TEXTOS E NOTAS

30

COMPLEMENTOS DE MEDIDA E INTEGRAÇÃO

José Francisco Rodrigues

CMAF — Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais — Instituto Nacional de Investigação Científica — Universidades de Lisboa

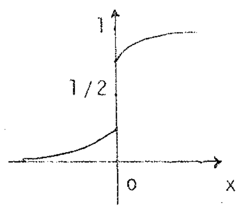
1983

CAPITULO 3 DECOMPOSIÇÃO E REPRESENTAÇÃO DE MEDIDAS

INTRODUÇAO

§ 3.1 Consideremos, da teoria elementar das Probabilidades, o seguinte exemplo de função de distribuição sobre os reais:

(3.1) $$F(x) = \frac{1}{2} F_a(x) + \frac{1}{2} F_d(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad , \quad \text{onde}$$



$$F_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt, \quad \text{e}$$

$$F_d(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} ,$$

ou seja, F é uma combinação da lei normal (ou de Laplace--Gauss) com uma lei discreta concentrada na origem. Uma vez que F é uma função não-decrescente e contínua à direita, através das fórmulas usuais do §1.16 podemos definir uma medida ν (de facto uma probabilidade) sobre $\mathbb{R}$, pondo $\nu(]-\infty,x]) = F(x)$. De modo análogo, e indicando por ν_a e ν_d as medidas associadas a F_a e F_d, respectivamente, pela decomposição (3.1) é fácil concluir que se tem

(3.1') $$\nu = \frac{1}{2}\nu_a + \frac{1}{2}\nu_d.$$

Comparando cada uma das medidas desta decomposição com a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$, as seguintes conclusões são imediatas: toda a carga de ν_d está concentrada no ponto 0, ou seja, num conjunto de medida de Lebesgue nula; a medida $\nu_a(A)$ dum conjunto arbitrário A de medida de Lebesgue nula é também nula. Ambas são casos simples das seguintes definições abstractas.

Uma medida ν sobre uma σ-álgebra diz-se *concentrada* num conjunto mensurável A se $\nu(E)=0$ para todo o $E \subset A^c$. Duas medidas ν_1 e ν_2 dizem-se *mutuamente singulares*, e indica-se por $\nu_1 \perp \nu_2$, se existe um par de conjuntos disjuntos A e B, tal que, ν_1 está concentrada em A e ν_2 está concentrada em B.

Uma medida ν sobre uma σ-álgebra diz-se *absolutamente contínua* relativamente a outra medida μ, e indica-se por $\nu \ll \mu$, se $\nu(A)=0$ para todo o conjunto mensurável A tal que $\mu(A)=0$.

O exemplo exposto é um caso particular do teorema de Lebesgue da decomposição duma medida em duas, uma singular e outra absolutamente contínua relativamente a uma terceira. Por outro lado, a medida ν_a é absolutamente contínua relativamente à medida de Lebesgue, uma vez que é definida a partir da função densidade da probabilidade $f(t) = e^{-t^2/2}/\sqrt{2\pi}$ (veja-se o Teor. 1.3 juntamente com os exercícios I-12 e III-3). Este facto é geral, dado que qualquer medida finita ν absolutamente contínua relativamente a μ tem a representação do teorema 1.3 do §1.11 , para uma única função (de densidade) f. Este resultado, de importância fundamental em Análise, tem o nome dos seus autores, o matemático austríaco J.Radon (1913) e do polaco O.Nikodym (1930). Entre as várias demonstrações possíveis, aquela que seguiremos e que se deve a von Neumann (1940), tem a vantagem de fornecer simultaneamente a decomposição de Lebesgue e a representação de Radon-Nikodym.

§ 3.2 Nessa demonstração utiliza-se o seguinte resultado, o qual também tem uma interpretação probabilística: se as médias duma função g estão num conjunto fechado S, então também os valores de g têm de estar quase sempre em S.

PROPOSIÇÃO 3.1 Suponhamos $g \in L^1(X,\mu)$, $\mu(X)<\infty$ e seja

$S \subset \mathbb{C}$ um conjunto fechado. Se para qualquer conjunto mensurável A, $\mu(A)>0$, a média

(3.2) $$\frac{1}{\mu(A)}\int_A g \, d\mu \in S \quad \text{então} \quad g(x)\in S \;, \text{ q.t. } x\in X.^{(*)}$$

Dem: Seja $z\in\mathbb{C}-S$ e $D_r(z)=\{w\in\mathbb{C}:|z-w|<r\}$ tal que $D_r(z)\cap S=\emptyset$. Como $S^c=\mathbb{C}-S$ é uma reunião numerável de discos daquele tipo, se provarmos que o conjunto $A=\{x\in X:g(x)\in D_r(z)\}$ é de medida nula, resultará facilmente que $g(x)\in S$, q.s. $x\in X$.

Suponhamos então, por absurdo, que $\mu(A)>0$. Tem-se

$$\left|\frac{1}{\mu(A)}\int_A g\,d\mu - z\right| = \frac{1}{\mu(A)}\left|\int_A g\,d\mu - \int_A z\,d\mu\right| \le \frac{1}{\mu(A)}\int_A |g-z|\,d\mu < r$$

o que contradiz a hipótese $\frac{1}{\mu(A)}\int_A g\,d\mu\in S$. Portanto $\mu(A)=0$ o que implica $\mu(g^{-1}(S^c))=0$ e prova a proposição. $\square$

O TEOREMA DE RADON-NIKODYM E DE LEBESGUE

§ 3.3 Consideremos agora aquele que é um dos teoremas mais importantes da teoria de medida. Começamos por demonstrá-lo para as medidas positivas finitas deixando uma generalização para o parágrafo seguinte.

