Modelação Numérica
Aula 2

Séries temporais e análise de Fourier

Funções (contínuas) de uma variável independente

$$V = V(t)$$

t é o tempo, mas pode ser outra variável (x ...)

Discretização: **Amostra** regular com N pontos

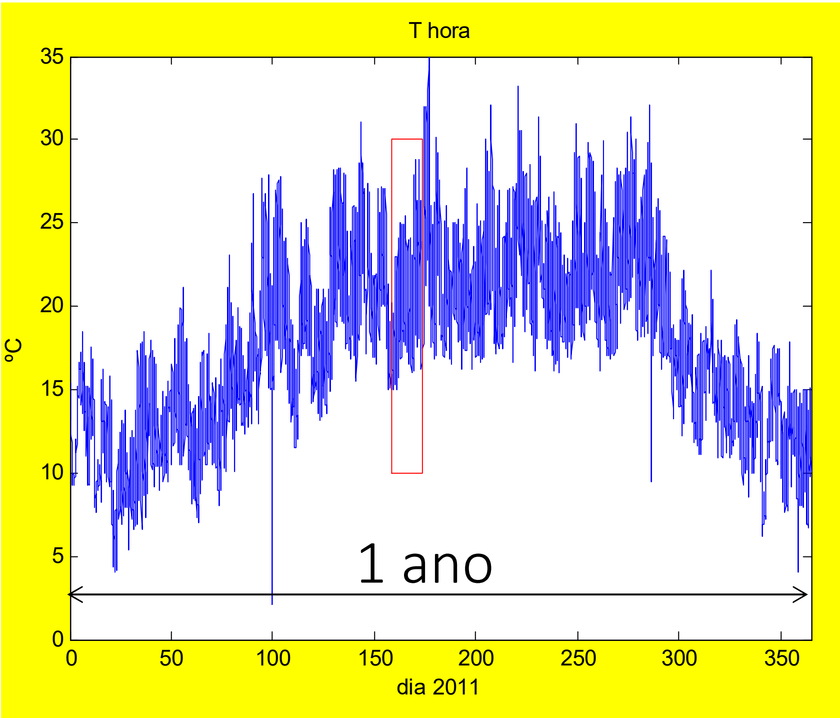
$$V_n = V(t_0 + n\Delta t), n = 0, \dots, N - 1$$

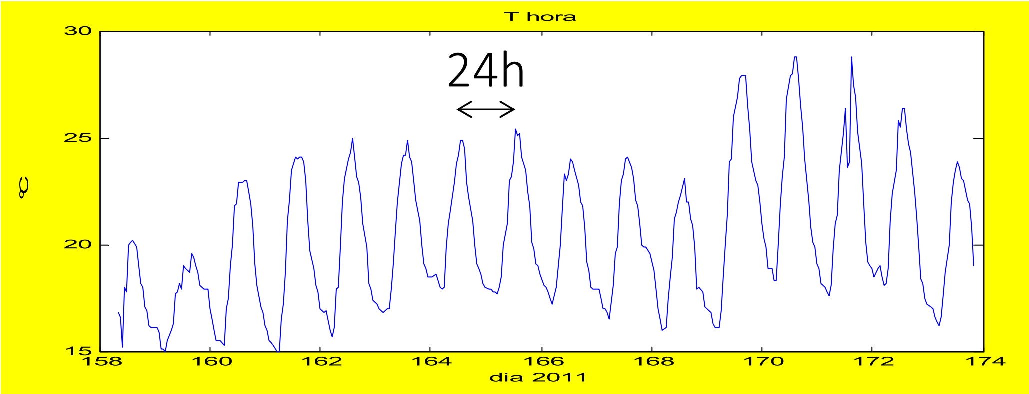
t_0 – fase inicial (amostra 0)

Δt – intervalo de amostragem (step)

V_n – número float (truncado a 64 bit)

