2 Modelo de um tsunami

2.1 O modelo Shallow-water

A superfície livre do oceano é frequentemente caracterizada por perturbações ondulatórias que se propagam na horizontal. Essas ondas podem ocorrer em diferentes escalas e ser causadas por diferentes mecanismos. No caso das ondas longas, i.e. de ondas cujo comprimento de onda é muito maior que a profundidade do oceano, a sua dinâmica pode ser estudada recorrendo a um modelo bidimensional horizontal designado por modelo *shallow-water* (à letra, “modelo de águas pouco profundas”), relacionando a evolução temporal de 3 campos do escoamento: as duas componentes da velocidade horizontal (representando uma média ao longo da vertical) e a altitude da superfície livre, medida em relação a uma superfície de referência.

O modelo shallow-water assume que o fluido é incompressível (uma excelente aproximação para líquidos). Num referencial em rotação (efeito de Coriolis), mas sem atrito, as equações do modelo podem escrever-se (na forma de fluxo):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}(u^2) - \frac{\partial}{\partial y}(uv) + fv - g\frac{\partial h}{\partial x} \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}(uv) - \frac{\partial}{\partial y}(v^2) - fu - g\frac{\partial h}{\partial y} \\
\frac{\partial h}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}((h-b)u) - \frac{\partial}{\partial y}\big((h-b)v\big)
\end{aligned} \tag{1}$$

Onde (u, v) são as componentes (x, y) da velocidade média na vertical, h é a altitude da superfície livre, b é a altitude do fundo (ver Figura 2-1) e $f = 2\Omega \sin\phi$ é o parâmetro de Coriolis (ϕ é a latitude). As duas primeiras equações descrevem a condição de balanço do momento linear, sendo formas aproximadas da equação de Navier-Stokes. A terceira equação descreve a condição de conservação da massa de água, sendo uma forma da equação da continuidade.

A solução do sistema de equações shallow-water requer o conhecimento de condições iniciais (valores de (u, v, h) em $t = 0$, em todo o domínio espacial) e de condições fronteira espaciais (valores das mesmas variáveis, ou das suas derivadas espaciais, na fronteira ao longo do tempo). Uma perturbação da superfície livre no estado inicial dá origem a uma onda gravítica externa que se propaga na horizontal à velocidade:

$$c = \sqrt{gh}$$

2.2 Objetivos deste trabalho

Neste trabalho pretendemos:

(1) Discretize o sistema unidimensional (aula teórica) sem Coriolis e resolva-o numericamente usando um método de discretização, num domínio cíclico com 1000m de profundidade. Selecionar um ponto de teste (x_M, marégrafo) para guardar séries

temporal das variáveis dependentes $(u(x = x_M, t), h(x = x_M, t))$. Testar diferentes estados iniciais, parâmetros de discretização, condições fronteira. Note que as equações *shallow water* só são válidas para profundidades muito inferiores ao comprimento de onda das ondas externas. Fazer os gráficos adequados. Cada membro do grupo deve por a funcionar um método diferente.

(2) Discretizar o sistema shallow water para resolver a equação em duas dimensões com o método escolhido (um método por cada elemento do grupo: Lax, Leapfrog).

(3) Utilizar esse algoritmo para calcular a evolução da superfície livre da água, dada uma condição inicial, especificadas para cada grupo (cf secção 2.3), e condições fronteiras fechadas dadas por:

$$em\ x = 0, L_x: u = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$em\ y = 0, L_y: v = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

(4) Representar graficamente os resultados;

(5) Estudar a sensibilidade a variação de parâmetros (cf secção 2.3).