(*) Em particular, se $S=\{0\}$ obtém-se a propriedade (g) do teorema 1.2. Veja-se ainda uma outra aplicação no exercício III-1.

TEOREMA 3.1 Sejam μ e ν duas medidas positivas finitas numa σ-álgebra $\mathfrak{S}$ dum conjunto X. Então tem-se:

i) *decomposição de Lebesgue* de ν relativamente a μ, i.e., existe um par único de medidas ν_a e ν_s sobre $\mathfrak{S}$ tais que,

(3.3) $$\nu = \nu_a + \nu_s \;,\; \nu_a << \mu \quad e \quad \nu_s \perp \mu \;,$$

as quais são ainda positivas e mutuamente singulares;

ii) *representação de Radon-Nikodym* de $\nu_a(\nu_a<<\mu)$ relativamente a μ, ou seja, existe um único $f\in L^1(\mu)$ tal que

(3.4) $$\nu_a(A) = \int_A f\,d\mu \quad , \quad \text{para todo} \quad A\in\mathfrak{S}.$$

Dem: a) A unicidade da decomposição e da representação resultam do seguinte argumento: se existem dois pares (ν_a,ν_s) e (ν_a',ν_s') nas condições descritas, pondo $\nu_a = f\,d\mu$ e $\nu_a' = f'd\mu$, tem-se

$$f\,d\mu + \nu_s = \nu = f'd\mu + \nu_s' \quad , \quad \text{com} \quad f,f'\in L^1(\mu),$$

donde resulta imediatamente

$$\int_A (f-f')\,d\mu = (\nu_s' - \nu_s)(A) \quad , \text{ para todo o } \quad A\in\mathfrak{S};$$

sendo esta relação identicamente nula, pois o conjunto de pontos de A onde ν_s e ν_s' são não nulas é de medida μ-nula (visto que $\nu_s \perp \mu$ e $\nu_s' \perp \mu$), resulta $f=f'$ quase sempre $[\mu]$ e, consequentemente, $\nu_s' = \nu_s$.

b) A demonstração da existência é construtiva e podemos baseá-la essencialmente em três etapas : α-numa aplicação de teorema de Riesz em $L^2(\mu+\nu)$: β-numa aplicação astuciosa do teorema da convergência monótona e γ - na construção de f e de ν_s.

α - Considerando $\mu+\nu$ obtemos uma medida positiva finita sobre $\mathfrak{S}$, para a qual se tem para $\phi=\chi_A (A \in \mathfrak{S})$

$$(3.5) \qquad \int_X \phi \, d(\mu+\nu) = \int_X \phi \, d\mu + \int_X \phi \, d\nu ,$$

o que é equivalente à definição de soma das medidas μ e ν; facilmente se estende (3.5) às funções simples e, em seguida, às funções mensuráveis não-negativas. Considere-se agora o funcional linear

$$\Lambda : L^2(\mu+\nu) \ni \phi \mapsto \Lambda\phi = \int_X \phi \, d\nu \in \mathbb{C} ,$$

o qual, pela desigualdade de Schwarz e sendo $(\mu+\nu)(X)<\infty$,

$$\left| \int_X \phi \, d\nu \right| \leq \int_X |\phi| d\nu \leq \int_X |\phi| d(\mu+\nu) \leq \left[(\mu+\nu)(X)\right]^{1/2} \|\phi\|_2 ,$$

resulta contínuo, ou seja , $\Lambda \in \left[L^2(\mu+\nu)\right]'$. Então pelo teorema de Riesz (teorema 2.13) existe $g \in L^2(\mu+\nu)$, único, tal

que

$$(3.6) \qquad \int_X h \, d\nu = \int_X hg d(\mu+\nu) \quad , \quad \forall h \in L^2(\mu+\nu) .$$

β - Seja $A \in \mathfrak{S}$, arbitrário , tal que $(\mu+\nu)(A)>0$. Fazendo $h=\chi_A$ em (3.6) , obtemos

$$0 \leq \nu(A) = \int_A g \, d(\mu+\nu) \leq (\mu+\nu)(A) ,$$

e aplicando a proposição 3.1 , com $S=[0,1]$, podemos concluir

$$0 \leq g(x) \leq 1 \quad , \quad \text{q.t.} x \in X ,$$

e considerar os conjuntos

$$(3.7) \qquad E = \{x \in X : 0 \leq g(x) < 1\} \quad e \quad F = \{x \in X : g(x)=1\} ;$$

fazendo em (3.6), $h=\chi_A(1+g+\ldots+g^n)$, $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathfrak{S}$, vem

$$(3.8) \qquad \int_A (1-g)(1+g+\ldots+g^n) d\nu = \int_A g(1+g+\ldots+g^n) d\mu \ , \quad \forall A \in \mathfrak{S};$$

do primeiro termo, aplicando o teorema da convergência monótona, resulta

$$(3.9) \qquad \int_{A \cap E} (1-g^{n+1}) d\nu \uparrow \nu(A \cap E) \ , \text{ quando } n \uparrow \infty ,$$

visto que $g=1$ em F e, em E, $g^{n+1}(x) \downarrow 0$ para $n \uparrow \infty$; por outro lado, fazendo $h=\chi_F$ em (3.6) (F dado por (3.7)), vê-se que $\mu(F)=0$ e, novamente pelo teorema da convergência monótona na, do segundo membro de (3.8) obtem-se

$$(3.10) \qquad \int_A g(1+g+\dots g^n)\,d\mu = \int_{A\cap E} g\,\frac{1-g^{n+1}}{1-g}\,d\mu \uparrow \int_{A\cap E} \frac{g}{1-g}\,d\mu,$$

quando $n\uparrow\infty$.

