy^2$$

pelo que a deformação linear é dada por

$$k = \frac{dy}{\rho \cdot d\phi} = \frac{dy}{d\sigma} = 1 + \frac{\sigma^2}{2a\rho_0} \qquad (5.52)$$

Em que ρ_0 é o raio de curvatura do meridiano num ponto do equador. Esta expressão mostra que *k* cresce muito rapidamente com a distância ao equador pelo que o sistema é indicado para zonas equatoriais alongadas na direção EW mas estreitas na direção NS. Tem-se então, pela expressão (5.51), que

$$y \approx \sigma$$

pelo que

$$k = 1 + \frac{y^2}{2a\rho_0} \qquad (5.53)$$

Como as deformações aumentam com a distância ao equador é frequente a utilização de um artifício que se baseia em multiplicar todos os comprimentos da carta por $k_0 < 1$, pelo que as fórmulas de trnasformação direta (5.47) passam a ser

$$y = k_0 \cdot a \cdot \Phi$$
$$x = k_0 \cdot a \cdot \lambda$$

pelo que a deformação linear é dada por

$$k = \frac{dy}{r \cdot d\Phi} = k_0 \cdot \frac{a}{r} = k_0 \cdot \left(1 + \frac{y^2}{2a\rho_0} \right)$$

Sobre o equador $k = 1$, pelo que o valor da ordenada y será

$$1 + \frac{y^2}{2a\rho_0} = \frac{1}{k_0} \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{2a\rho_0 \cdot \left(\frac{1}{k_0} - 1 \right)} \qquad (5.54)$$

5.3.3. Fórmulas de transformação inversa

Partindo das expressões da transformação direta (5.47), facilmente se obtêm as expressões para a transformação inversa

$$\Phi = \frac{y}{a}$$
$$\lambda = \frac{x}{a} \qquad (5.55)$$

5.3.4. Correção tangente à corda

As representações conformes mantêm o ângulo entre as tangentes, mas o que interessa para a aplicação das fórmulas da geometria plana é o ângulo entre as cordas, surgindo assim a necessidade de aplicar às direções azimutais elipsoidais a correção tangente à corda β, também designada por redução à corda (Figura 5.6).

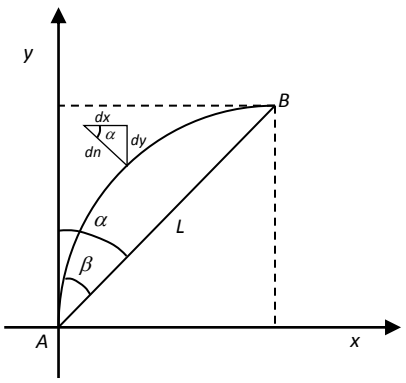


Figura 5.6. Correção tangente à corda (β).

A curvatura geodésica Γ é dada pelo teorema de Schols de acordo com a expressão (5.34)

$$\Gamma = \frac{1}{k} \cdot \frac{dk}{dn}$$

sendo $\frac{dk}{dn}$ a derivada de *k* segundo a normal à linha, a qual se pode escrever da seguinte forma

$$\frac{dk}{dn} = \frac{dk}{dx} \cdot \frac{dx}{dn} + \frac{dk}{dy} \cdot \frac{dy}{dn}$$

como no caso da projeção de Mercator *k* só depende de *y*, tem-se que

$$\frac{dk}{dn} = \frac{dk}{dy} \cdot \frac{dy}{dn}$$

logo

$$\Gamma = \frac{1}{k} \cdot \frac{dk}{dy} \cdot \frac{dy}{dn}$$

derivando a expressão de *k* em (5.53) em ordem a *y*, obtem-se

$$\frac{dk}{dy} = \frac{y}{a \cdot \rho_0}$$

e da figura deduz-se que (sendo α o azimute da linha *AB*)

$$dy = dn \cdot \sin\alpha \Leftrightarrow \frac{dy}{dn} = \sin\alpha$$

e ainda que

$$\frac{x_B - x_A}{\sin\alpha} = L \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{x_B - x_A}{L}$$

pelo que a expressão da curvatura geodésica Γ passa a escrever-se da seguinte forma

$$\Gamma = \frac{1}{k} \cdot \frac{y}{a \cdot \rho_0} \cdot \frac{x_B - x_A}{L}$$

sendo *L* o comprimento da linha *AB*.

