

FÍSICA/MECÂNICA DOS MEIOS CONTÍNUOS

Problemas - Série 3

Escoamento potencial

1. Para um vórtice de linha dado por

$$\mathbf{u} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \hat{\theta} \quad (1)$$

calcule a circulação Γ' num circuito que inclua o vórtice, o potencial de escoamento ϕ e a função de corrente ψ . Mostre que o potencial complexo é dado por

$$w = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \log(z), \quad (2)$$

onde $z = re^{i\theta}$.

2. O campo de velocidades

$$u_r = \frac{Q}{2\pi r}, \quad u_\theta = 0, \quad (3)$$

onde Q é uma constante, corresponde ao campo de velocidades de uma linha de fontes se $Q > 0$ ou de sumidouros se $Q < 0$. a) Mostre que o escoamento é irrotacional e que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ exceto para $r = 0$, onde a velocidade não é definida. b) Determine o potencial de escoamento e a função de corrente e mostre que o potencial complexo é

$$w = \frac{Q}{2\pi} \log(z). \quad (4)$$

3. a) Desenhe as linhas de corrente para o escoamento:

$$u = \alpha x, \quad v = -\alpha y, \quad w = 0, \quad (5)$$

onde α é uma constante positiva.

b) O escoamento é rotacional? Se não for, determine o potencial de escoamento.

c) A concentração de um poluente é dada por:

$$c(x, y, t) = \beta x^2 y e^{-\alpha t}, \quad (6)$$

para $y > 0$, onde β é uma constante. A concentração do poluente muda com o tempo, para um determinado elemento de fluido?

4. Um circuito fechado C de partículas de fluido é dado por, em $t = 0$,

$$\mathbf{x} = (a \cos s, a \sin s, 0), \quad 0 \leq s \leq 2\pi, \quad (7)$$

de forma que a cada valor de s entre 0 e 2π corresponde a uma partícula de fluido. Sendo $C(t)$ dado por:

$$\mathbf{x} = (a \cos s + a\alpha t \sin s, a \sin s, 0), \quad 0 \leq s \leq 2\pi. \quad (8)$$

- a) Calcule a velocidade $\mathbf{u}(s, t)$ de cada partícula de fluido, e mostre que as partículas em $s = 0$ e $s = \pi$ permanecem em repouso. b) Calcule a aceleração de cada partícula de fluido, mostre que $\mathbf{u} = (\alpha y, 0, 0)$, e esboce a forma como $C(t)$ muda com o tempo. c) Por definição,

$$\Gamma = \int_{C(t)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} ds. \quad (9)$$

Calcule o último integral explicitamente no instante t e confirme que é independente de t , de acordo com o teorema de Kelvin.

5. a) Mostre que numa região simplesmente conexa de um escoamento irrotacional o integral $\phi = \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}$ é independente do caminho entre O e P .
b) Mostre que numa região simplesmente conexa de um escoamento bidimensional e incompressível o integral

$$\psi = \int_O^P u dy - v dx \quad (10)$$

é independente do caminho entre O e P e portanto pode-se usar como definição da função de corrente.