γ - Pelos resultados anteriores, definindo-se

$$\nu_a(A) = \nu(A\cap E)\ ,\ \nu_s(A) = \nu(A\cap F)\quad ,\ \forall A\in\mathfrak{S}$$

$$f = g/(1-g) \quad \text{em} \quad E \quad \text{e} \quad f=0 \text{ em } E^c,$$

obtem-se imediatamente a decomposição de Lebesgue (3.3), com $\nu_s\perp\mu$ (visto que $\mu(F)=0$) e a representação (3.4) a qual implica imediatamente $\nu_a\ll\mu$. Finalmente, tem-se $\nu_s\perp\nu_a$ dado que, de ser $\nu_s\perp\mu$, vem ν_s concentrada num conjunto B com $\mu(B)=0$ e, portanto, também $\nu_a(B)=0$, pois já se viu que $\nu_a\ll\mu$. □

MEDIDAS REAIS E COMPLEXAS

§ 3.4 Seja μ uma medida positiva definida num espaço mensurável $(X,\mathfrak{S})$ e f uma função complexa de $L^1(X,\mu)$. A aplicação

$$(3.11) \qquad \mathfrak{S}\ni A \longmapsto \nu(A) = \int_A f\,d\mu \in \mathbb{C}\ .$$

é, como se pode verificar facilmente (ver ex. III-3) uma aplicação complexa σ-aditiva , i.e., dada uma *partição*

arbitrária $\{A_i\}\subset\mathfrak{S}$ de A $(A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ e $A_i\cap A_j = \emptyset$ se $i\neq j)$ tem-se

$$(3.12) \qquad \nu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)\ .$$

Esta série é absolutamente convergente porque, permutando arbitrariamente os índices, a união não se altera e, portanto, o rearranjo dos termos na soma (3.12) mantém-na inalterável.

Associada a uma aplicação complexa ν, σ-aditiva, podemos associar uma aplicação positiva $|\nu|$ sobre $\mathfrak{S}$, definindo

$$(3.13) \qquad |\nu|(A) = \sup\sum_{i=1}^{\infty} |\nu(A_i)| \qquad (A\in\mathfrak{S}),$$

sendo o supremo tomado relativamente a *todas* as partições $\{A_i\}$ de A. Note-se que se tem $|\nu|(A)\geq|\nu(A)|$ sendo, em geral, a igualdade falsa. A aplicação $|\nu|$ chama-se *variação total* de ν, ou medida de variação total, uma vez que também se costuma chamar variação total de ν ao número $|\nu|(X)$.

Podemos agora introduzir o conceito de medida complexa: uma qualquer aplicação ν de $\mathfrak{S}$ em $\mathbb{C}$ diz-se uma *medida complexa* se (i) fôr σ-aditiva e (ii) de variação total limitada, ou seja, $|\nu|(X)<\infty$. De facto, esta segunda condição é uma consequência da primeira (veja-se o Theorem 6.4 de [R]) dado que o espaço vectorial $\mathbb{C}$ tem dimensão finita.(*)

(*) Com efeito, na definição duma medida vectorial tomando valores num espaço de Banach arbitrário, a condição $|\nu|(X)<\infty$ é essencial.

Deixamos como exercício (Ex. III-4) a verificação de que a variação total $|\nu|$ duma medida complexa ν é uma medida positiva. É claro que se ν fôr uma medida positiva, tem-se $|\nu|=\nu$. Contudo observemos que, pelas definições introduzidas, ν só pode ser considerada uma medida complexa se fôr finita. As medidas que têm por contradomínio $\mathbb{R}$ dizem-se *reais*, *cargas* ou *medidas com sinal* ("signed measures").

É fácil verificar que o conjunto de todas as medidas complexas numa mesma σ-álgebra $\mathfrak{S}$ de X, com

$$(c_1\nu_1+c_2\nu_2)(A)=c_1\nu_1(A)+c_2\nu_2(A), \quad A\in\mathfrak{S}, c_1,c_2\in\mathbb{C},$$

e

$$\|\nu\|=|\nu|(X),$$

resulta um espaço vectorial normado completo, constituindo um espaço de Banach (ver Ex.III-6). É claro que as definições de medidas *mutuamente singulares* e de *continuidade absoluta*, introduzidas no §3.1, se estendem sem alteração às medidas complexas. Em particular, a aplicação ν definida por (3.11) é um exemplo duma medida complexa (pois $|\nu|(X)=\|f\|_1<\infty$, ver exercício III-2) que é absolutamente contínua relativamente à medida positiva μ. Vejamos a recíproca, ou seja, a extensão do teorema de Radon-Nikodym no caso complexo.

§ 3.5 **TEOREMA 3.2** (Radon-Nikodym e Lebesgue) Sejam μ uma medida positiva σ-finita e ν uma medida complexa, ambas sobre um mesmo espaço mensurável $(X,\mathfrak{S})$. Então são ainda válidas a decomposição de Lebesgue (3.3) e a representação de Radon-Nikodym (3.4).

Dem: Na demonstração do teorema 3.1 a condição $(\mu+\nu)(X)<\infty$ é essencial.

