UNIVERSIDADE DE LISBOA - FCUL

FÍSICA DOS MEIOS CONTÍNUOS

Problemas - Série 5
Navier-Stokes

1. O problema do escoamento viscoso em 2D, através de um cilindro circular de raio a, envolve o cálculo do campo de velocidades $\mathbf{u} = [u(x,y), v(x,y), 0]$ que satisfaz

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\nabla^2\mathbf{u}, \quad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0,$$

com as condições de fronteira

$$\mathbf{u} = 0 \text{ em } x^2 + y^2 = a^2; \quad \mathbf{u} \longrightarrow (U,\, 0,\, 0) \text{ em } x^2 + y^2 \longrightarrow \infty.$$

Reescreva este problema na forma adimensional usando as variáveis adimensionais

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}/a, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u}/U, \quad p' = p/(\rho U^2)$$

em vez de $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ e p. Sem tentar resolver o problema, mostre que o padrão de linhas de corrente depende de ν, a e U apenas através da combinação $Re = Ua/\nu$. Usando o código fornecido (code2-cilinder.py), verifique que escoamentos com o mesmo número de Reynolds são dinamicamente semelhantes (varie estas 3 quantidades de forma a manter Re constante).

2. a) Defina o número de Reynolds, Re, e explique o seu significado.

   b) O coeficiente de arrasto é defindo como a razão entre a força de arrasto e a energia cinética por unidade de comprimento do fluido, $c_a = \frac{2F_a}{\rho v^2 A}$, onde A é a área de referência do objecto sobre o qual o fluido escoa. Mostre que no regime de Stokes, o coeficiente de arrasto de uma esfera depende apenas do número de Reynolds.

   c) Qual é a força de arrasto sobre duas esferas com diâmetros diferentes e o mesmo número de Reynolds, quando uma se move em ar e a outra em água ? A razão entre as densidades do ar e da água é 0.125×10^{-2} e entre as viscosidades é 1.875×10^{-2}. Suponha que o coeficiente de arrasto depende apenas do número de Reynolds.

   d) A potência necessária para compensar a força de arrasto num automóvel, à velocidade $u = 30m/s$, com uma área de referência $A = 4m^2$, é determinada num túnel de vento. A área de referência do modelo não pode exceder $A_m = 0.6m^2$. Qual é a velocidade do ar que deve ser usada no túnel ?

   e) Em geral, o número de Reynolds não é suficiente para garantir a semelhança dinâmica entre dois escoamentos diferentes. Justifique esta afirmação usando a equação de Navier-Stokes adimensional, ou dê um exemplo concreto de dois escoamentos diferentes com o mesmo número de Reynolds.

3. a) Defina o número de Reynolds, Re, e explique o seu significado. Mostre que no limite Re$\ll 1$ a equação de Navier-Stokes se reduz à equação de Stokes.

   b) A linearidade da equação de Stokes implica a sobreposição de soluções e a sua reversibilidade. Discuta as implicações desta linearidade no movimento de microorganismos em meios fluidos.

c) Considere agora uma esfera com velocidade constante num fluido estacionário. Estime o valor dos parâmetros que permitem a descrição deste escoamento pela equação de Stokes.

d) O fluido exerce uma força de resistência (drag) sobre a esfera, que pode ser obtida (a menos de constantes) por análise dimensional. Use análise dimensional para derivar a força de Stokes.

e) Calcule a força de elevação (perpendicular à velocidade) sobre a esfera e compare com a força correspondente exercida por um fluido ideal. Comente.

4. a) A partir da equação de Navier-Stokes derive a equação de Stokes justificando todas as aproximações. Discuta a linearidade desta equação e indique a sua consequência para a reversibilidade temporal de escoamentos neste regime.

   b) Dado um campo de velocidades, discuta os passos necessários para calcular as forças de elevação e de arrasto sobre um volume arbitrário, no domínio de escoamento. Considere uma esfera sólida numa corrente livre e usando argumentos de simetria, mostre que no regime de Stokes a força de elevação é nula e a força de arrasto é diferente de zero. Qual é a direção e o sentido da força de arrasto?

   c) Usando análise dimensional mostre como a força de arrasto na esfera, considerada na alínea anterior, varia com o raio da esfera, com a viscosidade do fluido e com a velocidade da corrente.

   d) Nas condições da alínea b) quais são as condições de fronteira na superfície da esfera? E quais são as condições de fronteira se a esfera sólida for substituída por uma gota líquida?