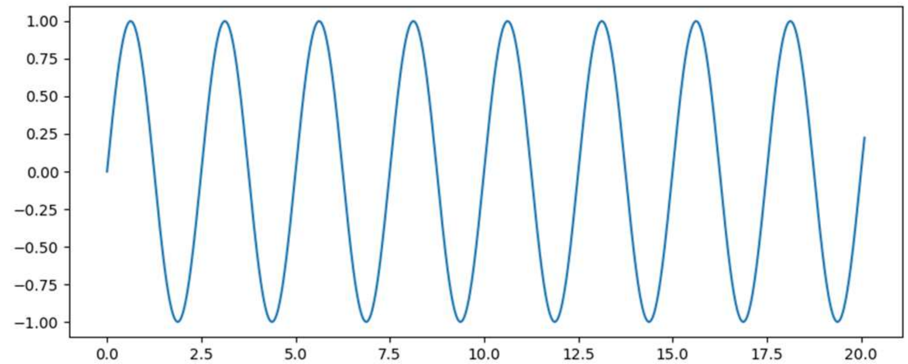
Exemplo: observações da Temperatura em Lisboa



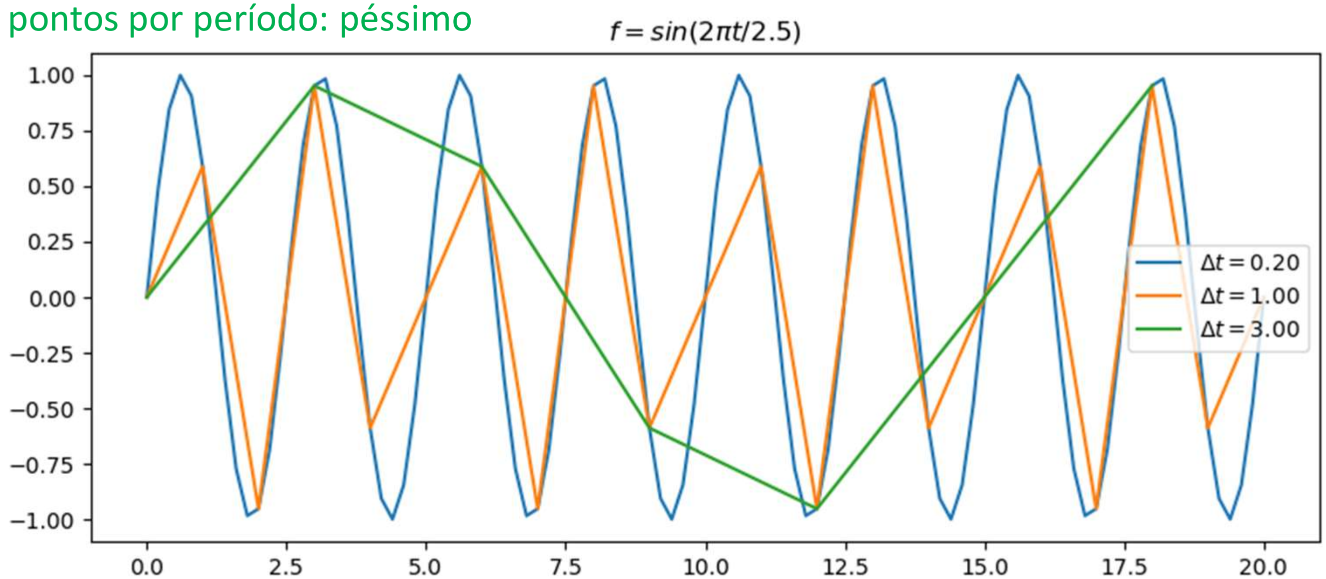


Observações horárias são suficientes para descrever os "ciclos" diurno e annual.
Não dizem nada sobre flutuações muito rápidas (sub-horárias).

Amostras de Sinusóides $\boldsymbol{t_0 = 0}$



12.5 pontos por período: razoável
2.5 pontos por período: mau
0.8 pontos por período: péssimo



