UNIVERSIDADE DE LISBOA - FCUL

# FÍSICA/MECÂNICA DOS MEIOS CONTÍNUOS

## Problemas - Série 4
## Navier-Stokes

1. a) Mostre que para um fluido incompressível a equação de Navier-Stokes

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p^* - \eta \nabla \times \Omega$$

se pode escrever

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p^* + \eta \nabla^2 \mathbf{u}.$$

b) Mostre que um tensor de ordem dois se pode escrever

$$T_{ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij}T_{mm} + \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji} - \frac{2}{3}\delta_{ij}T_{mm}\right) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}),$$

onde o primeiro tensor é isotrópico, o segundo é simétrico e o terceiro anti-simétrico. Escreva os tensores das tensões e das taxas de deformação nesta forma e discuta o significado físico de cada um deles.

2. Considere um plano com inclinação $\alpha$ com a horizontal, onde temos uma camada de fluido de espessura $d$. O fluido, de viscosidade $\eta$, tem uma superfície livre e está sujeito a um campo gravitacional $g$.

a) Calcule a velocidade em função da distância da placa e a taxa de escoamento para uma espessura constante e uniforme $d$.

b) Discuta as aproximações necessárias para que se possa considerar o escoamento na vertical estacionário.

3. Considere um escoamento viscoso na vertical, num tubo de seção transversal circular com $r = a$, sob a ação da gravidade.

a) Calcule o campo de velocidades.

b) Calcule a taxa de escoamento no tubo.

c) Calcule o raio necessário para o escoamento deixar de ser laminar, supondo que a viscosidade cinemática é $\nu = 10^{-6}$ m$^2$/s.

4. Um filme de óleo flui, por ação da gravidade, na região anular entre dois cilindros concêntricos. Considere a espessura do canal de escoamento $\delta$, o raio do cilindro interior $a$, a densidade do fluido $\rho$, a viscosidade do fluido $\eta$, e a aceleração da gravidade $g$.

a) Escreva a equação de Navier-Stokes para o escoamento. Mostre que a equação de Navier-Stokes é equivalente ao balanço de forças num volume infinitesimal de fluido $dV = 2\pi r\, dr\, dx$.

b) Considere o óleo newtoniano e use as condições de fronteira para obter o perfil de velocidades, no regime estacionário.

c) Calcule e represente a tensão de corte, no domínio de escoamento, e determine as regiões do canal onde a tensão é máxima.

d) Determine os perfis de velocidade na presença de gradientes de pressão não nulos, na direção de $g$, e o valor desse gradiente para o qual o escoamento cessa. Comente.

e) Calcule o gradiente de pressão necessário para que a água escoe num canal com $\delta = 10cm$ (viscosidade $1mPa.s$) com velocidade média igual a $1m/s$, na presença e na ausência da gravidade. Suponha $a = 100cm$.

5. Considere um catéter de raio $\varepsilon R$ colocado concentricamente num vaso sanguíneo de raio $R$. Determine a redução na taxa de escoamento do sangue. Suponha o escoamento estacionário e a mesma queda de pressão com e sem catéter. Trate o sangue como um fluído Newtoniano.

6. Um filme de óleo flui, por ação da gravidade, num canal de placas paralelas. Considere a espessura do canal de escoamento $\delta$, a densidade do fluido $\rho$, a viscosidade do fluido $\eta$, e a aceleração da gravidade $g$.

   a) Escreva a equação de Navier-Stokes e a partir daí, ou de outra forma, deduza a equação para o balanço das forças no canal.

   b) Considere o óleo newtoniano e use as condições de fronteira para obter o perfil de velocidades, no regime estacionário.

   c) Calcule e represente a tensão de corte, no domínio de escoamento, e determine as regiões do canal onde a tensão é máxima.

   d) Determine os perfis de velocidade na presença de gradientes de pressão não nulos, na direção de $g$, e o valor desse gradiente para o qual o escoamento cessa. Comente.

   e) Suponha agora que o óleo escoa por uma parede vertical plana. Considere a espessura da camada de óleo constante e igual a $\delta$. Qual é a tensão de corte na extremidade livre da camada de óleo? Calcule o perfil de velocidades do óleo.

7. Considere um catéter de raio $R_c$ numa artéria de raio $R$. O catéter move-se com velocidade constante $V$. O sangue escoa através da região anular entre $R_c$ e $R$, sob um gradiente de pressão $\Delta p/L$, a qual varia apenas na direcção do escoamento. Pretende-se determinar o efeito do catéter na tensão de corte em $r = R$. Suponha que o escoamento é estacionário e que o fluido é newtoniano.

   a)Escreva as condições para o balanço das forças a partir da equação de Navier-Stokes e as condições de fronteira.

   b)Desenhe o perfil de velocidades e dê uma justificação para a sua forma.

   c)Resolva as equações de balanço. Substitua a lei de Newton da viscosidade e resolva as equações resultantes. Aplique as condições de fronteira para determinar o perfil de velocidades.

   d)Calcule a tensão de corte.

   e)Use os dados $R = 0.17$ cm, $R_c = 0.15$ cm, $V = 10$cm/s, $\mu = 0.03$ g/cm.s, $\Delta p/L = 100$ dyn/cm$^3$, para calcular a tensão de corte na superfície da artéria.

