AULA 15

Sumário. Teorema de Sylvester.

Teorema 15.1 (Sylvester). *Para quaisquer matrizes* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ *e* $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$*, as condições seguintes são equivalentes:*

(a) $\sigma(\mathbf{A}) \cap \sigma(\mathbf{B}) = \varnothing$.

(b) *A equação* $\mathbf{AX} - \mathbf{XB} = \mathbf{0}$ *tem uma e uma só solução* $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

(c) *Para qualquer* $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{m\times n}$*, a equação* $\mathbf{AX} - \mathbf{XB} = \mathbf{C}$ *tem uma e uma só solução* $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

Demonstração. Consideramos a aplicação $\mathbf{F}\colon \mathbb{C}^{m\times n} \to \mathbb{C}^{m\times n}$ definida por

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{AX} - \mathbf{XB}, \qquad \mathbf{X} \in \mathbb{C}^{m\times n}.$$

É fácil verificar que $\mathbf{F}$ é uma aplicação linear com

$$\operatorname{Nuc}(\mathbf{F}) = \left\{\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{m\times n} \colon \mathbf{AX} - \mathbf{XB} = \mathbf{0}\right\} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(\mathbf{F}) = \left\{\mathbf{AX} - \mathbf{XB} \colon \mathbf{X} \in \mathbb{C}^{m\times n}\right\}.$$

Além disso, sabemos que

$$mn = \dim \mathbb{C}^{m\times n} = \dim \operatorname{Nuc}(\mathbf{F}) + \dim \operatorname{Im}(\mathbf{F})$$

e, portanto,

$$\operatorname{Nuc}(\mathbf{F}) = \{\mathbf{0}\} \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Im}(\mathbf{F}) = \mathbb{C}^{m\times n},$$

o que significa que (b) e (c) são equivalentes. Por conseguinte, devemos provar que (a) e (b) são equivalentes, isto é, que

$$\sigma(\mathbf{A}) \cap \sigma(\mathbf{B}) = \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Nuc}(\mathbf{F}) = \{\mathbf{0}\}.$$

Em primeiro lugar, suponhamos que $\sigma(\mathbf{A}) \cap \sigma(\mathbf{B}) = \varnothing$ e seja $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tal que $\mathbf{AX} = \mathbf{XB}$ (isto é, tal que $\mathbf{X} \in \operatorname{Nuc}(\mathbf{F})$). Seja

$$p_{\mathbf{B}}(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n, \qquad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C},$$

o polinómio característico de $\mathbf{B}$. Pelo teorema de Cayley-Hamilton, sabemos que

$$p_{\mathbf{B}}(\mathbf{B}) = \mathbf{B}^n + a_1 \mathbf{B}^{n-1} + \cdots + a_n \mathbf{I}_n = \mathbf{0}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{B}}(\mathbf{A})\mathbf{X} &= \big(\mathbf{A}^n + a_1\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_n\mathbf{I}_m\big) = \mathbf{A}^n\mathbf{X} + a_1\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{X} + \cdots + a_n\mathbf{X} \\ &= \mathbf{X}\mathbf{B}^n + a_1\mathbf{X}\mathbf{B}^{n-1} + \cdots + a_n\mathbf{X} = \mathbf{X}\big(\mathbf{B}^n + a_1\mathbf{B}^{n-1} + \cdots + a_n\mathbf{I}_n\big) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Agora, suponhamos que $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ são os valores próprios de $\mathbf{B}$. Então,

$$p_{\mathbf{B}}(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\cdots(x - \lambda_n)$$

e, portanto,

$$p_{\mathbf{B}}(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}_m)(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I}_m)\cdots(\mathbf{A} - \lambda_n\mathbf{I}_m).$$

Como $\lambda_1, \dots, \lambda_n \notin \sigma(\mathbf{A})$, todas as matrizes $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}_m, \dots, \mathbf{A} - \lambda_n\mathbf{I}_m$ são invertíveis e, portanto, $p_{\mathbf{B}}(\mathbf{A})$ também é invertível. Deste modo,

$$\mathbf{X} = p_{\mathbf{B}}(\mathbf{A})^{-1}p_{\mathbf{B}}(\mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{0},$$

provando que $\mathrm{Nuc}(\mathbf{F}) = \{\mathbf{0}\}$.

Para a implicação contrária, argumentamos por contra-recíproco: supomos que $\sigma(\mathbf{A}) \cap \sigma(\mathbf{B}) \neq \varnothing$, com vista a provar que $\mathrm{Nuc}(\mathbf{F}) \neq \{\mathbf{0}\}$. Seja $\lambda \in \sigma(\mathbf{A}) \cap \sigma(\mathbf{B})$ e seja $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ tal que $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{B}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$. Por outro lado, temos $\overline{\lambda} \in \sigma(\mathbf{A}^*)$ e, portanto, existe $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{m\times 1}$ tal que $\mathbf{v} \neq 0$ e $\mathbf{A}^*\mathbf{v} = \overline{\lambda}\mathbf{v}$. Seja $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tal que $\mathbf{C}\mathbf{w} = \mathbf{v}$; esta matriz existe: como $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, existe uma base $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ de $\mathbb{C}^{n\times 1}$ com $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}$ e, pelo teorema da extensão linear, existe (pelo menos) uma aplicação linear $\varphi\colon \mathbb{C}^{n\times 1} \to \mathbb{C}^{m\times 1}$ que satisfaz $\varphi(\mathbf{w}_1) = \mathbf{v}$, de modo que basta escolher para $\mathbf{C}$ a matriz que representa esta aplicação linear (com respeito às bases canónicas de cada um dos espaços vectoriais). Se fosse $\mathrm{Nuc}(\mathbf{F}) = \{\mathbf{0}\}$, então a aplicação $\mathbf{F}$ seria sobrejectiva e, portanto, existiria $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{C}.$$

No entanto, por um lado, temos

$$\begin{aligned} \big\langle(\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{B})\mathbf{w}|\mathbf{v}\big\rangle &= \langle\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{w}|\mathbf{w}\rangle - \langle\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle = (\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{w})^*\mathbf{v} - \overline{\lambda}\langle\mathbf{X}\mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle \\ &= \mathbf{w}^*\mathbf{X}^*\mathbf{A}^*\mathbf{v} - \overline{\lambda}\langle\mathbf{X}\mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle = \overline{\lambda}\mathbf{w}^*\mathbf{X}^*\mathbf{v} - \overline{\lambda}\langle\mathbf{X}\mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle \\ &= \overline{\lambda}\langle\mathbf{X}\mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle - \overline{\lambda}\langle\mathbf{X}\mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle = 0, \end{aligned}$$

enquanto que, por outro lado,

$$\big\langle(\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{B})\mathbf{w}|\mathbf{v}\big\rangle = \langle\mathbf{C}\mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle \neq 0$$

(porque $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$). Esta contradição prova que $\mathrm{Nuc}(\mathbf{F}) \neq \{\mathbf{0}\}$, como queríamos. □