Teorema da amostragem

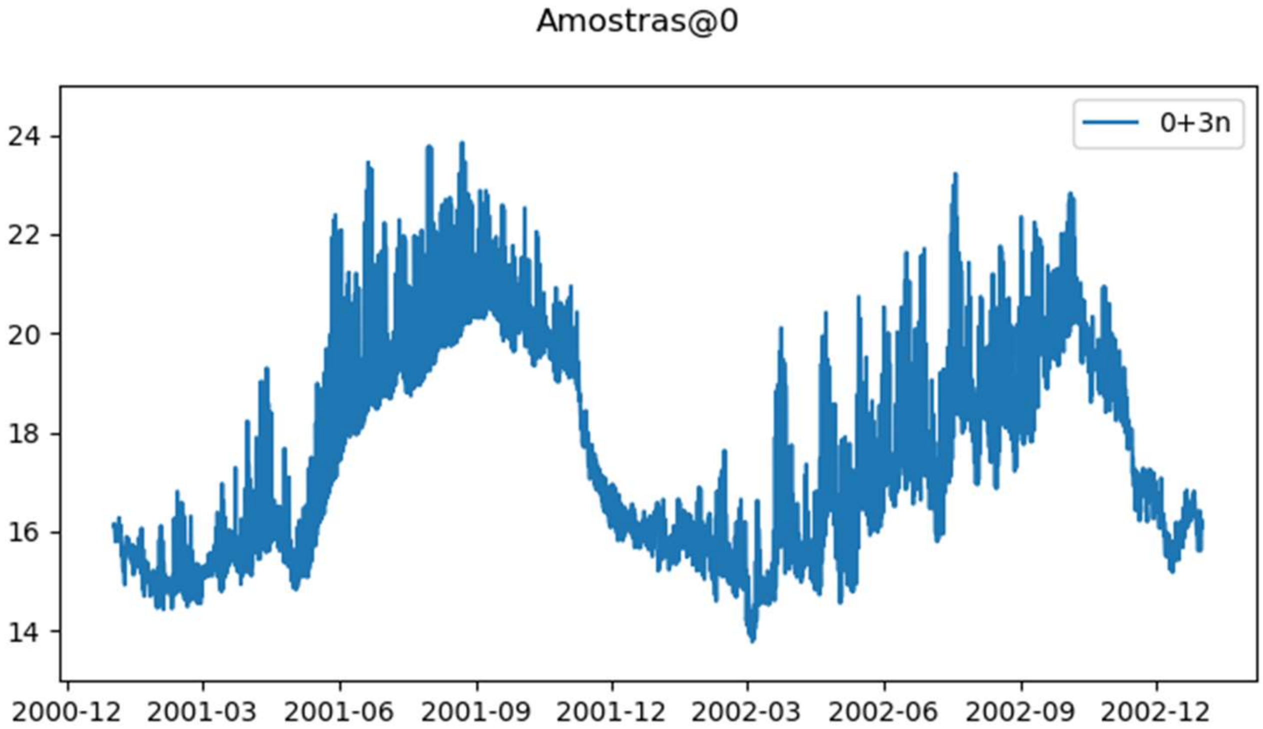
O exemplo anterior mostra que a operação de amostragem implica sempre um **erro**, mas em certos casos altera completamente a função.

No caso de uma função sinusoidal é fácil perceber que tudo depende do **Número de amostras por período**:

- Com menos de 2 amostras por período a função é falseada (***aliasing***) sendo vista como um seno com um período muito mais longo : uma amostra só pode representar períodos $\mathrm{T} \geq 2\Delta\mathrm{t}$

- Com pouco mais de 2 amostras por período a série pode apresentar artefactos. A fase também é importante.

Várias formas de amostrar uma série: start ($\boldsymbol{n_0}$, fase), step ($\mathbf{\Delta t}$)



E se a função não for uma sinusoide?

O teorema de Fourier garante que qualquer função periódica pode ser obtida pela soma de sinusoides:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \, cos \frac{2\pi k t}{T} + b_k \, sin \frac{2\pi k t}{T} \right)$$

Onde (a_k, b_k) são as amplitudes associadas à harmónica k

Em geral, precisamos de infinitas harmónicas!

Série de Fourier na forma complexa

Utilizando a formula de Euler $(e^{ix} = \cos x + i \sin x)$ pode mostrar-se que:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{\frac{i2\pi kt}{T}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-\frac{i2\pi kt}{T}}$$

Ou

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi kt/T}$$

Com os coeficientes (complexos):

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i2\pi k/T}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Transformada discreta de Fourier (1)

No caso geral o teorema de Fourier não é computável, pois requer infinitos coeficientes, e os coeficientes são calculados por meio de um integral.

