AULA 21

SUMÁRIO. Teoria de Perron para matrizes positivas.

▷ Dizemos que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma MATRIZ POSITIVA, e escrevemos $\mathbf{A} > \mathbf{0}$, se $a_{i,j} > 0$ para quaisquer $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Dadas duas matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, escrevemos $\mathbf{A} > \mathbf{B}$ se $\mathbf{A} - \mathbf{B} > \mathbf{0}$, o que é equivalente a exigir que $a_{i,j} > b_{i,j}$ para quaisquer $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Mais geralmente, dizemos que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma MATRIZ NÃO-NEGATIVA, e escrevemos $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{0}$, se $a_{i,j} \geqslant 0$ para quaisquer $1 \leqslant i, j \leqslant n$ e, dadas duas matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, escrevemos $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{B}$ se $\mathbf{A} - \mathbf{B} \geqslant \mathbf{0}$ (o que é equivalente a exigir que $a_{i,j} \geqslant b_{i,j}$ para quaisquer $1 \leqslant i, j \leqslant n$).

LEMA 21.1. *Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz positiva. Então, $\rho(\mathbf{A}) > 0$ e $\widetilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{\rho(\mathbf{A})}\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz positiva com $\rho(\widetilde{\mathbf{A}}) = 1$.*

DEMONSTRAÇÃO. Por definição, temos $\rho(\mathbf{A}) = \max_{\lambda\in\sigma(\mathbf{A})} |\lambda| \in \mathbb{R}_0^+$. Suponhamos que $\rho(\mathbf{A}) = 0$. Então, $0 \leqslant |\lambda| \leqslant \rho(\mathbf{A}) = 0$ para qualquer $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ e, portanto, $\sigma(\mathbf{A}) = \{0\}$. Por conseguinte, $\mathbf{A}$ tem forma canónica de Jordan com blocos do tipo $\mathbf{J}_r(0)$ para $r \in \mathbb{N}$, de modo que $\mathbf{A}$ é nilpotente. Por conseguinte, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{A}^m = \mathbf{0}$, o que significa que

$$\sum_{1\leqslant i_1,\ldots,i_{m-1}\leqslant n} a_{i,i_1}a_{i_1,i_2}\cdots a_{i_{m-1},j} = 0, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Isto é impossível porque $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ (logo, $a_{i,j} > 0$ para quaisquer $1 \leqslant i, j \leqslant n$).

É claro que $\widetilde{\mathbf{A}} > \mathbf{0}$. Por outro lado, temos $\sigma(\widetilde{\mathbf{A}}) = \left\{\frac{1}{\rho(\mathbf{A})}\lambda \colon \lambda \in \sigma(\mathbf{A})\right\}$, logo

$$\rho(\widetilde{\mathbf{A}}) = \max_{\lambda\in\sigma(\mathbf{A})} \left|\frac{1}{\rho(\mathbf{A})}\lambda\right| = \frac{1}{\rho(\mathbf{A})}\max_{\lambda\in\sigma(\mathbf{A})}|\lambda| = \frac{1}{\rho(\mathbf{A})}\rho(\mathbf{A}) = 1,$$

como se queria. □

▷ De modo análogo, para qualquer vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, escrevemos $\mathbf{v} > \mathbf{0}$ (resp., $\mathbf{v} \geqslant \mathbf{0}$) se $v_i > 0$ (resp., $v_i \geqslant 0$) para qualquer $1 \leqslant i \leqslant n$ e, dados dois vectores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, escrevemos $\mathbf{v} > \mathbf{w}$ (resp. $\mathbf{v} \geqslant \mathbf{w}$) se $\mathbf{v} - \mathbf{w} > \mathbf{0}$ (resp. $\mathbf{v} - \mathbf{w} \geqslant \mathbf{0}$).

LEMA 21.2. *Para qualquer $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e quaisquer $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, valem as propriedades seguintes:*

(a) *Se $\mathbf{A} > \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \geqslant \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, então $\mathbf{A}\mathbf{v} > \mathbf{0}$.*

(b) *Se $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} \geqslant \mathbf{w} \geqslant \mathbf{0}$, então $\mathbf{A}\mathbf{v} \geqslant \mathbf{A}\mathbf{w}$.*

(c) *Se* $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{0}$*,* $\mathbf{v} \geqslant \mathbf{0}$ *e* $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$*, então* $\mathbf{A} = \mathbf{0}$*.*

(d) *Se* $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{0}$*,* $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ *e* $\mathbf{v} > \mathbf{w} > \mathbf{0}$*, então* $\mathbf{A}\mathbf{v} > \mathbf{A}\mathbf{w}$*.*

Demonstração. Exercício. □

▷ Para qualquer matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, definimos $|\mathbf{A}| \in \mathbb{R}^{n\times n(*)}$ como sendo a matriz com entradas

$$|\mathbf{A}|_{i,j} = |a_{i,j}|, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n;$$

de modo análogo, para qualquer vector $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, definimos $|\mathbf{v}| \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ como sendo o vector com componentes

$$|\mathbf{v}|_i = |v_i|, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

É claro que $|\mathbf{A}| \geqslant 0$ para qualquer $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e que $|\mathbf{v}| \geqslant 0$ para qualquer $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$.