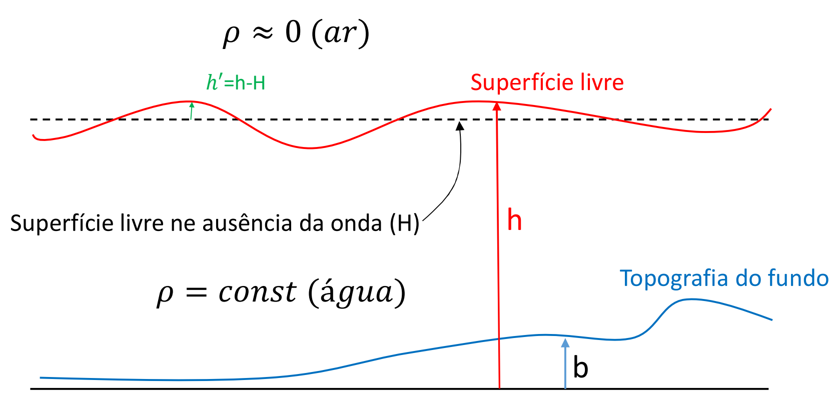

Figura 2-1 – Geometria do modelo Shallow-Water

2.3 Especificações técnicas das simulações de cada grupo

Para todos os grupos:

(1) Utilizar uma malha retangular com 1 km de resolução ($\Delta x = \Delta y = 5km$) com um domínio de $1000 \times 1200\ km$.

(2) Considerar uma superfície livre com H=5000 m de profundidade, na ausência de onda e de topografia do fundo;

(3) Perturbação inicial é dada por: $h = H + h'$, $h' = h_0 \exp\left[-\left(\frac{x-x_0}{W_x}\right)^2 - \left(\frac{y-y_0}{W_y}\right)^2\right]$, x_0, y_0, W_x, W_y dados abaixo.

(4) Calcular a velocidade máxima da onda externa; calcular Δt para o número de Courant=1. (Seria o máximo Δt para um método explícito, provavelmente será necessário um valor menor).

(5) Calcular b (topografia do fundo) incluindo uma montanha submarina na forma:

$$b_1 = h_B \exp\left[-\left(\frac{x - x_b}{B_x}\right)^2 - \left(\frac{y - y_b}{B_y}\right)^2\right]$$

E, uma rampa de extensão R desde o fundo até à profundidade de 10m.

(6) Localizar o ponto de grelha onde vai estar localizada a "estação maregráfica";

(7) Produzir uma figura com a distribuição inicial de h, e b (ver exemplos nas especificações dos grupos)

(8) Integrar pelo tempo suficiente para a onda externa percorrer o domínio 2 vezes;

(9) Analisar a solução para 4 valores de Δt, correspondentes a diferentes valores do número de Courant: 0.1, 0.5, 0.8, 1.

(10) Fazer a representação em "filme" do nível do mar (mostrando só as frames de N em N passos de tempo, e.g. N=10).

(11) Representar a evolução do nível no mar no marégrafo. Localizar a chegada da onda e comparar com uma estimativa com velocidade de propagação constante;

(12) Calcular a evolução temporal da água total no domínio. Existe conservação de massa?

(13) Calcular a energia mecânica total. Existe conservação de energia?

Parâmetros variáveis (em km):

G	ϕ	x_0	y_0	W_x	W_y	h_b	x_b	y_b	B_x	B_y	R	praia	maregrafo
1	30N	300	500	100	1000	4900	700	400	50	50	100	N	x=1000,y=995
2	45N	400	300	100	100	4850	600	800	50	100	200	E	x=1190,y=400
3	60N	300	500	100	1000	4850	600	800	100	50	200	N	x=1000,y=995
4	30S	200	800	50	300	4800	500	500	50	200	400	E	x=1190,y=400
5	45S	280	400	30	500	4850	500	700	80	80	300	N	x=1000,y=995
6	60S	300	200	100	50	4950	700	400	50	50	200	E	x=1190,y=400
7	10N	350	250	100	100	4920	800	500	50	100	150	N	x=1000,y=995

Cronograma:

PL1	Problema 1D sem Coriolis (ver aula teórica)
PL2	Dicretização 2D. Condições fronteira.
PL3	Graficos 2D
PL4	Estudos de sensibilidade
PL5	Revisão e conclusões