Se a função for representada exatamente com um número finito de harmónicas (função de banda limitada), se o intervalo de amostragem satisfizer o teorema da amostragem $\left(\Delta t < \frac{T_{Min}}{2} \Leftrightarrow \Delta t < \frac{1}{2f_{Max}}\right)$ e se a amostra for suficientemente longa para conter um período fundamental (o mais longo), a série de Fourier é computável e exata (salvo erro de arredondamento).

Transformada discreta de Fourier (2)

Transformada discreta de Fourier (k indica a frequência)

$$F_k(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2\pi i n k/N}$$

transformada discreta inversa de Fourier (n indica)

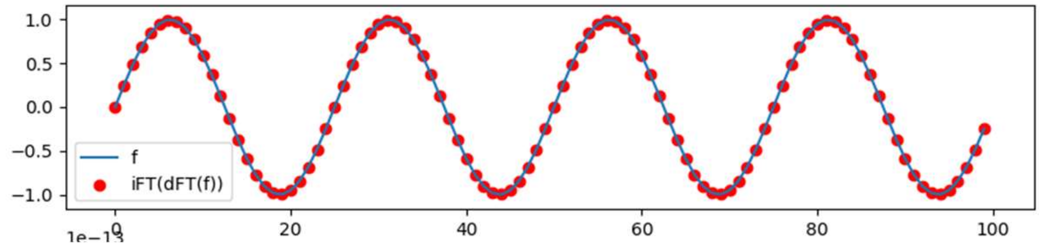
$$f_n(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{2\pi i n k/N}$$

Código naïve (lento)

```
import numpy as np;import matplotlib.pyplot as plt
def dFT(y): #transformada discreta de Fourier direta
    i=complex(0,1.);pi=np.pi
    N=len(y)
    z=np.zeros(y.shape,dtype=complex)
    for k in range(N):
        for j in range(N):
            z[k]=z[k]+y[j]*np.exp(-2*pi*i*j*k/N)
    return z
def iFT(y): #transformada discreta de Fourier inversa
    i=complex(0,1.);pi=np.pi
    N=len(y)
    z=np.zeros(y.shape,dtype=complex)
    for k in range(N):
        for j in range(N):
            z[k]=z[k]+y[j]*np.exp(2*pi*i*j*k/N)
    return z/N
```