Lema 21.3. *Para quaisquer* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *e qualquer* $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$*, tem-se*

$$|\mathbf{A}\mathbf{B}| \leqslant |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \qquad e \qquad |\mathbf{A}\mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{A}|\,|\mathbf{v}|.$$

Demonstração. Para qualquer $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e qualquer $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, temos

$$|\mathbf{A}\mathbf{v}|_i = \left|\sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_{i,j}v_j\right| \leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant n} |a_{i,j}v_j| = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} |a_{i,j}|\,|v_j| = \big(|\mathbf{A}|\,|\mathbf{v}|\big)_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

A desigualdade $|\mathbf{A}\mathbf{B}| \leqslant |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$, para quaisquer $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, prova-se de modo análogo. □

Proposição 21.4. *Para qualquer matriz positiva* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, tem-se* $\rho(\mathbf{A}) \in \sigma(\mathbf{A})$ *e existe* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ *tal que* $\mathbf{v} > \mathbf{0}$ *e* $\mathbf{A}\mathbf{v} = \rho(\mathbf{A})\mathbf{v}$*; de facto, se* $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ *for tal que* $\mathbf{A}\mathbf{u} = \rho(\mathbf{A})\mathbf{u}$*, então* $\mathbf{v} = |\mathbf{u}| > \mathbf{0}$ *e* $\mathbf{A}\mathbf{v} = \rho(\mathbf{A})\mathbf{v}$*.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz positiva tal que $\rho(\mathbf{A}) = 1$: no caso geral, basta considerar a matriz (positiva) $\widetilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{\rho(\mathbf{A})}\mathbf{A}$ e observar que o resultado será verdadeiro para $\mathbf{A}$ se e só se for verdadeiro para $\widetilde{\mathbf{A}}$. Seja $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ tal que $|\lambda| = \max_{\mu\in\sigma(\mathbf{A})} |\mu| = \rho(\mathbf{A}) = 1$ e seja $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ tal que $\mathbf{A}\mathbf{u} = \rho(\mathbf{A})\mathbf{u}$. Então,

$$|\mathbf{u}| = |\lambda|\,|\mathbf{u}| = |\lambda\mathbf{u}| = |\mathbf{A}\mathbf{u}| \leqslant |\mathbf{A}|\,|\mathbf{u}| = \mathbf{A}|\mathbf{u}|.$$

Para provar que $\mathbf{A}|\mathbf{u}| = |\mathbf{u}|$, consideramos os vectores $\mathbf{v} = \mathbf{A}|\mathbf{u}|$ e $\mathbf{w} = \mathbf{v} - |\mathbf{u}| = \mathbf{A}|\mathbf{u}| - |\mathbf{u}|$; é claro que $\mathbf{w} \geqslant \mathbf{0}$. Suponhamos que $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, isto é, que existe $1 \leqslant i \leqslant n$ tal que $w_i \neq 0$. Nesta situação, como $\mathbf{w} \geqslant \mathbf{0}$ e $|\mathbf{u}| \geqslant \mathbf{0}$, temos $\mathbf{A}\mathbf{w} > \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{A}|\mathbf{u}| > 0$ e, portanto, para qualquer $1 \leqslant i \leqslant n$, existe $\varepsilon_i \in \mathbb{R}^+$ tal que $(\mathbf{A}\mathbf{w})_i > \varepsilon_i v_i$. Por conseguinte, pondo $\varepsilon = \min_{1\leqslant i\leqslant n} \varepsilon_i$, obtemos $(\mathbf{A}\mathbf{w})_i > \varepsilon v_i$ e, portanto, $\mathbf{A}\mathbf{w} > \varepsilon\mathbf{v}$, ou seja, $\mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{A}|\mathbf{u}| = \mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{v} > \varepsilon\mathbf{v}$. Sendo assim,

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\,\mathbf{A}\mathbf{v} > \mathbf{v}.$$

(*) Não confundir com $\det(\mathbf{A})$.

Pondo $\mathbf{B} = \frac{1}{1+\varepsilon}\,\mathbf{A}$, deduzimos

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\mathbf{v} > \mathbf{v} \quad &\Longrightarrow \quad \mathbf{B}^2\mathbf{v} = \mathbf{B}(\mathbf{B}\mathbf{v}) > \mathbf{B}\mathbf{v} > \mathbf{v} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{B}^3\mathbf{v} = \mathbf{B}(\mathbf{B}^2\mathbf{v}) > \mathbf{B}\mathbf{v} > \mathbf{v} \\ &\Longrightarrow \quad \cdots \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{B}^k\mathbf{v} = \mathbf{B}(\mathbf{B}^{k-1}\mathbf{v}) > \mathbf{B}\mathbf{v} > \mathbf{v}, \qquad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como $\rho(\mathbf{B}) = \frac{1}{1+\varepsilon}\,\rho(\mathbf{A}) = \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$, sabemos que a sucessão $\mathbf{B}, \mathbf{B}^2, \mathbf{B}^3, \ldots$ é convergente com $\lim_{k\to\infty} \mathbf{B}^k = \mathbf{0}$. Sendo assim, também a sucessão $\mathbf{B}\mathbf{v}, \mathbf{B}^2\mathbf{v}, \mathbf{B}^3\mathbf{v}, \ldots$ é convergente com

$$\lim_{k\to\infty} (\mathbf{B}^k\mathbf{v}) = \big(\lim_{k\to\infty} \mathbf{B}^k\big)\mathbf{v} = \mathbf{0}\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

No entanto, como $\mathbf{B}^k\mathbf{v} > \mathbf{v}$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$, tem de ser

$$\lim_{k\to\infty} (\mathbf{B}^k\mathbf{v}) \geqslant \mathbf{v} > \mathbf{0},$$

uma contradição. Segue-se que $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, ou seja, $\mathbf{A}|\mathbf{u}| = |\mathbf{u}|$; para terminar a demonstração, notamos que $|\mathbf{u}| = \mathbf{A}|\mathbf{u}| = \mathbf{v} > \mathbf{0}$. $\square$