8. Um tipo de viscómetro envolve a rotação de um cilindro de raio $R$ e comprimento $L$ com velocidade $\omega$ constante, num volume de líquido. O cilindro é comprido, $L \gg R$. Longe da superfície do cilindro o fluido está em repouso e a pressão é constante (fluido infinito).

   a) Escreva a equação de Navier-Stokes para o escoamento. Mostre que a equação de Navier-Stokes é equivalente ao balanço de forças num volume infinitesimal de fluido.

   b)Desenhe o perfil de velocidades para um fluido Newtoniano.

   c)Determine o perfil de velocidades $v_\theta(r)$. Explicite as condições de fronteira.

   d)Calcule o torque exercido no cilindro pelo fluido.

e)Descreva como este aparelho pode ser usado para determinar a viscosidade de um fluido Newtoniano.

9. Um fluido de Bingham flui por acção da gravidade, entre duas placas paralelas (infinitas) separadas por uma distância $2b$. Suponha que o escoamento é laminar e estacionário. Considere um fluido com densidade $\rho$, viscosidade $\eta$, e tensão de cedência $\tau_0$, num campo gravítico com aceleração $g$. O módulo da tensão aumenta linearmente com o módulo da taxa de deformação, i.e. a equação constitutiva é $|\tau| = \tau_0 + \eta|\frac{du}{dy}|$. Note que para tensões inferiores à tensão de cedência, o fluido comporta-se como um corpo rígido e flui com velocidade constante.

   a) Escreva a equação para o balanço das forças na região onde o escoamento é não newtoniano.

   b) Calcule a distância $a$, medida a partir do centro do canal, que delimita a zona de escoamento com velocidade constante.

   c) Escreva a equação para o balanço de forças na região $a \le y \le b$.

   d) Mostre que a mesma equação de balanço se pode obter a partir da equação de Navier-Stokes.

   e) Obtenha o perfil de velocidades, usando a condição de fronteira para a velocidade em $y = b$, e a de continuidade para a tensão de corte em $y = a$.

   f) Calcule e represente a tensão de corte, no domínio de escoamento $0 \le y \le b$, e determine a região onde a tensão é máxima.

10. a) Calcule a velocidade $u(y)$ num escoamento viscoso, entre duas placas paralelas estacionárias em $y = 0$ e $y = L$, onde o fluido, de viscosidade cinemática $\nu = \eta/\rho$, escoa na direção $x$ devido a uma força (e.g., gravidade) $\mathbf{f} = f\hat{\mathbf{x}}$. b) Compare a solução analítica com a obtida numericamente usando o código fornecido (code3-Poiseuille.py) para os mesmos parâmetros.

11. Considere um conjunto de vórtices de Taylor-Green em 2D cujos campos de velocidades e pressão são dados inicialmente por:

$$u(x, y, t = 0) = -\cos(kx)\sin(ky)$$
$$v(x, y, t = 0) = \sin(kx)\cos(ky)$$

   a) Use a equação de Navier-Stokes para mostrar que a evolução temporal dos campos é

$$u(x, y, t) = -\cos(kx)\sin(ky)e^{-2\nu k^2 t}$$
$$v(x, y, t) = \sin(kx)\cos(ky)e^{-2\nu k^2 t}$$

   As variações de pressão podem ser ignoradas e as forças inerciais são desprezáveis comparadas com as forças viscosas.

   b) Calcule a energia cinética média por unidade de área. Como podemos esta quantidade para medir a viscosidade de um fluido?

   c) Introduza estas condições iniciais num dos códigos fornecidos e verifique que a viscosidade medida através da energia cinética média corresponde à viscosdade do fluido.

12. a) Verifique que no caso de um escoamento $\mathbf{u} = [u(y),\, 0,\, 0]$, a tensão se reduz a

$$\mathbf{t} = \left[\eta \frac{du}{dy},\, -p,\, 0\right]$$

   no plano $\mathbf{n} = (0,\, 1,\, 0)$. b) Mostre que os termos $\eta(\partial u_j/\partial x_i + \partial u_i/\partial x_j)$ do tensor das tensões são nulos para um escoamento uniformemente circular $\mathbf{u} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{x}$, onde $\mathbf{\Omega}$ é um vetor constate.

13. a) Usando $t_i = T_{ij}n_j$ e $T_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$, obtemos $t_i = -pn_i + \eta n_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, onde $t_i$ é a componente $i$ da tensão no elemento de superfície com normal $n_i$. Mostre que

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{n} + \eta[2(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \mathbf{n}\times(\nabla\times\mathbf{u})].$$

b) Use o resultado da alínea "a" e as identidades matemáticas necessárias para mostrar que a força resultante exercida num volume de fluido, pelo fluido circundante é

$$\int_S \mathbf{t}dS = \int_V (-\nabla p + \eta\nabla^2\mathbf{u})dV,$$

onde $S$ é a superfície do volume de fluido. Deduza que se o volume for pequeno, a força resultante, excluindo a gravidade é $-\nabla p + \eta\nabla^2\mathbf{u}$ por unidade de volume, de acordo com a equação de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis.