A primeira extensão ao caso de μ ser σ-finita resulta facilmente decompondo $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ com $\mu(X_n)<\infty$, e, sem perda de generalidade, supondo os X_n disjuntos(*). No caso de ν ser uma medida positiva finita, podemos aplicar o teorema 3.1 a cada um dos X_n. Obtemos uma decomposição de Lebesgue de ν em cada X_n a qual se estende sem dificuldade a X por "colagem", e obtemos funções f_n em X_n, as quais, pondo $f_{|X_n}=f_n$, definem um único $f\in L^1(X,\mu)$ verificando (3.4), uma vez que $\nu(X)<\infty$.

Em seguida, podemos demonstrar o caso geral por decomposição da medida complexa ν em parte real e parte imaginária, dado que cada uma destas medidas reais é ainda decomponível na diferença de duas medidas positivas finitas: se $\nu=\nu_1+i\nu_2$, ponha-se $(j=1,2)$

$$\nu_j=\nu_j^+-\nu_j^- \quad \text{com} \quad \nu_j^+=\tfrac{1}{2}(|\nu_j|+\nu_j) \text{ e } \nu_j^-=\tfrac{1}{2}(|\nu_j|-\nu_j),$$

às quais se pode aplicar a primeira extensão acima indicada. $\square$

A função f que aparece na representação (3.4) é cha

(*) Com efeito, basta substituir $\{X_n\}$ por $\{A_n\}$ pondo $A_1=X_1$ e $A_n=X_n-\bigcup_{j=1}^{n-1}A_j$.

mada a *derivada de Radon-Nikodym* de ν_a relativamente a μ e costuma ser representada por $d\nu_a/d\mu$, ou ainda $d\nu_a = f\ d\mu$. No caso particular em que ν_a é uma probabilidade e μ a medida de Lebesgue, se $\nu_a << \mu$, então a função $f = d\nu_a/d\mu$ costuma-se chamar uma *densidade* de probabilidade.

§ 3.6 Uma consequência importante do teorema de Radon-Nikodym é a possibilidade de se reduzir o problema da integração duma função relativamente a uma medida complexa (o chamado *integral de Radon*) à teoria do integral de Lebesgue para as medidas positivas. Isto resulta do teorema seguinte, também chamado da *representação* (ou decomposição) *polar* duma medida complexa, por analogia com os números complexos.

TEOREMA 3.3 Se ν é uma medida complexa em $(X,\mathfrak{S})$, então existe uma função h, tal que, $|h|=1$ q.s.$[|\nu|]$ e $d\nu = h d|\nu|$.

Dem: Sendo obviamente $\nu << |\nu|$, tem-se que existe $h = d\nu/d|\nu| \in L^1(|\nu|)$. Seja $A \in \mathfrak{S}$, com $|\nu|(A)>0$. Pela proposição 3.1 com $S=\{z:|z|\leq 1\}$ e, pela definição de h, de

$$\left|\frac{1}{|\nu|(A)}\int_A h\ d|\nu|\right| = \frac{|\nu(A)|}{|\nu|(A)} \leq 1 ,$$

conclui-se que $|h|\leq 1$ a menos dum conjunto de medida - $[\nu]$ nula.

Se mostrarmos que o conjunto $B_1=\{x:|h(x)|<1\}$ é de medida nula o teorema ficará demonstrado. Isso resulta por

ser para qualquer $B_r=\{x:|h(x)|<r\}, 0<r<1$ e qualquer partição $\{E_i\}$ de B_r,

$$\sum_i |\nu(E_i)| = \sum_i \left|\int_{E_i} h\ d|\nu|\right| \leq \sum_i r|\nu|(E_i) = r|\nu|(B_r) ,$$

donde sai $|\nu|(B_r) < |\nu|(B_r)$ se $r<1$. Então terá de ser $|\nu|(B_1)=0$. $\square$

O integral de Radon duma função $f \in L^1(|\nu|)$ será então definido por (vejam-se os exercícios III-8,9):

$$\int_A f\ d\nu = \int_A fh d|\nu| .$$

DECOMPOSIÇÃO DE HAHN E DE JORDAN

§ 3.7 Nesta secção consideraremos apenas medidas reais, retomando de um modo mais sistemático a decomposição já utilizada na segunda extensão do teorema 3.2, que é o análogo, para as medidas, da decomposição de funções em parte positiva e parte negativa.

TEOREMA 3.4 Seja ρ uma medida real um espaço mensurável $(X,\mathfrak{S})$. Então têm-se

(i) a *decomposição de Jordan* de ρ de um modo único na diferença de duas medidas positivas finitas

$$\rho = \rho^+ - \rho^- \quad \text{com} \quad \rho^+ \perp \rho^- , \tag{3.14}$$

(ρ^+ e ρ^- são, respectivamente, a variação positiva e negativa de ρ); e

(ii) a *decomposição de Hahn* do conjunto X na união disjunta de dois conjuntos mensuráveis P e N (i.e. $P\cup N=X$ e $P\cap N=\emptyset$) tais que

(3.15) $\rho^+(A)=\rho(A\cap P)$ e $\rho^-(A)=-\rho(A\cap N)$, $\forall A\in\mathfrak{S}$, ou seja, "P comporta toda a carga positiva de ρ" e "N toda a carga negativa de ρ" (esta decomposição de X não é única).

