A HIERARQUIA ARITMÉTICA

FERNANDO FERREIRA

Nesta secção vamos estudar algumas classes importantes de predicados numéricos, generalizando a já abordada classe Σ_1. Estas classes formam a *hierarquia aritmética*:

Definição (Hierarquia Aritmética). *Dado $n \geq 1$, um predicado $P(x_1, \dots, x_k)$ está em Σ_n se existe um predicado recursivo $(k+n)$-ário Q tal que,*

$$P(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \cdots \dashv y_n \, Q(x_1, \dots, x_k, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n),$$

onde $\dashv$ denota o quantificador universal caso n seja par, e o quantificador existencial caso n seja ímpar. De modo dual, um predicado $P(x_1, \dots, x_k)$ está em Π_n se existe um predicado recursivo $(k+n)$-ário Q tal que,

$$P(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3 \cdots \dashv y_n \, Q(x_1, \dots, x_k, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n),$$

onde $\dashv$ denota o quantificador existencial caso n seja par, e o quantificador universal caso n seja ímpar.

Um predicado diz-se que está na hierarquia aritmética *se está nalguma das classes acima.*

Por exemplo, um predicado unário $P(x)$ está na classe Π_3 se se puder escrever da forma $\forall y \exists z \forall w \, Q(x, y, z, w)$ com Q um predicado recursivo quaternário.

Proposição 1. *Para $n \geq 1$, o seguinte é verdade:*

(1) *As classes Σ_n e Π_n estão contidas simultaneamente em Σ_{n+1} e Π_{n+1}.*
(2) *As classes Σ_n e Π_n são fechadas para a conjunção e disjunção.*
(3) *As classes Σ_n e Π_n são fechadas para as quantificações limitadas.*
(4) *A classe Σ_n é fechada para as quantificações existenciais. A classe Π_n é fechada para as quantificações universais.*
(5) *Um predicado está em Σ_n (respectivamente, Π_n) se, e somente se, a sua negação está em Π_n (respectivamente, Σ_n).*

Demonstração. A última propriedade é óbvia. As demonstrações das outras propriedades usam os métodos para estabelecer propriedades análogas para a classe Σ_1. Por exemplo, o primeiro item demonstra-se com o truque das quantificações "inertes". Se considerarmos o exemplo acima, o predicado $P(x)$ também está em Π_4 porque é equivalente a $\forall y \exists z \forall w \exists u \, [Q(x, y, z, w) \land u = u]$. A segunda propriedade demonstra-se facilmente por indução em n usando (quando necessário) um "emparelhamento". As restantes propriedades não apresentam dificuldade. $\square$

Teorema 1. *Para cada $k, n \geq 1$ existe um predicado $(k+1)$-ário $U_{n,k}$ na classe Σ_n com a seguinte propriedade: Dado um predicado k-ário P em Σ_n, existe $e \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o tuplo $(x_1, \dots, x_k)$,*

$$P(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow U_{n,k}(e, x_1, \dots, x_k).$$

Um predicado como o acima denomina-se de predicado universal *para as relações k-árias em Σ_n.*

Demonstração. O caso $n = 1$ é consequência do Teorema da Enumerção e do facto de todo o predicado em Σ_1 ser o domínio duma função recursiva parcial: dado k, basta tomar $U_{1,k}(e, x_1, \dots, x_k)$ como sendo $\varphi_e^{(k)}(x_1, \dots, x_k)\!\downarrow$.

Admitamos agora que temos predicados universais para as relações em Σ_n. Fixe-se k e seja $U_{n,k+1}$ um predicado universal para as relações $(k+1)$-árias em Σ_n. Podemos definir $U_{n+1,k}$ do seguinte modo:

$$U_{n+1,k}(e, x_1, \dots, x_k) \equiv \exists y \, \neg U_{n,k+1}(e, x_1, \dots, x_k, y).$$

Observe-se que $U_{n+1,k}$ é um predicado de Σ_{n+1}. Vamos verificar que é universal. Seja R uma relação k-ária em Σ_{n+1}. Então existe uma relação $(k+1)$-ária Q em Π_n tal que, para todo o tuplo $(x_1, \dots, x_k)$,

$$R(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow \exists y Q(x_1, \dots, x_k, y).$$

Dado que o predicado $\neg Q$ está em Σ_n, tome-se $e \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o tuplo $(x_1, \dots, x_k, y)$, se tem

$$\neg Q(x_1, \dots, x_k, y) \leftrightarrow U_{n,k+1}(e, x_1, \dots, x_k, y).$$

Sai imediatamente que $R(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow U_{n+1,k}(e, x_1, \dots, x_k)$. □

Lema 1. *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{N}$ e suponhamos que A é redutível a B. Se B está em Σ_n (respectivamente, Π_n), então A também está em Σ_n (respectivamente, Π_n).*

Demonstração. Suponhamos, por exemplo, que B está em Σ_3, i.e., para todo $x \in \mathbb{N}$,

$$x \in B \text{ se, e somente se, } \exists y \forall z \exists w R(x, y, z, w),$$

com R um predicado recursivo. Se A é redutível a B através da função recursiva f, então,

$$x \in A \text{ se, e somente se, } \exists y \forall z \exists w R(f(x), y, z, w),$$

o que mostra que A está em Σ_n. O caso Π_n é semelhante. □

Definição 1. *Seja $n \geq 1$. Um conjunto $X \subseteq \mathbb{N}$ diz-se Σ_n-*completo *se estiver na classe Σ_n e se todo o conjunto de Σ_n é redutível a X. Define-se de modo semelhante a noção de conjunto Π_n-*completo.