14. Mostre que a dissipação viscosa num fluido Newtoniano em escoamento se escreve (ver Sec. 6.5 do Faber):

$$\frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2.$$

15. O problema do escoamento viscoso em 2D, através de um cilindro circular de raio $a$, envolve o cálculo do campo de velocidades $\mathbf{u} = [u(x,y), v(x,y), 0]$ que satisfaz

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\nabla^2\mathbf{u}, \quad \nabla\cdot u,$$

com as condições de fronteira

$$\mathbf{u} = 0 \text{ em } x^2 + y^2 = a^2; \quad \mathbf{u} \longrightarrow (U,\,0,\,0) \text{ em } x^2 + y^2 \longrightarrow \infty.$$

Reescreva este problema na forma adimensional usando as variáveis adimensionais

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}/a, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u}/U, \quad p' = p/(\rho U^2)$$

em vez de $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ e $p$. Sem tentar resolver o problema, mostre que o padrão de linhas de corrente depende de $\nu$, $a$ e $U$ apenas através da combinação $Re = Ua/\nu$. Usando o código fornecido (code2-cilinder.py), verifique que escoamentos com o mesmo número de Reynolds são dinamicamente semelhantes (varie estas 3 quantidades de forma a manter $Re$ constante).

16. a) Defina o número de Reynolds, Re, e explique o seu significado.

b) O coeficiente de arrasto é defindo como a razão entre a força de arrasto e a energia cinética por unidade de comprimento do fluido, $c_a = \frac{2F_a}{\rho v^2 A}$, onde $A$ é a área de referência do objecto sobre o qual o fluido escoa. Mostre que no regime de Stokes, o coeficiente de arrasto de uma esfera depende apenas do número de Reynolds.

c) Qual é a força de arrasto sobre duas esferas com diâmetros diferentes e o mesmo número de Reynolds, quando uma se move em ar e a outra em água ? A razão entre as densidades do ar e da água é $0.125\times10^{-2}$ e entre as viscosidades é $1.875\times10^{-2}$. Suponha que o coeficiente de arrasto depende apenas do número de Reynolds.

d) A potência necessária para compensar a força de arrasto num automóvel, à velocidade $u = 30m/s$, com uma área de referência $A = 4m^2$, é determinada num túnel de vento. A área de referência do modelo não pode exceder $A_m = 0.6m^2$. Qual é a velocidade do ar que deve ser usada no túnel ?

e) Em geral, o número de Reynolds não é suficiente para garantir a semelhança dinâmica entre dois escoamentos diferentes. Justifique esta afirmação usando a equação de Navier-Stokes adimensional, ou dê um exemplo concreto de dois escoamentos diferentes com o mesmo número de Reynolds.

17. a) Defina o número de Reynolds, Re, e explique o seu significado. Mostre que no limite Re$\ll 1$ a equação de Navier-Stokes se reduz à equação de Stokes.

    b) A linearidade da equação de Stokes implica a sobreposição de soluções e a sua reversibilidade. Discuta as implicações desta linearidade no movimento de microorganismos em meios fluidos.

    c) Considere agora uma esfera com velocidade constante num fluido estacionário. Estime o valor dos parâmetros que permitem a descrição deste escoamento pela equação de Stokes.

    d) O fluido exerce uma força de resistência (drag) sobre a esfera, que pode ser obtida (a menos de constantes) por análise dimensional. Use análise dimensional para derivar a força de Stokes.

    e) Calcule a força de lift (perpendicular à velocidade) sobre a esfera e compare com a força correspondente exercida por um fluido ideal. Comente.

18. Um fluido escoa lentamente com velocidade $U$ através de uma bolha esférica de raio $a$, constituída por ar. Considere que a tensão tangencial é nula, $t_\theta = 0$, em $r = a$.

    a) Mostre que a componente normal da tensão em $r = a$ é $t_r = (3\eta U/a)\cos\theta$.

    b) Mostre que a força de arrasto na bolha é $D = 4\pi\eta U a$ na direção do escoamento livre.

    c) Considere agora que, no lugar da bolha de ar, temos uma gota constituída por outro fluido com viscosidade $\bar{\eta}$. Mostre que a força de arrasto é

$$D = 4\pi\eta U a \left( \frac{\eta + 3\bar{\eta}/2}{\eta + \bar{\eta}} \right).$$

    d) Discuta os limites $\bar{\eta}/\eta \longrightarrow 0$ e $\bar{\eta}/\eta \longrightarrow \infty$.

*Os códigos necessários para resolver os exercícios estão disponíveis em:* `https://github.com/rcvcoelho/lbm-python.git`.