TEOREMA DA COMPLETUDE DE GÖDEL

FERNANDO FERREIRA

As noções da Teoria da Recursão (e.g., recursividade, recursividade enumerável, redutibilidade, etc.) apenas se aplicam diretamente a conjuntos de números naturais. Porém, por meio da atribuição de números de Gödel, torna-se possível empregar (derivadamente) os conceitos da Teoria da Recursão a certas outras estruturas. Foi isso que se fez quando falámos em conjuntos (in)decidíveis de máquinas de registros. No que se segue, trabalhamos com linguagens do cálculo de predicados em que ocorram somente um número finito de símbolos não lógicos. Para simplificar a exposição acerca das numerações de Gödel, vamos momentaneamente cingir-nos à linguagem da aritmética: nesta, os símbolos não lógicos são 0 (constante), S (símbolo funcional unário), $+$, $\cdot$ (símbolos funcionais binários), $<$ e $=$ (símbolos relacionais binários). O conjunto de variáveis é numerável. Tomamos concretamente: v_0, v_1, v_2, etc.

Associamos a cada um destes símbolos da linguagem da aritmética um número natural, de acordo com a seguinte tabela:

(	)	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\to$	$\forall$	$\exists$	0	S	$+$	$\cdot$	$=$	$<$
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27

Para além disso, a cada variável v_i associamos o número $29 + 2i$. Por exemplo, aos símbolos da expressão aritmética $<+SSv_0S0v_1$, que mais usualmente se escreve $S(S(v_0)) + S(0) < v_1$, associamos, respetivamente, os números 27, 21, 19, 19, 29, 19, 17 e 31. A esta expressão da linguagem da aritmética fazemos corresponder o seu número de Gödel:

$$2^{27} \cdot 3^{21} \cdot 5^{19} \cdot 7^{19} \cdot 11^{29} \cdot 13^{19} \cdot 17^{17} \cdot 19^{31}.$$

Em geral, se $n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}$ são os números que correspondem à sequência de símbolos duma dada expressão s da linguagem, designamos por *número de Gödel* dessa expressão, e escrevemos $\#(s)$, o número $\Pi_{i<k}\, p_i^{n_i}$. Não é difícil de mostrar que o predicado unário *Expr*, verdadeiro dos números de Gödel das expressões da linguagem, é recursivo primitivo. Primeiramente, define-se a relação binária $Exprcomp(w, k)$: $w = \Pi_{i<k}\, p_i^{(w)_i} \wedge \forall i < k((w)_i$ é ímpar). Agora, $Expr(w)$ define-se por: $\exists k \leq w\, Exprcomp(w, k)$. Seja:

$$comp(w) \;:\equiv\; \text{menor número } k \leq w \text{ tal que } Exprcomp(w, k).$$

Também se define facilmente, de modo recursivo primitivo, a operação binária $*$ que a um par de (números de Gödel de) expressões faz corresponder (o número de Gödel de) a sua concatenação:

$$w * z \;:\equiv\; w \cdot \prod_{i<comp(z)} p_{comp(w)+i}^{(z)_i}.$$

Ou seja, se s e t são espressões da linguagem, então $\#(s\hat{\ }t) = \#(s) * \#(t)$. Observe-se que se uma expressão s é *subpalavra* de uma expressão t, i.e., se existe uma expressão u tal que $u\hat{\ }s$ é segmento inicial de t, então o número de Gödel de s é inferior ou igual ao número de Gödel de t, sendo mesmo estritamente inferior caso s seja subpalavra *própria* de t. Esta observação é útil pois, como exemplificaremos, permite efetuar de modo simples definições de certos predicados e funções numéricas que advêm de definições por indução na complexidade de fórmulas ou termos.

Através da correspondência que a cada expressão faz corresponder o seu número de Gödel, podemos falar de conjuntos recursivos (ou decidíveis) de expressões, conjuntos recursivamente enumeráveis de expressões, etc. É-nos também conveniente apelar sistematicamente à tese de Church como modo de evitar trabalho técnico moroso, ainda que conceptualmente claro. Por exemplo, através do apelo à tese de Church, aceitamos como evidente que o conjunto (dos números de Gödel) das fórmulas é recursivo, ou que a aplicação ternária que a cada (número de Gödel duma) fórmula ϕ, (número de Gödel duma) variável x e (número de Gödel dum) termo t faz corresponder (o número de Gödel de) a fórmula ϕ^x_t é uma função recursiva. Se quiséssemos evitar o apelo à tese de Church teríamos, por exemplo, que começar por definir o predicado unário $Termo$, verdadeiro dos números de Gödel de termos da linguagem da aritmética:

$$\begin{aligned} Termo(w) \;:\equiv\; & w = 2^{17} \vee \exists i \leq w(w = 2^{29+2i}) \vee \exists u < w[Termo(u)\wedge \\ & (w = 2^{19} * u \vee \exists z < w(Termo(z) \wedge (w = 2^{21} * u * z \vee w = 2^{23} * u * z)))]. \end{aligned}$$