Através da expressão (5.35), sabe-se que a correção tangente à corda é dada por

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \Gamma_{1/3} \cdot L$$

onde *L* é o comprimento de linha *AB* e $\Gamma_{1/3}$ é a curvatura um ponto a 1/3 da distância *AB*. Trata-se de uma fórmula aproximada, mas como a curvatura é muito pequena e o erro desprezável considera-se suficientemente rigorosa nas aplicações cartográficas. Atendendo a que *k* é próximo de 1 e fazendo

$$y_{1/3} = y_A + \frac{1}{3} \cdot (y_B - y_A) = \frac{2 \cdot y_A + y_B}{3}$$

tem-se que

$$\Gamma_{1/3} = \frac{(2 \cdot y_A + y_B) \cdot (x_B - x_A)}{3 \cdot a \cdot \rho_0 \cdot L}$$

donde finalmente, se obtem a correção β

$$\beta'' = \frac{1}{6 \cdot a \cdot \rho_0 \cdot \sin 1''} \cdot (2 \cdot y_A + y_B) \cdot (x_B - x_A) \qquad (5.56)$$

Nesta expressão o valor de β'' é maior ou menor que zero consoante o sinal que convencionalmente se tenha adotado para o sentido positivo dos eixos.

5.3.5. Correção de redução dos comprimentos finitos

Esta correção é aplicada a um comprimento finito elipsóidico para se obter o correspondente comprimento cartográfico. Sendo ds_1 o elemento linear sobre a carta, o elemento correspondente sobre o elipsóide será dado por

$$ds = \frac{ds_1}{k} = \frac{ds_1}{1 + \frac{y^2}{2 \cdot a \cdot \rho_0}}$$

desenvolvendo o denominador em série, obtem-se

$$ds = \left(1 - \frac{y^2}{2 \cdot a \cdot \rho_0}\right) \cdot ds_1$$

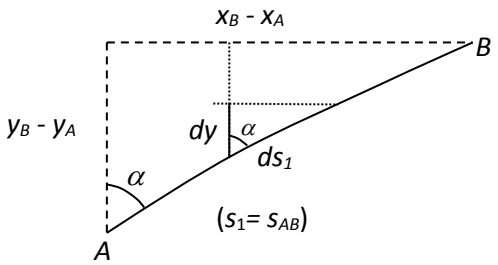


Figura 5.7. Correção de um elemento finito.

Considerando a Figura 5.7., deduz-se que

$$ds_1 = \frac{dy}{\cos\alpha}$$

e que

$$s_1 = \frac{y_B - y_A}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{y_B - y_A}{s_1}$$

logo

$$ds = \left(1 - \frac{y^2}{2 \cdot a \cdot \rho_0}\right) \cdot \frac{s_1}{y_B - y_A} \cdot dy$$

Integrando a expressão anterior, obtem-se a seguinte expressão para *s*

$$s = \frac{s_1}{y_B - y_A} \cdot \int_{y_A}^{yB} \left(1 - \frac{y^2}{2 \cdot a \cdot \rho_0}\right) \cdot dy = \frac{s_1}{y_B - y_A} \cdot \left\{ [y]_{y_A}^{y_B} - \left[\frac{y3}{6 \cdot a \cdot \rho_0}\right]_{y_A}^{y_B} \right\} = \cdots$$

$$= s_1 - \frac{s_1}{6 \cdot a \cdot \rho_0} \cdot \left(y_B^2 + y_B \cdot y_A + y_A^2\right)$$

logo, a correção s_1-s é dada por

$$s_1 - s = \frac{s_1}{6 \cdot a \cdot \rho_0} \cdot \left(y_B^2 + y_B \cdot y_A + y_A^2\right) \qquad (5.57)$$

5.3.6. Comprimento de um arco de loxodrómica

Considerando a Figura 5.8 e a lei dos senos temos que:

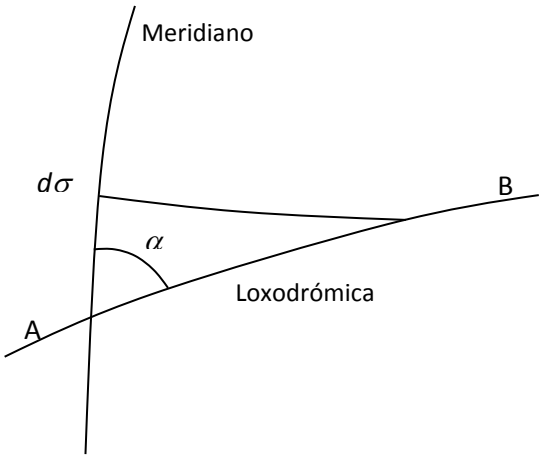


Figura 5.8. A loxodrómica.

$$ds = \frac{1}{\cos\alpha} d\sigma$$

fazendo o integral desta expressão obtém-se a seguinte expressão:

$$s = \frac{1}{\cos\alpha} \int d\sigma = \frac{\sigma}{\cos\alpha} \qquad (5.58)$$

que permite determinar o comprimento de um arco de loxodrómica bastando para isso dividir o comprimento do arco de meridiano, entre duas latitudes, pelo coseno do azimute da loxodrómica.

5.4. Projeção de Lambert (cónica conforme)

5.4.1. Introdução

A projeção de Mercator, descrita na secção anterior, adapta-se à representação de uma faixa equatorial alongada na direção E-W, mas com pouco desenvolvimento na direção N-S. Neste caso os paralelos são representados por segmentos de reta iguais, o que implica uma dilatação dos elementos lineares dada a conformidade, dilatação essa que será tanto maior quanto maior for a distância ao equador. Tal resulta da condição de paralelismo imposta às retas representativas dos meridianos.

Abandonando esta condição de paralelismo entre os meridianos, é possível construir um sistema conforme em que os meridianos sejam retas não paralelas. Sendo os meridianos convergentes nos polos, estas retas hão-de ser concorrentes, tendo como ponto de convergênia o polo norte ou polo sul. Para além disso, e dada a conformidade do sistema, os paralelos são representados por circunferências concêntricas com centro no ponto de concorrência daquelas retas.

De uma maneira geral, numa projeção cilíndrica os meridianos são representados por retas paralelas, enquanto que numa projeção cónica são representados por retas concorrentes. A projeção de Mercator é uma projeção cilíndrica conforme, enquanto que a projeção de Lambert, apresentada nesta secção, é uma projeção cónica conforme.

5.4.2. Fórmulas de transformação direta

Estabelecendo um sistema de coordenadas polares isométrico (μ, θ) sobre o plano e adotando um sistema curvilíneo (Φ, λ) no elipsóide, em que Φ é a latitude isométrica, tem-se que:

$$\mu + i\theta = f\left(\Phi + i\lambda\right) \qquad (5.59)$$

Para λ= 0 obtém-se θ= 0 o que mostra que o meridiano origem das longitudes é representado pelo eixo polar. Por outro lado, pretende-se que para λ= const. seja θ= const.

Desenvolvendo a expressão (5.59) em série de Mac-Laurin e separando a parte real da imaginária, tem-se que:

$$\begin{aligned} \mu &= \left(f\left(\Phi\right)\right)_{\lambda=0} - \frac{\lambda^2}{2!}\left(\frac{d^2 f}{d\Phi^2}\right)_{\lambda=0} + \ldots \\ \theta &= \lambda\left(\frac{df}{d\Phi}\right)_{\lambda=0} - \frac{\lambda^3}{3!}\left(\frac{d^3 f}{d\Phi^3}\right)_{\lambda=0} + \ldots \end{aligned} \qquad (5.60)$$

Impondo que θ não depende de Φ, tem-se que:

$$\left(\frac{df}{d\Phi}\right)_{\lambda=0} = h \text{ , sendo } h\text{= const.} \qquad (5.61)$$

onde h é uma constante. Assim, para λ= 0 a função f é dada por

$$f = h \cdot \Phi \qquad (5.62)$$

e para um qualquer valor da longitude

$$f = h \cdot \left(\Phi + i\lambda\right) \qquad (5.63)$$

logo

$$\mu + i\theta = h \cdot \left(\Phi + i\lambda\right) \qquad (5.64)$$

Desta última equação resultam as fórmulas de transformação da latitude isométrica e longitude em coordenadas polares μ e θ

$$\begin{aligned} \mu &= h \cdot \Phi \\ \theta &= h \cdot \lambda \end{aligned} \qquad (5.65)$$

A coordenada *R* está relacionada com a coordenada isométrica μ pela expressão $R = p \cdot e^{\mu}$, substituíndo o valor da coordenada μ pela expressão anterior obtemos $R = p \cdot e^{h\Phi}$.