Dem: Pela definição de medida real, a sua variação total $|\rho|$ é limitada, tendo-se então que

(3.16) $$\rho^+=\frac{1}{2}(|\rho|+\rho) \quad \text{e} \quad \rho^-=\frac{1}{2}(|\rho|-\rho) ,$$

são duas medidas positivas finitas que dão a decomposição (3.14), sendo $\rho^+\perp\rho^-$ uma consequência de (3.15). A unicidade da decomposição de Jordan resulta ainda de (3.15), uma vez que se $\tilde{P}$ e $\tilde{N}$ representarem outra decomposição de Hahn é claro que $\rho(P\cap\tilde{N})=\rho(\tilde{P}\cap N)=0$ donde se tira facilmente, pelas relações (3.15), que $\tilde{\rho}^+=\rho^+$ e $\tilde{\rho}^-=\rho^-$.

Mostremos agora a existência da decomposição de Hahn. Pelo teorema 3.3 tem-se $d\rho=h\, d|\rho|$, com $h=\pm1$ visto que ρ é uma medida real. Obtem-se uma partição de X, pondo

$$P=\{x:h(x)=1\} \quad \text{e} \quad N=\{x:h(x)=-1\}$$

a qual não é única visto a função h estar definida a menos de um conjunto de medida - $|\rho|$ nula. Usando (3.16) tem-se

$$\rho^+(A) = \frac{1}{2}\int_A (d|\rho|+d\rho) = \frac{1}{2}\int_A (1+h)d|\rho| = \int_{A\cap P} hd|\rho| = \rho(A\cap P),\text{e}$$

$$\rho^-(A) = \rho^+(A)-\rho(A)=\rho(A\cap P)-\Big[\rho(A\cap P)+\rho(A\cap N)\Big]=-\rho(A\cap N). \qquad \square$$

§ 3.8 **Alguns autores consideram a possibilidade de uma medida real ρ poder tomar o valor $+\infty$, sendo então ρ^+ uma medida positiva não necessariamente finita e ρ^- uma medida positiva finita.**

O teorema de Radon-Nikodym (e, por consequência , também o teorema 3.4) pode então ser generalizado ao caso em que ρ é uma medida real σ-finita absolutamente contínua relativamente a uma medida positiva σ-finita μ. Usando em seguida a decomposição de Hahn para este caso e o integral de Radon, pode-se ainda provar aquele teorema para duas cargas σ-finitas ρ e μ desde que $\rho<<|\mu|$. Contudo nestes casos apenas se obtem $d\rho/d\mu\in L^1_{loc}(\mu)$.

DUALIDADE E REPRESENTAÇÃO DE L^P

§ 3.9 Observando que L^2 é um espaço de Hilbert, nos quais pelo teorema da dualidade de Riesz, todos os funcionais lineares contínuos são obtidos pelo produto interno, já referimos o isomorfismo entre L^2 e o seu dual que permite identificar os elementos deste às funções daquele. Usámos, aliás, este facto de modo decisivo na demonstração do teorema de Radon-Nikodym. Por sua vez, este pode ser usado para se mostrar que todos os funcionais lineares contínuos sobre L^p, para $1 \leq p < \infty$, podem ser univocamente associados a um elemento de L^q (q expoente conjugado de $p, q=\infty$ se $p=1$) por meio duma representação integral, resultado este que ainda se deve, essencialmente, a Riesz (1910).

No entanto, no caso limite $p=\infty$, tal não se verifica uma vez que, em geral, o espaço de todos os funcionais lineares contínuos sobre L^∞ contém estritamente L^1. (veja-se o exercício III-11).

TEOREMA 3.5 (Riesz) Seja μ uma medida positiva σ-finita sobre X, p um real, $1 \leq p < \infty$, e q o seu expoente conjugado ($q=p/(p-1)$ se $p>1$ e $q=\infty$ se $p=1$). Então a cada funcional linear contínuo Λ sobre L^p corresponde um único $g \in L^q$ tal que.

$$\Lambda(f) = \int_X fg \, d\mu \ , \ \forall f \in L^p \ , \tag{3.17}$$

sendo o isomorfismo assim definido uma isometria, ou seja,

$$\|\Lambda\|_* = \|g\|_q \ . \tag{3.18}$$

Dem: É claro que a aplicação $L^q \ni g \mapsto \Lambda \in (L^p)'$ definida por (3.17) é linear, injectiva e contínua, visto que pela desigualdade de Hölder, se tem

$$\|\Lambda\|_* = \sup_{\|f\|_p=1} |\Lambda(f)| \leq \|g\|_q \qquad (1 \leq p < \infty) \ . \tag{3.19}$$

Para provarmos a sobrejectividade e (3.18), consideremos $\Lambda \in (L^p)'$ (podendo supôr $\|\Lambda\|_* > 0$, pois caso contrário $g=0$ **resolve a questão), (i) primeiro** sob a hipótese $\mu(X) < \infty$, com o **que construímos uma medida complexa** $\nu \ll \mu$, a qual, por aplicação do teorema de Radon-Nikodym, fornecerá a função g. Em seguida (ii) trata-se de mostrar que essa função g está de facto em $L^q(\mu)$ e verifica (3.18), passando-se finalmente (iii) ao caso de μ ser σ-finita usando a técnica das recolagens.