6. Considere o potencial de escoamento em coordenadas polares $\phi = Br^2 \cos(2\theta)$ onde B é uma constante. a) Mostre que o campo de velocidades satisfaz a equação da continuidade e, portanto, existe uma função de corrente ψ . b) Determine $\psi(r, \theta)$. c) Determine o ponto de estagnação.
7. Um escoamento irrotacional em 2D é caracterizado pela função de corrente $\psi = A(x - c)y$, onde A and c são constantes. Um cilindro circular de raio a é introduzido com o seu centro na origem. a) Determine o potencial complexo e a função de corrente do escoamento resultante. b) Calcule a força exercida no cilindro.
8. Considere uma fonte de fluido pontual na posição $(d, 0, 0)$, em coordenadas cartesianas. A fonte é colocada perto de uma parede sólida em $x = 0$.
a) Escreva o potencial de escoamento que satisfaz a equação de Laplace, $\nabla^2 \phi = 0$, na ausência da parede.
b) Mostre que a solução que satisfaz as condições de fronteira (especifique) na presença da parede é obtida adicionando à solução anterior uma fonte virtual, com a mesma intensidade, em $(-d, 0, 0)$ (método das imagens).
c) Calcule o campo de velocidades em coordenadas polares.
d) Determine os pontos de estagnação.
e) Calcule a força na parede exercida pelo fluido. Justifique a direção e sentido desta força.
9. Considere um escoamento irrotacional de um fluido ideal, com velocidade uniforme U no infinito, através de um cilindro de raio a .
a) Mostre que o potencial de escoamento satisfaz a equação de Laplace, $\nabla^2 \phi = 0$.
b) Mostre que a solução que satisfaz as condições de fronteira apropriadas (especifique) é dada por

$$\phi = U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta. \quad (11)$$

e calcule o campo de velocidades em coordenadas polares.

- c) Considere agora que existe circulação Γ no sentido horário em torno do cilindro, e obtenha uma expressão para o potencial de escoamento e os pontos de estagnação. Compare com o caso em que a circulação é zero.

- d) Calcule a função de corrente para o cilindro em rotação e use-a para desenhar (com um software gráfico) quatro linhas de corrente próximas do cilindro para $\Gamma/(2\pi Ua) = 3$.
- e) Calcule a força que atua no cilindro na direção perpendicular à velocidade U , quando a circulação é Γ . Compare com o caso em que a circulação é zero.
- f) Compare os resultados das alíneas anteriores com os resultados para uma circulação no sentido anti-horário.
10. Considere um cilindro em escoamento extensional, cujo potencial de escoamento é $\phi(r, \theta) = (Ar^2 + Br^{-2})\cos(2\theta)$.
- a) Mostre que o potencial de escoamento satisfaz a equação de Laplace, $\nabla^2\phi = 0$, em coordenadas cilíndricas.
- b) Calcule o campo de velocidades, impondo as condições de fronteira adequadas.
- c) Esboce as linhas de corrente.
- d) Calcule o limite do campo de velocidades para distâncias muito maiores do que o raio do cilindro, a , e justifique o termo usado para o escoamento. Sugestão: use coordenadas cartesianas.
- e) Calcule a força exercida pelo fluido na superfície do cilindro.
11. Um hemisfério sólido de raio a está sobre uma superfície plana na presença de uma corrente livre U (ver figura 1). Suponha que o escoamento é irrotacional e o fluido é ideal.
- a) Mostre que o potencial de escoamento satisfaz a equação de Laplace, $\nabla^2\phi = 0$.
- b) Calcule o potencial de escoamento usando as condições de fronteira apropriadas (especifique) e calcule o campo de velocidades em coordenadas esféricas. Há pontos de estagnação?
- c) Calcule a função de corrente. Use-a para desenhar (com um software gráfico) cinco linhas de corrente próximas do hemisfério e ao longo do plano central (paralelo ao escoamento e que passa pelo centro do hemisfério).
- d) Calcule a força de elevação e de arrasto. Discuta.
- e) Mostre que a densidade do material deve ser

$$\rho_h \geq \rho \left(1 + \frac{33U^2}{64ag} \right) \quad (12)$$

para que o sólido se mantenha sobre a superfície.

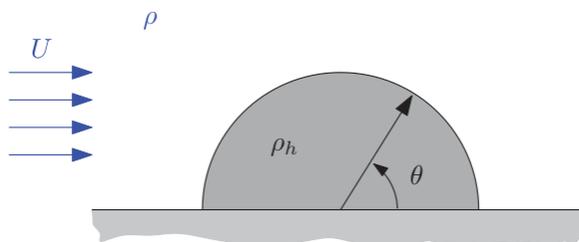


Figure 1: Hemisfério.