Seja Φ_0 a latitude do paralelo central e R_0 o raio do arco de circunferência correspondente a esse paralelo, temos que

$$R_0 = p \cdot e^{h\Phi_0} \qquad (5.66)$$

eliminando *p*, resultam as seguintes fórmulas de transformação

$$\begin{aligned} \frac{R}{R_0} &= \frac{p \cdot e^{h\Phi}}{p \cdot e^{h\Phi_0}} = e^{h(\Phi - \Phi_0)} \Leftrightarrow R = R_0 \cdot e^{h(\Phi - \Phi_0)} \\ \theta &= h \cdot \lambda \end{aligned} \qquad (5.67)$$

Sobre o elipsóide e sobre o plano temos, respetivamente, os seguintes elementos lineares

$$ds^2 = r^2 \cdot \left(d\Phi^2 + d\lambda^2\right)$$

$$ds_1{}^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2 = R_0{}^2 \cdot e^{2h(\Phi - \Phi_0)} \cdot h^2 \cdot \left(d\Phi^2 + d\lambda^2\right)$$

logo, o módulo da deformação linear será

$$k = \frac{ds_1}{ds} = \frac{|h| \cdot R_0 \cdot e^{h(\Phi - \Phi_0)}}{r} \qquad (5.68)$$

considerando $\sqrt{h^2} = |h|$ para cobrir a hipótese de *h*< 0. Como se trata de uma projeção conforme, *k* é independente da direção de *ds* e deverá ser igual a 1 no paralelo central, pelo que $\Phi = \Phi_0$, logo

$$1 = \frac{|h| \cdot R_0}{r_0} = \frac{|h| \cdot R_0}{N_0 \cdot cos\phi_0} \qquad (5.69)$$

A partir da Figura 5.9 obtêm-se as seguintes igualdades

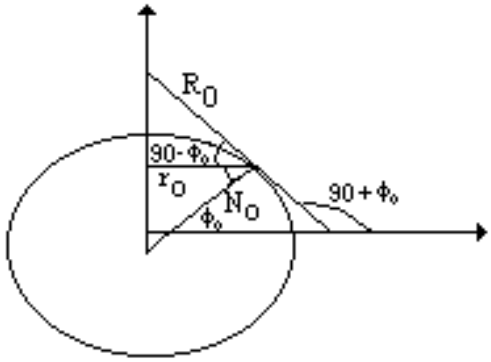


Figura 5.9. Raio do paralelo central.

$$r_0 = N_0 \cdot cos\phi_0$$

$$r_0 = R_0 \cdot sin\phi_0$$

pelo que

$$R_0 = N_0 \cdot |cot\, g\phi_0| \qquad (5.70)$$

considerando $|cot\, g\phi_0|$ para cobrir a hipótese de $\phi_0 < 0$. Substituíndo (5.70) na equação (5.69), obtêm-se

$$|h| = |sin\,\phi_0|$$

donde

$$h = \pm sin\phi_0 \qquad (5.71)$$

Na realidade há apenas uma solução, como se pode observar na Figura 5.10. De notar que, se *h*< 0 só o hemisfério Norte é representado pois para $\phi = 90°$ temos *R*= 0 e para $\phi = -90°$ temos *R*= ∞; e que se *h*> 0 só o hemisfério Sul figurará na carta.

Suponhamos para fixar ideias que $\phi_0 > 0$, fazendo $h = -sin\phi_0$ teríamos a carta 1 e que fazendo $h = +sin\phi_0$ teríamos a carta 2; mas esta última situação não responde ao nosso problema pois que as

curvaturas geodésicas ficam iguais mas de sinais contrários. Analisando agora o caso $\phi_0 < 0$ concluiríamos que deveria ser igualmente $h = -sin\phi_0$.