5. Um fluido escoa lentamente com velocidade U através de uma bolha esférica de raio a, constituída por ar. Considere que a tensão tangencial é nula, $t_\theta = 0$, em $r = a$.

   a) Mostre que a componente normal da tensão em $r = a$ é $t_r = (3\eta U/a)\cos\theta$.

   b) Mostre que a força de arrasto na bolha é $D = 4\pi\eta U a$ na direção do escoamento livre.

   c) Considere agora que, no lugar da bolha de ar, temos uma gota constituída por outro fluido com viscosidade $\bar{\eta}$. Mostre que a força de arrasto é

$$D = 4\pi\eta U a \left(\frac{\eta + 3\bar{\eta}/2}{\eta + \bar{\eta}}\right).$$

   d) Discuta os limites $\bar{\eta}/\eta \longrightarrow 0$ e $\bar{\eta}/\eta \longrightarrow \infty$.

6. Uma esfera de raio a roda com velocidade angular $\mathbf{\Omega}$ num fluido de extensão infinita.
   a) Mostre que para equação de Stokes sem força volumétrica as condições de fronteira apropriadas são satisfeitas por um campo de velocidade da forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{x} f(r),$$

   onde $r = |\mathbf{x}|$, $f(r)$ deve ser determinado e o campo de pressão é constante, p_0.
   b) Mostre que a tensão exercida na superfície da partícula pelo fluido é $-(p_0\mathbf{x} + 3\mu\mathbf{\Omega} \times \mathbf{x})/a$, onde μ é a viscosidade dinâmica.
   c) Mostre que o torque que deve ser exercido sobre a esfera para manter o movimento é $8\pi\mu a^3\mathbf{\Omega}$.

   Sugestão: o torque exercido pelo fluido na partícula é dado por

$$\mathbf{G} = \int_{|\mathbf{x}|=a} \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) dS \tag{1}$$

   onde a normal $n_i = x_i/a$.

7. Considere o escoamento de Stokes em duas dimensões à volta de um cilindro circular de raio a. Longe do cilindro estacionário, o fluido escoa uniformemente com a velocidade $\boldsymbol{U}$. O campo de velocidades é analisado em termos de uma função de corrente, $\psi(r, \theta)$, onde r e θ são variáveis polares com o eixo $\theta = 0$ na direção do escoamento. Sugestão: use $\mathbf{u} = \nabla \times (\psi \hat{\mathbf{z}})$

a) Mostre que a equação para ψ é:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)^2 \psi = 0 \tag{2}$$

e que as condições de fronteira no cilindro são

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \quad \text{em } r = a, \tag{3}$$

enquanto, longe do cilindro,

$$\psi \to U r \sin\theta \quad \text{quando } r \to \infty \tag{4}$$

onde $U = |\boldsymbol{U}|$.

b) Considere uma solução da forma $\psi = f(r)\sin\theta$ [por quê?] e mostre que

$$\psi \left(Ar^3 + Br\log r + Cr + \frac{D}{r}\right)\sin\theta \tag{5}$$

onde A, B, C e D são constantes.

c) Mostre que não é possível selecionar valores das constantes para satisfazer todos os condições de fronteira.

Nota: Pode-se mostrar que não há solução para o escoamento de Stokes à volta de um cilindro. Como estabelecido por Proudman e Pearson (1957, J. Fluid Mech. 2, 237-262), é preciso considerar um efeito inercial fraco nas equações de Navier-Stokes para derivar o campo de velocidade neste problema.

Os códigos necessários para resolver os exercícios estão disponíveis em: `https://github.com/rcvcoelho/lbm-python.git`.