i) No caso $\mu(X) < \infty$, defina-se ν pondo, para qualquer conjunto mensurável $A \subset X$,

$$\nu(A) = \Lambda(\chi_A) \ .$$

Da linearidade e continuidade de Λ, se $A = \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j$ com $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, tem-se que ν é σ-aditiviva, pois

$$\nu(A) = \Lambda(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j}) = \lim_{n\to\infty} \Lambda(\sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \Lambda(\chi_{A_j}) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j)$$

uma vez que, sendo $\chi_A = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}$, $|\chi_A - \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j}|^p$ converge para 0 quando $n\uparrow\infty$ e é dominado uniformemente por χ_A^p, e, pelo teorema de convergência dominada, $\sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j} \underset{n\to\infty}{\to} \chi_A$ em L^p para $1\leq p<\infty$. Por outro lado, da desigualdade

$$|\nu(A)|=|\Lambda(\chi_A)|\leq\|\Lambda\|_*\|\chi_A\|_p=\|\Lambda\|_*[\mu(A)]^{1/p}$$

conclui-se que ν é absolutamente contínua relativamente a μ. Então existe $g\varepsilon L^1(\mu)$, tal que $d\nu=g\,d\mu$, i.e.,

$$\Lambda(\chi_A) = \int_A g\,d\mu = \int_X \chi_A g\,d\mu\ , \quad (\forall\ A \text{ mensurável}, A\subset X).$$

Por linearidade, tem-se

(3.20) $$\Lambda(f) = \int_X fg\,d\mu\ ,$$

para as funções simples, e, por continuidade, também para todo o $f\varepsilon L^\infty(\mu)$, uma vez estas podem ser aproximadas uniformemente (e, portanto, também em $L^p(\mu)$ por ser $\mu(X)<\infty$) por funções simples.

ii) O caso de medida finita ficará demonstrado se se tiver

(3.21) $$\|g\|_q\leq\|\Lambda\|_*\ , \quad \text{para } 1<q\leq\infty\ ,$$

uma vez que então de (3.20), sendo L^∞ denso em L^p, resulta a representação (3.17) e de (3.21), juntamente com (3.19), sai (3.18).

Se $p=1$, de (3.20) resulta em particular (com $f=\chi_A$)

$$\left|\int_A g\,d\mu\right|\leq\|\Lambda\|_*\|\chi_A\|_1=\|\Lambda\|_*\mu(A)\ ,$$

donde se conclui, pela proposição 3.1, que $|g(x)|\leq\|\Lambda\|_*$ q.s., ou seja (3.21) para $q=\infty$.

Se $1<p<\infty$, pondo $A_n=\{x:0<|g(x)|\leq n\}$ e fazendo $f_n=\chi_{A_n}\bar{g}|g|^{q-2}\ \varepsilon\ L^\infty(\mu)$ em (3.20), obtem-se

$$\int_{A_n}|g|^q\,d\mu = \int_X f_n g\,d\mu = \Lambda(f_n)\leq\|\Lambda\|_*\|f_n\|_p = \|\Lambda\|_*\left(\int_{A_n}|g|^q\right)^{1/p},$$

dado que $|f_n|^p=|g|^q$ em A_n. Donde, aplicando o lema de Fatou,

(3.22) $$\|g\|_q^q\leq\liminf_{n\to\infty}\int_X \chi_{A_n}|g|^q\,d\mu\leq\|\Lambda\|_*^q\ ,$$

obtendo-se (3.21) para $1<q<\infty$.

iii) No caso geral σ-finito, se $X=\bigcup_{j=1}^{\infty}X_j$ com $\mu(X_j)<\infty$, pelos resultados anteriores tem-se a existência duma função $g_n\varepsilon L^q(X)$ representando o funcional Λ em cada um dos $A_n=\bigcup_{j=1}^{n}X_j$ e sendo nula em $X-A_n$.

É claro que $g_{n+1}=g_n$ q.s. em A_n, pela unicidade da representação, donde se conclui que os g_n definem uma função g mensurável em X. Tendo-se (3.21) em cada um dos A_n, segue-se logo $\|g\|_\infty\leq\|\Lambda\|_*$ se $p=1$. Se $1<p<\infty$, por um argumento análogo a (3.22), obtem-se ainda (3.21) para o caso σ-finito, tendo-se, em particular, $g\varepsilon L^q(X)$ para $1<q\leq\infty$.

Pelo teorema de convergência dominada, se $f\varepsilon L^p(X), 1\leq p<\infty$, vê-se facilmente que $f\chi_{A_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ em $L^p(X)$, donde resulta

$$(3.23) \qquad \Lambda(f) = \lim_{n\to\infty} \Lambda(f\chi_{A_n}) = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} fg \, d\mu = \int_X fg \, d\mu .$$

Esta segunda passagem ao limite é ainda uma consequência do teorema da convergência dominada, pois $fg \in L^1(X)$ pela desigualdade de Hölder. Portanto (3.23) fornece a representação de Λ em X e (3.21) com (3.19) a isometria do isomorfismo $\Lambda \leftrightarrow g$. □

§ 3.10 O teorema que acabámos de demonstrar permite estabelecer uma outra propriedade importante dos espaços L^p, $1<p<\infty$, a sua reflexividade. Recordemos que, em geral, um espaço de Banach B diz-se *reflexivo* se ele pode ser identificado com o seu bidual B", i.e., o dual do seu dual (B')', através do isomorfismo $I: B \ni f \longmapsto If \in B''$ dado por

$$If(\Lambda) = \Lambda(f) \quad , \quad \forall \Lambda \in B' .$$

TEOREMA 3.6 L^p é reflexivo para $1<p<\infty$.