Intuitivamente, um conjunto Σ_n-completo tem grau de dificuldade máxima entre os conjuntos em Σ_n. O próximo teorema diz que há conjuntos com este grau de dificuldade máxima:

Teorema 2. *Para cada $n \geq 1$, existem conjuntos Σ_n-completos. Necessariamente, tais conjuntos não estão na classe Π_n. Analogamente, para cada $n \geq 1$, existem conjuntos Π_n-completos e, necessariamente, tais conjuntos não pertencem à classe Σ_n.*

Demonstração. Seja $n \geq 1$. Vamos argumentar que o conjunto $X = \{2^e 3^x \in \mathbb{N} : U_{n,1}(e, x)\}$ é Σ_n-completo. É claro que se trata dum conjunto em Σ_n, pois o predicado universal $U_{n,1}$ está em Σ_n. Seja agora A um dado conjunto em Σ_n. Como sabemos, existe $e \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{N}$, $x \in A$ sse $U_{n,1}(e, x)$. Ou seja: $x \in A$ sse $2^e 3^x \in X$, o que mostra que A é redutível a X por via da função recursiva primitiva $x \rightsquigarrow 2^e 3^x$.

Um argumento de diagonalização mostra que $\{x \in \mathbb{N} : U_{n,1}(x, x)\}$ não está em Π_n (estando, claramente, em Σ_n). Com efeito, se este conjunto estivesse em Π_n o seu complementar estaria em Σ_n, o que implicaria a existência dum elemento $e \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{N}$, $\neg U_{n,1}(x, x)$ sse $U_{n,1}(e, x)$. Isto leva a um absurdo caso consideremos o caso em que x é e. Tendo mostrado que há um conjunto em $\Sigma_n \setminus \Pi_n$, pelo lema anterior conclui-se que um conjunto Σ_n-completo não pode estar em Π_n.

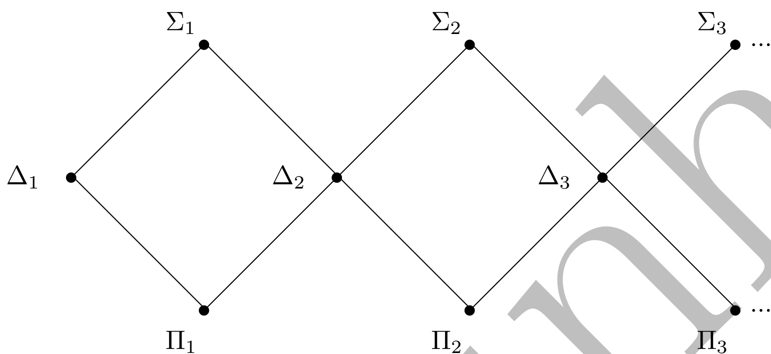
A parte do teorema que se refere a conjuntos Π_n-completos segue-se do que já se demonstrou através da passagem ao complementar. □

Para cada $n \geq 1$, define-se a classe Δ_n como a intersecção $\Sigma_n \cap \Pi_n$. Note-se que, por um resultado anterior, Δ_1 é exactamente a classe dos conjuntos recursivos. Têm-se os seguintes três tipos de inclusões *próprias*:

$$\Delta_n \subsetneq \Sigma_n, \qquad \Delta_n \subsetneq \Pi_n, \qquad \Sigma_n \cup \Pi_n \subsetneq \Delta_{n+1}.$$

Com efeito, seja X um conjunto Σ_n-completo e Y o seu complementar. Pelo teorema anterior, $X \in \Sigma_n \setminus \Pi_n$ e $Y \in \Pi_n \setminus \Sigma_n$. Claramente, ambas as classes Σ_n e Π_n estão contidas em Δ_{n+1}. Considere-se agora o conjunto $Z = \{2x : x \in X\} \cup \{2x+1 : x \in Y\}$. Não é difícil de ver que Z está em Δ_{n+1}. Por sua vez, tanto X como Y são redutíveis a Z (através, respectivamente, das funções $x \rightsquigarrow 2x$ e $x \rightsquigarrow 2x+1$). Conclui-se que a inclusão $\Sigma_n \cup \Pi_n \subseteq \Delta_{n+1}$ é própria. Com efeito, se não fosse própria ter-se-ia, e.g., Z em Σ_n, permitindo concluir que o conjunto Π_n-completo Y seria redutível a um conjunto em Σ_n. Isto é absurdo.

A situação é da seguinte figura, em que um percurso da esquerda para a direita representa uma inclusão própria e, a ausência de percurso direccionado, uma incomparabilidade entre os conjuntos:



A hierarquia aritmética

Diz-se que um conjunto está na *hierarquia aritmética* se está nalguma das classes acima, i.e., se está em $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma_n$ ou, equivalentemente, em $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n$.