Note-se que se está a efetuar uma definição por recursão ao longo dos valores, o que mostra que o predicado $Termo$ é recursivo primitivo. Este caso não é terrivelmente complicado, tal como não seria também muito complicado definir os predicados unários Fml e $FmlFec$ verdadeiros de, respetivamente, os números de Gödel de fórmulas e fórmulas fechadas. No entanto, este tipo de discussão pode tornar-se rapidamente bastante técnico sob o ponto de vista da *especificação* exata de predicados ou funções recursivas, ainda que o resultado final seja *sempre* claro com o apelo à tese de Church. Por exemplo, no próximo lema admitimos que a prenifixação duma fórmula é uma operação recursiva. Isto é claro mas, rigorosamente, é mister especificar uma forma particular de prenifixicar, sem a qual a operação não está bem determinada. Um outro exemplo consiste na passagem duma fórmula em forma prenexa para a sua Herbrandização, o que envolve algumas opções de especificação, nomeadamente as relativas aos novos símbolos funcionais – as funções de índice. Observemos que a Herbrandização de cada fórmula apenas envolve um número finito de funções de índice e que, como se tornará claro, apenas estamos interessados em tomar Herbrandizações de fórmulas tomadas individualmente. Claro que estas funções de índice podem ter diversas aridades. Podemos fixar, à partida, um conjunto numerável de funções índice para cada aridade: f^i_k é a $(i+1)$-ésima função de índice de aridade k. Podemos enumerar estas funções da seguinte forma:

$$f^0_0, f^1_0, f^0_1, f^2_0, f^1_1, f^0_2, f^3_0, f^2_1, f^1_2, \ldots$$

e a cada um destes símbolos associar, respetivamente, os números pares 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, etc. Por exemplo, a Herbrandização da fórmula $\forall v_1 \exists v_2 \forall v_3 \forall v_4 \exists v_5\, \phi$, onde ϕ não tem quantificadores, é definida como sendo a fórmula $\exists v_2 \exists v_5 ((\phi^{v_1}_{f^0_0})^{v_3}_{f^0_1(v_2)})^{v_4}_{f^1_1(v_2)}$, onde se toma sempre a primeira função de índice (segundo a enumeração acima) que esteja disponível (com aridade apropriada) ao se ir "varrendo" os quantificadores universais da fórmula dada da esquerda para a direita. As novas expressões (com as funções de índice) codificam-se do modo óbvio, havendo agora também entradas pares. Dadas estas especificações, a tese de Church assegura que a operação de Herbrandização é recursiva. Apesar de apenas termos descrito o processo de Herbrandização para fórmulas em forma prenexa, por abuso de linguagem também podemos falar na Herbrandização duma fórmula em geral. Tal pressupõe que se especifique primeiramente uma forma de obter uma forma prenexa logicamente equivalente à fórmula de partida. Usando a tese de Church, admitimos que temos um tal processo recursivo de prenifixação. Uma última nota: sequências finitas $w_0, \ldots, w_{k-1}$ de expressões da linguagem podem facilmente codificar-se por números do modo usual: $\Pi_{i<k}\, p_i^{\#(w_i)}$.

Deixamos, a partir de agora, estes assuntos. O seguinte lema usa a noção de consequência lógica do cálculo de predicados *sem igualdade* (ainda que, como veremos, o resultado também seja verdadeiro no contexto do cálculo de predicados com igualdade).

Lema 1. *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem do cálculo de predicados* sem igualdade*. O conjunto dos números de Gödel de fórmulas fechadas logicamente válidas de $\mathcal{L}$ é recursivamente enumerável.*

Demonstração. Uma fórmula fechada ϕ é logicamente válida se, e somente se, a sua Herbrandização ϕ^H é logicamente válida. Seja ϕ^H uma sua Herbrandização calculada de forma efetiva: ϕ^H