Dem: Seja $B=L^p$ e $B' \ni \Lambda \leftrightarrow g \in L^q$, $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ o isomorfismo do teorema anterior. Então a cada $\Phi \in B''$ corresponde $\tilde{\Phi} \in (L^q)'$, tal que $\Phi(\Lambda) = \tilde{\Phi}(g)$ onde

$$\Lambda(f) = \int_X fg \, d\mu \qquad \forall f \in L^p .$$

Analogamente, de $(L^q)' \ni \tilde{\Phi} \leftrightarrow f \in L^p$, tem-se

$$\tilde{\Phi}(g) = \int_X fg \, d\mu \qquad \forall g \in L^q ,$$

donde resulta o isomorfismo natural

$$If(\Lambda) = \Lambda(f) = \int_X fg \, d\mu = \tilde{\Phi}(g) = \Phi(\Lambda) \quad , \quad \forall \Lambda \in B' . \qquad \square$$

Um caso importante nas aplicações é o espaço $L^p(\Omega)$ sendo Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$, o qual é reflexivo se e só se $1<p<\infty$. Com efeito, se $L^1(\Omega)$ fosse reflexivo, como também é separável, por um resultado da análise funcional (veja-se [Y] pág. 126, por exemplo), o seu dual $L^\infty(\Omega)$ também teria que ser separável o que não é o caso, como já observámos. De facto o dual de L^∞ é maior que L^1 e é formado pelas funções de conjunto *finitamente* aditivas, absolutamente contínuas e de variação total limitada (veja-se [Y], exemplo 5 da pág. 118).

MEDIDAS DE RADON

§ 3.11 Até aqui temos definido uma medida como uma função σ-aditiva definida sobre uma σ-álgebra $\mathfrak{S}$ dum conjunto X, o qual muitas vezes não precisava de qualquer topologia. Este é o ponto de vista da Teoria da Medida abstracta. Sob um outro ponto de vista, o da Análise Funcional, uma medida pode ser definida como um funcional linear contínuo sobre o espaço das funções contínuas com suporte compacto: $C_c(X)$.

Seja então X um espaço de Hausdorff localmente compacto (podemos pensar num aberto Ω de $\mathbb{R}^n$) e seja μ uma medida de Borel complexa definida em cada subconjunto compacto de X.(*) Diremos que μ é regular se $|\mu|$ é regular, ou seja se verifica a condição (c) do Teorema 1.6. É oportuno referir que toda a medida de Borel positiva localmente finita (i.e., tal que $\mu(K)<\infty$ para todo o compacto $K \subset X$) sobre um espaço métrico X, localmente compacto e σ-compacto (i.e., tal que X é uma união numerável de compactos) é regular (veja-se [R] pag. 50 ou [Mℓ] pag. 74). Em particular, toda a medida de Borel localmente finita definida num aberto de $\mathbb{R}^n$ é regular.

Se μ é uma medida de Borel complexa já vimos como se pode definir o integral de Radon duma função ϕ. Obtem-se então um funcional linear contínuo sobre $C_c(X)$ definindo (o integral é tomado no sentido de §3.6, no suporte de ϕ)

$$(3.24) \qquad <\mu,\phi> = \int_X \phi \, d\mu \quad \text{para} \quad \phi \in C_c(X) \, ,$$

ao qual se dá o nome de *medida de Radon* sobre o espaço X. A continuidade de $<\mu,\cdot>$ é tomada aqui no sentido de, para cada compacto $K \subset X$, existir uma constante $c(K)$, tal que para todo o $\phi \in C_c(X)$ com supp $\phi \subset K$, se tem

(*) Concordantemente à definição anterior de medida complexa, o exigir a priori, que μ esteja definida apenas nos compactos de X significa que $|\mu|(K)<\infty$, para todo o compacto $K \subset X$, e pressupõe uma condição trivial de compatibilidade nos compactos não disjuntos.

$$|<\mu,\phi>| \leq c\,(K) \sup_X |\phi(x)| \, .$$

Por outras palavras, se $\phi_j \to \phi$ uniformemente, com supp $\phi_j \subset K, \forall_j$, para um mesmo compacto K, então $<\mu,\phi_j> \underset{j}{\to} <\mu,\phi>$. A medida de Radon diz-se *limitada* se a constante $c=c(K)$ fôr independente de K, o que acontece no caso de $|\mu|(X)<\infty$. A medida de Radon diz-se *positiva* se verificar $<\mu,\phi>\geq 0, \forall \phi \geq 0$.

No caso de a medida de Radon definida por (3.24) ser limitada, o funcional linear $\Lambda=<\mu,\cdot>$ é limitado sobre $C_c(X)$ e, uma vez que $C_c(X)$ é denso em $C_0(X)$ para a norma do supremo, tem-se que Λ admite uma única extensão num elemento de $(C_0(X))'$, dual do espaço de Banach $C_0(X)$.(*) O recíproco é conhecido pelo teorema da *representação de Riesz* ou de *Radon-Riesz*, e caracteriza todos os funcionais lineares contínuos sobre $C_c(X)$, podendo-se encontrar a demonstração, por exemplo em [Mℓ], pag. 62 ou [R], pags. 42 e 139.

TEOREMA 3.7 Para cada medida de Radon $<\mu,.>$ sobre um espaço de Hausdorff localmente compacto X, existe uma única medida de Borel, complexa, regular, definida nos compactos de X, tal que se tem a representação (3.24) sobre $C_c(X)$. Se a medida de Radon fôr positiva então a medida de Borel μ

(*) Uma função $f \in C_0(X)$ se "se anula no infinito", i.e., para todo $\varepsilon>0$ existe um conjunto compacto $K \subset X$ tal que $|f(x)|<\varepsilon$ para $x \in X-K$.