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2\pi i n k/N}$$

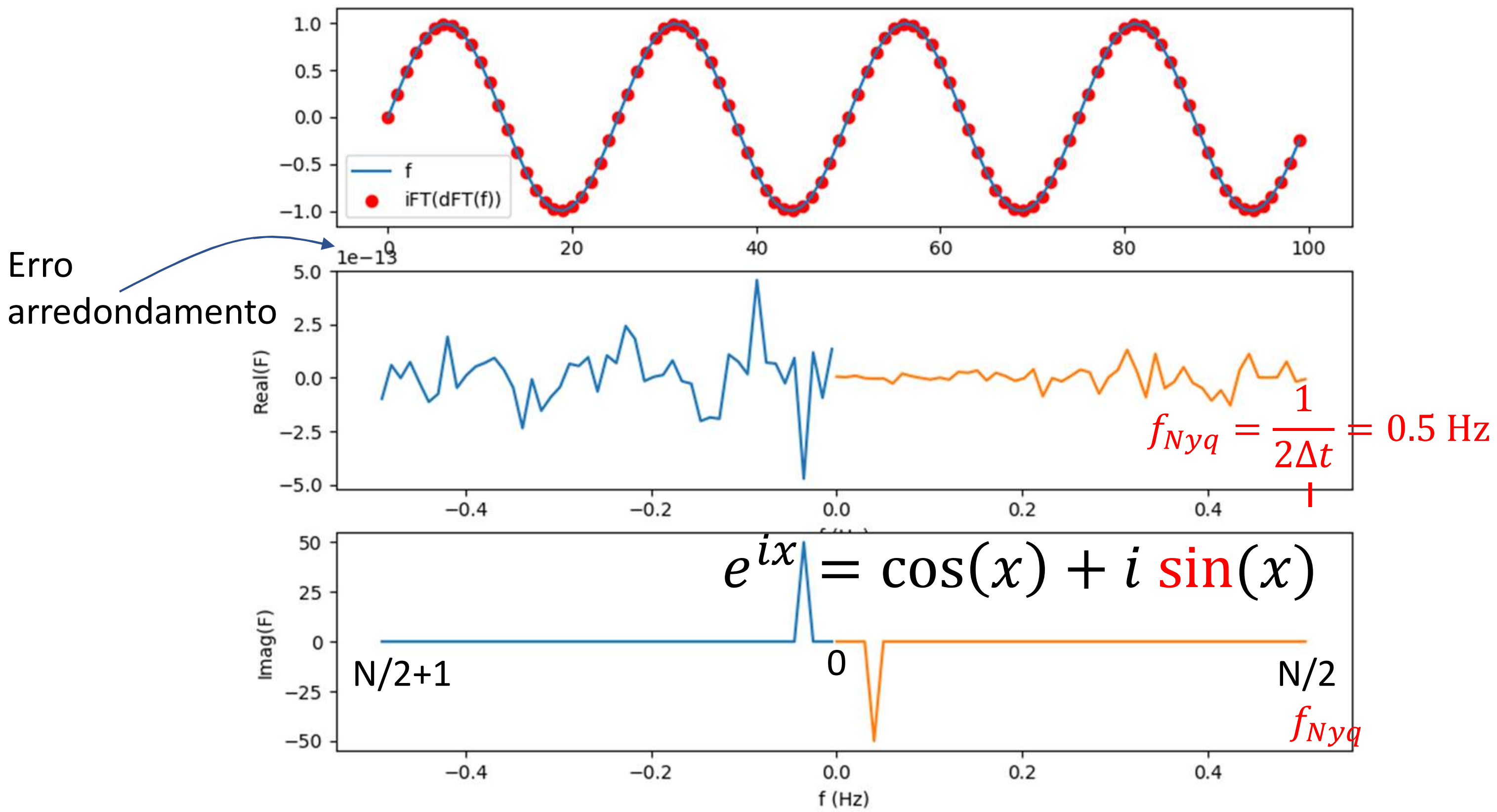
$$f_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{2\pi i n k/N}$$