é $\exists x_1 \dots \exists x_n \phi_H(x_1, \dots, x_n)$, onde ϕ_H não tem quantificadores (a aplicação $\phi \rightsquigarrow \phi_H$ é computável). Pelo Teorema de Herbrand, tem-se $\models \phi^H$ se, e somente se, existem termos fechados $t_{1,1}, \dots, t_{1,n}$, $\dots$, $t_{k,1}, \dots, t_{k,n}$ (na linguagem expandida $\mathcal{L}'$ com as funções de índice para a fórmula ϕ) tais que $\vee_{i=1}^{k} \phi_H(t_{i,1}, \dots, t_{i,n})$ é uma tautologia. Assim, ϕ é logicamente válida sse,

$$\begin{cases} \exists \langle t_{1,1}, \dots, t_{1,n}, \dots, t_{k,1}, \dots, t_{k,n} \rangle [\text{ sequência finita de termos fechados} \\ \qquad \text{de } \mathcal{L}' \text{ tal que } \vee_{i=1}^{k} \phi_H(t_{i,1}, \dots, t_{i,n}) \text{ é uma tautologia }] \end{cases}$$

Note-se que a quantificação existencial é, a menos da codificação de sequências de termos, uma quantificação numérica. O predicado entre parêntesis retos é, pela tese de Church, decidível. Logo, a condição é recursivamente enumerável.

□

Definição 1. *Uma teoria* T *duma linguagem do cálculo de predicados com igualdade diz-se* recursivamente axiomatizável *se tiver uma axiomática recursiva, i.e., se existir um conjunto* A *decidível de fórmulas fechadas tal que* $\mathsf{Teoria}_A = \mathsf{T}$*.*

Podemos agora enunciar e demonstrar a forma abstrata do *Teorema da Completude de Gödel*:

Teorema da Completude de Gödel (versão abstrata). *Seja* T *uma teoria recursivamente axiomatizável. Então os números de Gödel dos elementos de* T *formam um conjunto recursivamente enumerável.*

Demonstração. Suponhamos que $\phi \in \mathsf{T}$. Equivalentemente, $A \models \phi$, onde A é uma axiomática recursiva de T. Tendo em conta que o lema anterior se aplica apenas ao cálculo de predicados *sem igualdade*, convém-nos usar a noção de consequência lógica do cálculo de predicados sem igualdade. Com *esta* noção, tem-se que $\phi \in \mathsf{T}$ é equivalente a dizer que $A \cup IG \models \phi$ (onde IG é o conjunto dos axiomas da igualdade). Pelo Teorema da Compacidade, existe um subconjunto finito F (que podemos encarar como uma sequência finita) de $A \cup IG$ tal que $F \models \phi$. A decisão "$F \subseteq A \cup IG$" é efetiva (pois A é decidível por hipótese e, pela tese de Church, IG é decidível). Ora, $F \models \phi$ é equivalente a dizer que a fórmula fechada $(\wedge_{\theta \in F} \theta) \to \phi$ é logicamente válida. Assim, para toda a fórmula fechada ϕ, $\phi \in \mathsf{T}$ se, e somente se,

$$\exists F \text{ finito } [F \text{ é tal que: } F \subseteq A \cup IG \wedge ((\bigwedge_{\theta \in F} \theta \to \phi) \text{ é logicamente válida})].$$

Observe-se que a quantificação $\exists F$ é, a menos de codificação apropriada, uma quantificação existencial numérica. Por sua vez, a decisão, dependente de F, "$F \subseteq A \cup IG$" é efetiva. A tese de Church e o lema anterior asseguram que a decisão, dependente de ϕ e F, "$(\wedge_{\theta \in F} \theta \to \phi)$ é logicamente válida" está em Σ_1. Logo, a condição entre parêntesis retos é Σ_1 (em F e ϕ). O resultado é agora consequência do facto, já mencionado, de que os conjuntos recursivamente enumeráveis são fechados para as quantificações existenciais numéricas. □

Se se tomar para T a teoria $\mathsf{Teoria}_\emptyset$ dada pela axiomática vazia, o resultado anterior diz que o conjunto (dos números de Gödel) das fórmulas fechadas logicamente válidas do cálculo de predicados com igualdade é recursivamente enumerável.

Corolário 1. *Toda a teoria completa, recursivamente axiomatizável, é decidível.*

Demonstração. Seja T uma teoria completa e recursivamente axiomatizável. Pelo teorema acima, o conjunto (dos números de Gödel) das fórmulas de T é recursivamente enumerável. Mas, dada uma qualquer fórmula fechada ϕ, tem-se que $\phi \notin \mathsf{T}$ se, e somente se, $\neg\phi \in \mathsf{T}$. Ora, esta última condição também é recursivamente enumerável. Logo, tanto (o conjunto dos números de Gödel de) T como o seu complementar são recursivamente enumeráveis. Como sabemos, isto implica que o conjunto dos números de Gödel de T é recursivo. □

Como exemplos temos que a teoria das ordens lineares densas sem extremos e a teoria dos corpos algebricamente fechados numa dada característica são teorias decidíveis.