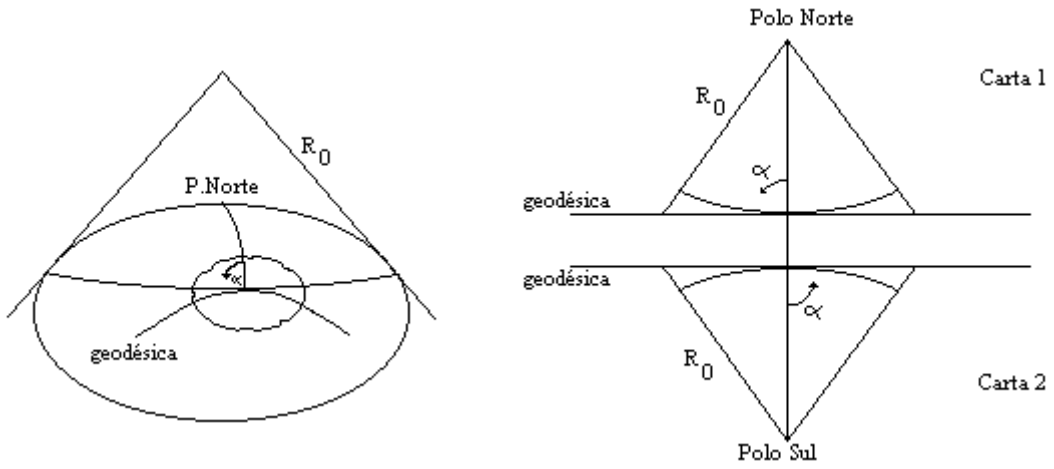


Figura 5.10. Sinal a atribuir a *h* para a representação do hemisfério Norte na carta 1 e do hemisfério Sul na carta 2.

Fixados os parâmetros lineares, temos então que

$$h = -sin\phi_0 \qquad (5.72)$$

para $\phi_0 > 0$ e $\phi_0 < 0$.

Substituíndo (5.72) nas equações (5.67) temos então as seguintes equações

$$\begin{aligned} R &= R_0 \cdot e^{-sin\phi_0(\Phi - \Phi_0)} \\ \theta &= -sin\phi_0 \cdot \lambda \end{aligned} \qquad (5.73)$$

as quais resolvem o problema direto. No entanto, na primeira equação a latitude isométrica torna-a mais complica pelo que é necessário modificá-la. Fazendo o desenvolvimento em séries de potências do arco de meridiano σ, contado a partir do paralelo central, obtemos

$$R = R_0 + \left(\frac{dR}{d\sigma}\right)_0 \sigma + \left(\frac{d^2R}{d\sigma^2}\right)_0 \frac{\sigma^2}{2!} + \left(\frac{d^3R}{d\sigma^3}\right)_0 \frac{\sigma^3}{3!} + \ldots \qquad (5.74)$$

calculando as derivadas

$$\left(\frac{dR}{d\sigma}\right)_0 = \frac{h \cdot R_0}{r_0} = \frac{-sin\phi_0 \cdot R_0}{R_0 \cdot sin\phi_0} = -1$$

$$\left(\frac{d^2R}{d\sigma^2}\right)_0 = \frac{h \cdot R_0}{r_0^{\ 2}} \cdot \left(h + sin\phi_0\right) = \frac{-sin\phi_0 \cdot R_0}{R_0^{\ 2} \cdot sin\phi_0} \cdot \left(-sin\phi_0 + sin\phi_0\right) = 0$$

$$\left(\frac{d^3R}{d\sigma^3}\right)_0 = \frac{h \cdot R_0 \cdot cos\phi_0}{\rho_0 \cdot r_0^{\ 2}} + \left(h + sin\phi_0\right) \cdot \left(\ldots\right) = \frac{-sin\phi_0 \cdot N_0 \cdot cotg\phi_0 \cdot cos\phi_0}{\rho_0 \cdot N_0^{\ 2} \cdot cos\phi_0} + \left(-sin\phi_0 + sin\phi_0\right) = -\frac{1}{\rho_0 \cdot N_0}$$

(5.75)