é positiva. Finalmente, se $<\mu,.>=\Lambda$ fôr limitada, a representação (3.24) é ainda válida para todo o $\phi\in C_0(X)$, a medida μ é finita e tem-se $\|\Lambda\|_* = |\mu|(X)$.

As medidas de Radon formam um espaço vectorial com uma topologia não normável que contém o subespaço $(C_0(X))'$, o qual é um espaço de Banach para a norma usual $\|.\|_*$.

§ 3.12 No caso particular de se considerar um aberto Ω de $\mathbb{R}^n$, obtem-se uma medida de Radon a partir de uma função $f\in L^1_{loc}(\Omega)$, definindo

$$<\mu,\phi> = \int_\Omega \phi\ f\ dx \quad , \quad \phi\in C_c(\Omega).$$

Isto conduz à afirmação, usual na teoria das distribuições, de que a noção de medida generaliza a noção de função, uma vez que, por outro lado, há medidas de Radon que não podem ser representadas por funções localmente integráveis. É bem conhecido o exemplo da *medida de Dirac* em $a\in\Omega$,

$$<\delta_a,\phi> = \phi(a) \quad , \quad \phi\in C_c(\Omega) .$$

Com efeito, escolhendo para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno

$$C_c(\Omega) \ni \phi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \exp\ (-\varepsilon^2/(\varepsilon^2-|x-a|^2)) \text{ para } x\in B_\varepsilon=\{|x-a|<\varepsilon\} \\ 0 \quad , \quad \text{para } |x-a|\geq\varepsilon \end{cases}$$

tem-se $<\delta_a,\phi_\varepsilon> = 1/e$, enquanto que, para todo $f\in L^1_{loc}(\Omega)$,

$$|<f,\phi_\varepsilon>| = |\int_{B_\varepsilon} \phi_\varepsilon f dx| \leq \frac{1}{e}\int_{B_\varepsilon} |f| dx \downarrow 0 \quad qd.\varepsilon\downarrow 0,$$

donde se conclui a impossibilidade de representar δ_a por uma função localmente integrável.

EXERCÍCIOS

III-1) Seja $f \in L^1(X,\mu)$ uma função complexa de $b \in \mathbb{R}_+$.

Se

$$\left|\int_A f\, d\mu\right| \leq b\mu(A) \quad , \quad \forall A \in \mathcal{G}: \mu(A) < \infty$$

então tem-se $|f(x)| \leq b$ q.t. $x \in X$.

III-2) Para $f \in L^1(X,\mu)$, (f complexa, μ medida positiva) mostre que a aplicação ν definida por $\nu(A) = \int_A f\, d\mu$ é uma medida complexa. Mostre que $|\nu|(A) = \int_A |f|\, d\mu$, $A \in \mathcal{G}$ e $|\nu|(X) = \|f\|_1$.

III-3) Se numa σ-álgebra $\mathcal{G}$, μ é uma medida positiva e ν é uma medida complexa, mostre que

$$\nu \ll \mu \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \mu(A) < \delta \Rightarrow |\nu(A)| < \varepsilon \qquad (A \in \mathcal{G})$$

III-4) Mostre que a variação total $|\nu|$ duma medida complexa é uma medida positiva finita.

III-5) Se ν, ν_1, ν_2 forem medidas complexas e μ uma medida positiva, se verificam as seguintes propriedades:

a) $\nu_1 \perp \nu_2 \Rightarrow |\nu_1| \perp |\nu_2|$

b) $\nu_1 \perp \mu$ e $\nu_2 \perp \mu \Rightarrow (\nu_1+\nu_2) \perp \mu$

c) $\nu_1 \ll \mu$ e $\nu_2 \ll \mu \Rightarrow (\nu_1+\nu_2) \ll \mu$

d) $\nu \ll \mu \Rightarrow |\nu| \ll \mu$

e) $\nu_1 \ll \mu$ e $\nu_2 \perp \mu \Rightarrow \nu_1 \perp \nu_2$

f) $\nu \ll \mu$ e $\nu \perp \mu \Rightarrow \nu = 0$.

III-6) Se ρ é uma medida real dada por

$$\rho(A) = \int_A f\, d\mu \quad \text{com} \quad f \in L^1(X,\mu) \text{ real}$$

então

$$\rho^+(A) = \int_A f^+\, d\mu \quad \text{e} \quad \rho^-(A) = \int_A f^-\, d\mu$$

III-7) Se ρ é uma medida real então o integral de Radon é dado por

$$\int_X f\, d\rho = \int_X f\, d\rho^+ - \int_X f\, d\rho^- \quad , \quad \forall f \in L^1(|\rho|)$$

III-8) Seja ν uma medida complexa e μ uma medida σ-finita ≥ 0. Se $\nu \ll \mu$ e $f = d\nu/d\mu$ então

$$\int_X g\, d\nu = \int_X g\, f\, d\mu \quad , \quad \forall g \in L^1(|\nu|)$$

III-9) Se ν é uma medida complexa mostre que

$$\left|\int_A g\, d\nu\right| \leq \int_A |g|\, d|\nu| \quad , \quad \forall g \in L^1(|\nu|)$$

III-10) Mostre que o espaço das medidas complexas é um espaço de Banach para $\|\nu\| = |\nu|(X)$.

III-11) Dado um espaço de medida σ-finita (X,μ) mostre que L^1 é o espaço das formas lineares contínuas Λ sobre L^∞ que passam ao limite para a convergência simples limitada : se $f_n \to 0$ q.s. $|\mu|$ e $\|f_n\|_\infty \leq C^{te}$ então $\Lambda(f_n) \to 0$.