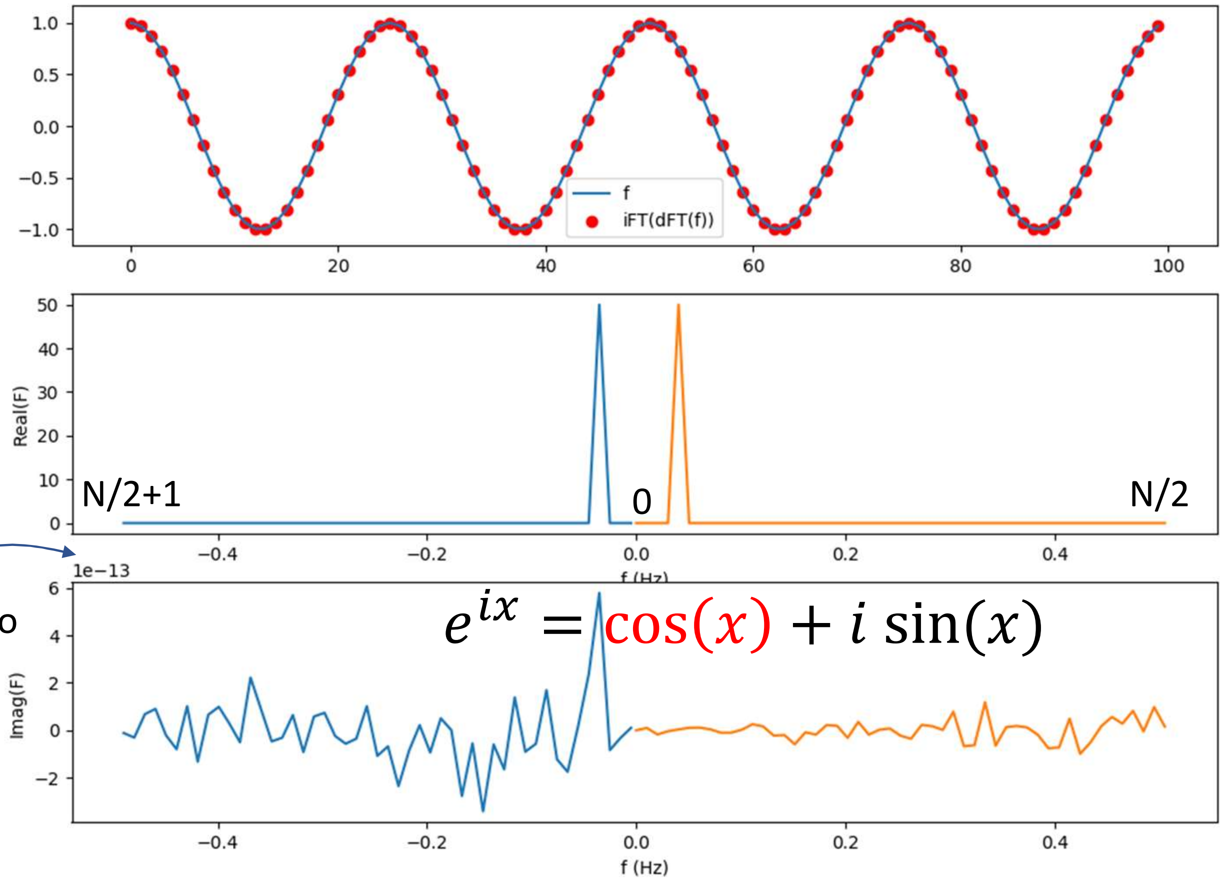

```
N=100;dt=1.;T=N*dt/4.;
t=np.linspace(0,dt*(N-1),N);
f=np.sin(2*np.pi*t/T)
plt.subplot(3,1,1);plt.plot(t,f,label='f')
F=dFT(f);
fNyq=1/(2*dt) #frequência de Nyquist
df=2*fNyq/(N-1) #resolução espectral
freq=np.zeros(t.shape)
freq[0:N//2+1]=np.arange(0,fNyq+df,df)
if N%2==0:
    freq[N//2+1:N]=np.arange(-fNyq+df,0,df)
else:
    freq[N//2+1:N]=np.arange(-fNyq,0,df)
left=range(N//2+1,N)
right=range(0,N//2+1)
```

```
plt.subplot(3,1,2);
plt.plot(freq[left],np.real(F[left]))
plt.plot(freq[right],np.real(F[right]))
plt.ylabel('Real(F)');plt.xlabel('f (Hz)')
plt.subplot(3,1,3);
plt.plot(freq[left],np.imag(F[left]))
plt.plot(freq[right],np.imag(F[right]));
plt.ylabel('Imag(F)'); plt.xlabel('f (Hz)')
ff=iFT(F)
plt.subplot(3,1,1);
plt.scatter(t,np.real(ff),color='red’,\
    label='iFT(dFT(f))')
plt.legend()
```

Transformada de $\boldsymbol{sin}\left(\frac{\mathbf{2\pi t}}{\mathbf{25}}\right)$



Transformada de $\boldsymbol{cos}\left(\frac{\mathbf{2\pi t}}{\mathbf{25}}\right)$



Erro arredondamento

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

O teorema de Fourier

$$F_k(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2\pi ink/N},\ f_n(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{2\pi ink/N}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\, cos\,\frac{2\pi kt}{T} + b_k\, sin\,\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

Diz que eu posso reproduzir uma série temporal com N elementos, pela soma de N sinusoides (algumas talvez com amplitude 0), de forma exata (a menos do erro de arredondamento).

A reconstituição da série temporal inclui uma constante (média) e sinusoides (harmónicas) com frequência múltipla de uma frequência fundamental $(2\pi/T)$.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\, cos\frac{2\pi kt}{T} + b_k\, sin\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

Deve notar-se que:

$$a_k\, cos\frac{2\pi kt}{T} + b_k\, sin\frac{2\pi kt}{T} = c_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} + \phi_k\right)$$

Onde c_k é a amplitude da sinusóide, e ϕ_k a sua fase inicial.

Na forma complexa:

$$c_k = |F_k|, \phi_k = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Imag}(F_k)}{\mathrm{Real}(F_k)}\right)$$