Note-se que $\frac{dR}{d\sigma}$ é igual a 1, aparte do sinal, ou seja é igual a *k*, ao longo do meridiano, portanto

$$\left(\frac{d^2R}{d\sigma^2}\right)_0 = \left(\frac{dk}{d\sigma}\right)_0 = 0 \qquad (5.76)$$

o que confirma que ao escolher $h = -sin\phi_0$, a variação de *k* ao longo do meridiano é nula, ou seja, o módulo da deformação linear é constante ao longo do meridiano. Substituíndo na expressão (5.74) e fazendo $y = R_0 - R$, temos que

$$y = R_0 - R = \sigma + \frac{\sigma^3}{6 \cdot N_0 \cdot \rho_0} + \ldots \qquad (5.77)$$

No caso $\phi_0 < 0$ a equação seria idêntica desde que a convenção do sinal estivesse de acordo.

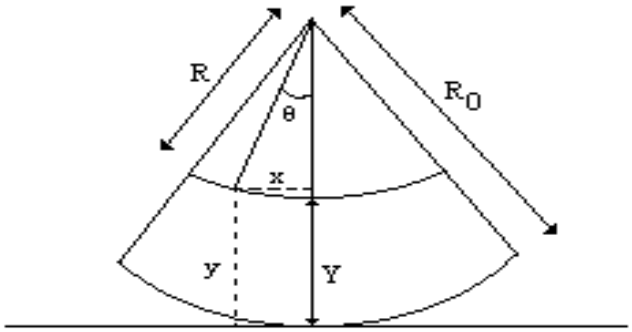


Figura 5.11. Transformação das coordenadas polares (*R*, *θ*) em coordenadas retangulares (*x*, *y*).

Atendendo à Figura 5.11 obtêm-se as seguintes equações de transformação em coordenadas cartesianas retangulares

$$x = \left(R_0 - Y\right) \cdot sin\theta$$

$$y = R_0 - \left(R_0 - Y\right) \cdot cos\theta \qquad (5.78)$$

com

$$R_0 = N_0 \cdot \left|cot\, g\phi_0\right|$$

$$\theta = -sin\phi_0 \cdot \lambda$$

como $k = \dfrac{dy}{d\sigma}$ tem-se que

$$k = 1 + \frac{\sigma^2}{2 \cdot N_0 \cdot \rho_0} + \ldots \quad (5.79)$$

Sobre o paralelo central $k_0 = 1$, logo k cresce rapidamente com o afastamento ao paralelo central, pelo que este sistema é conveniente para zonas alongadas na direção EW mas estreitas da direção NS.

Tem-se então, pela expressão (5.77), que

$$y \approx \sigma$$

pelo que

$$k = 1 + \frac{y^2}{2 \cdot \rho_0 \cdot N_0} \qquad (5.80)$$

A concavidade da transformada de uma geodésica está sempre voltada para o paralelo central. Esta projeção recebe o nome de cónica conforme de Lambert, tangente ou secante, conforme se adote um só paralelo de escala conservada ou dois, respetivamente. No segundo caso, as partes do meridiano y são dadas por

$$y = k_0 \cdot \left(\sigma + \frac{\sigma^3}{6 \cdot N_0 \cdot \rho_0} + \ldots\right)$$

e k por

$$k = k_0 \cdot \left(1 + \frac{y^2}{2 \cdot \rho_0 \cdot N_0}\right) \qquad (5.81)$$

5.4.3. Fórmulas de transformação inversa

As fórmulas de transformação inversa são obtidas sem dificuldade de maior. Considerando a Figura 5.11, temos as seguintes equações

$$R = \frac{x}{sin\theta}$$
$$tg\theta = \frac{x}{R_0 - y} \qquad (5.82)$$

sendo que

$$\lambda = \frac{\theta}{sin\phi_0}$$

no entanto, a latitude ϕ tem que ser obtida por um processo iterativo. Seja

$$\sigma_{ap} = R_0 - R \qquad (5.83)$$

o comprimento do arco de meridiano entre P_0 e P_1. Mesmo desconhecendo o valor exato de ϕ, se se souber o valor aproximado da latitude de P_1, podemos então calcular o valor de σ_{ap}

$$\sigma_{ap} = a \cdot \left(1 - e^2\right) \cdot A \cdot \left(\phi_1 - \phi_0\right)$$

donde a primeira aproximação do valor de ϕ_1 é

$$\phi_1 = \phi_0 + \frac{\sigma_{ap}}{A \cdot a \cdot \left(1 - e^2\right)}$$

com este valor aproximado para a latitude recalcula-se o comprimento de arco de meridiano entre P_0 e P_1

$$\sigma = a \cdot \left(1 - e^2\right) \cdot \left\{ A \cdot \left(\phi_1 - \phi_0\right) - \frac{B}{2} \cdot \left(\sin 2\phi_1 - \sin 2\phi_0\right) + \frac{C}{4} \cdot \left(\sin 4\phi_1 - \sin 4\phi_0\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{D}{6} \cdot \left(\sin 6\phi_1 - \sin 6\phi_0\right) + \frac{E}{8} \cdot \left(\sin 8\phi_1 - \sin 8\phi_0\right) - \frac{F}{10} \cdot \left(\sin 10\phi_1 - \sin 10\phi_0\right) \right\}$$

sendo

$$A = 1 + \frac{3}{4} \cdot e^2 + \frac{45}{64} \cdot e^4 + \frac{175}{256} \cdot e^6 + \frac{11025}{16384} \cdot e^8 + \frac{43659}{65536} \cdot e^{10} + \ldots$$

$$B = \frac{3}{4} \cdot e^2 + \frac{15}{16} \cdot e^4 + \frac{525}{512} \cdot e^6 + \frac{2205}{2048} \cdot e^8 + \frac{72765}{65536} \cdot e^{10} + \ldots$$

$$C = \frac{15}{64} \cdot e^4 + \frac{105}{256} \cdot e^6 + \frac{2205}{4096} \cdot e^8 + \frac{10395}{16384} \cdot e^{10} + \ldots$$

$$D = \frac{35}{512} \cdot e^6 + \frac{315}{2048} \cdot e^8 + \frac{31185}{131072} \cdot e^{10} + \ldots$$

$$E = \frac{315}{16384} \cdot e^8 + \frac{3465}{65536} \cdot e^{10} + \ldots$$

$$F = \frac{3465}{131072} \cdot e^{10} + \ldots$$

com este novo valor para σ determina-se a correção a aplicar a ϕ através de:

$$\Delta\phi = \frac{\left(\sigma_{ap} - \sigma\right)}{\rho}$$

onde

$$\rho = \frac{a.\left(1 - e^2\right)}{\left(1 - e^2.\sin^2\phi\right)^{\frac{3}{2}}}$$

sendo o novo valor da latitude igual a

$$\phi_1 = \phi + \Delta\phi$$

recalculando σ, ρ e $\Delta\phi$ e o novo valor da ϕ_1 até que $\Delta\phi$ seja inferior à precisão desejada (10^{-10}).

5.4.4. Correção tangente à corda

A curvatura geodésica Γ é dada pelo teorema de Schols de acordo com a expressão (5.34)

$$\Gamma = \frac{1}{k} \cdot \frac{dk}{dn}$$

sendo $\frac{dk}{dn}$ a derivada de *k* segundo a normal à linha, a qual se pode escrever da seguinte forma

$$\frac{dk}{dn} = \frac{dk}{dx} \cdot \frac{dx}{dn} + \frac{dk}{dy} \cdot \frac{dy}{dn}$$

como no caso da projeção de Lambert *k* só depende de *y*, tem-se que

$$\frac{dk}{dn} = \frac{dk}{dy} \cdot \frac{dy}{dn}$$

logo

$$\Gamma = \frac{1}{k} \cdot \frac{dk}{dy} \cdot \frac{dy}{dn}$$

derivando a expressão de *k* em (5.80) em ordem a *y*, obtem-se

$$\frac{dk}{dy} = \frac{y}{a \cdot \rho_0}$$

e da Figura 5.6 deduz-se que (sendo α o azimute da linha *AB*)

$$dy = dn \cdot \sin\alpha \Leftrightarrow \frac{dy}{dn} = \sin\alpha$$

e ainda que

$$\frac{x_B - x_A}{\sin\alpha} = L \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{x_B - x_A}{L}$$

pelo que a expressão da curvatura geodésica Γ passa a escrever-se da seguinte forma

$$\Gamma = \frac{1}{k} \cdot \frac{y}{a \cdot \rho_0} \cdot \frac{x_B - x_A}{L}$$

sendo *L* o comprimento da linha *AB*.

Através da expressão (5.35), sabe-se que a correção tangente à corda é dada por

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \Gamma_{1/3} \cdot L$$

onde *L* é o comprimento de linha *AB* e $\Gamma_{1/3}$ é a curvatura um ponto a 1/3 da distância *AB*. Trata-se de uma fórmula aproximada, mas como a curvatura é muito pequena e o erro desprezável considera-se suficientemente rigorosa nas aplicações cartográficas. Atendendo a que *k* é próximo de 1 e fazendo

$$y_{1/3} = y_A + \frac{1}{3} \cdot (y_B - y_A) = \frac{2 \cdot y_A + y_B}{3}$$

tem-se que

$$\Gamma_{1/3} = \frac{(2 \cdot y_A + y_B) \cdot (x_B - x_A)}{3 \cdot a \cdot \rho_0 \cdot L}$$

donde finalmente, se obtem a correção β

$$\beta'' = \frac{1}{6 \cdot a \cdot \rho_0 \cdot \sin 1''} \cdot \left(2 \cdot y_A + y_B\right) \cdot \left(x_B - x_A\right) \qquad (5.84)$$

Nesta expressão o valor de β'' é maior ou menor que zero consoante o sinal que convencionalmente se tenha adotado para o sentido positivo dos eixos.

5.3.5. Correção de redução dos comprimentos finitos

Sendo ds_1 o elemento linear sobre a carta, o elemento correspondente sobre o elipsóide será dado por

$$ds = \frac{ds_1}{k} = \frac{ds_1}{1 + \dfrac{y^2}{2 \cdot a \cdot \rho_0}}$$

desenvolvendo o denominador em série, obtem-se

$$ds = \left(1 - \frac{y^2}{2 \cdot a \cdot \rho_0}\right) \cdot ds_1$$

Considerando a Figura 5.7., deduz-se que

$$ds_1 = \frac{dy}{\cos \alpha}$$

e que

$$s_1 = \frac{y_B - y_A}{\cos \alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{y_B - y_A}{s_1}$$

logo

$$ds = \left(1 - \frac{y^2}{2 \cdot a \cdot \rho_0}\right) \cdot \frac{s_1}{y_B - y_A} \cdot dy$$

Integrando a expressão anterior, obtem-se a seguinte expressão para s

$$s = \frac{s_1}{y_B - y_A} \cdot \int_{y_A}^{yB} \left(1 - \frac{y^2}{2 \cdot a \cdot \rho_0}\right) \cdot dy = \frac{s_1}{y_B - y_A} \cdot \left\{ \left[y\right]_{y_A}^{y_B} - \left[\frac{y3}{6 \cdot a \cdot \rho_0}\right]_{y_A}^{y_B} \right\} = \cdots$$

$$= s_1 - \frac{s_1}{6 \cdot a \cdot \rho_0} \cdot \left(y_B^2 + y_B \cdot y_A + y_A^2\right)$$

logo, a correção s_1-s é dada por

$$s_1 - s = \frac{s_1}{6 \cdot a \cdot \rho_0} \cdot \left(y_B^2 + y_B \cdot y_A + y_A^2 \right) \qquad (5.85)$$

Bibliografia

Catalão, J. (2010). Projeções cartográficas, FCUL-DEGGE, 79 pp.

Gaspar, J. A. (2000). Cartas e projeções cartográficas, 2ª edição, Lidel-Edições Técnicas, Lda., 292 pp.

Goussinsky, B. (1951). On the classification of map projetions, Empire Survey Review, 11.

Instituto Geográfico e Cadastral (1972). Cartografia Matemática, Cadernos Técnicos e de Informação, nº 31, 135 pp.

Maling, D. H. (1992). Coordinate systems and map projetions, 2nd edition, Pergamon Press, Oxford.

Maling, D.H. (1968). The terminology of map projetions, International Yearbook of Cartography VIII.

Pagarete, J. (1984). Transformação de coordenadas em Geodesia e Cartografia, LNEC.

Richardus, P. and R. K. Adler (1972). Map projetions, North-Holland Publishing Company, Amesterdam, 174 pp.