DMFCUL, ALGA II
2º Semestre 2016/2017 Exercícios - Folha 9

63. Seja V espaço vectorial de dimensão $n \geq 3$ sobre $\mathbb{R}$. Mostre que a intersecção de um hiperplano $\mathcal{H}$ de V com um plano não paralelo a $\mathcal{H}$ é uma recta.

64. Seja V espaço vectorial de dimensão 4 sobre $\mathbb{R}$. Mostre que se dois planos de V têm a propriedade de nenhuma recta contida num deles ser paralela ao outro, então a intersecção dos planos é um ponto.

65. Diga se as variedades lineares $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$, a seguir listadas, se intersectam (isto é, têm intersecção não vazia) e, no caso de se intersectarem determine a sua intersecção. Também determine $< \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 >$.
(a) No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{V}_1 = (1,0,1) + < (1,1,0), (0,0,1) >$$
$$\mathcal{V}_2 = (2,1,0) + < (-1,1,0) > .$$

(b) No espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$,

$$\mathcal{V}_1 = (1,3,-1,1) + < (3,0,-1,-1), (1,1,0,1) >$$
$$\mathcal{V}_2 = (3,3,0,1) + < (4,1,-1,0), (1,-1,1,-1) > .$$

66. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, com produto interno standard, considere as rectas $\mathcal{R}_1 = (1,0,1) + < (1,1,0) >$ e $\mathcal{R}_2 = (0,1,0) + < (0,1,1) >$.
(a) Mostre que $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \emptyset$.
(b) Determine uma recta $\mathcal{R}$ ortogonal a $\mathcal{R}_1$ e a $\mathcal{R}_2$ tal que $\mathcal{R}$ intersecta $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$.
(c) Seja $\Pi = \{(2,1,1)\}$. Mostre que Π não está contido em $\mathcal{R}_2$. Determine o plano $\mathcal{P}$ que contém tanto Π como $\mathcal{R}_2$.
(d) Determine um plano $\mathcal{Q}$ que contenha o ponto Π de (c) e que seja ortogonal a $\mathcal{R}_1$.

67. Em $\mathbb{R}^3$, determine um sistema de equações cartesianas e uma representação paramétrica das seguintes variedades:
(a) A recta que passa por $(1,0,0)$ incluída no plano

$$< (1,0,0), (0,1,1) >$$

e que é paralela ao plano

$$(3,0,0) + < (2,1,1), (1,2,-1) > .$$

(b) O plano definido pelo ponto $\{(1,-1,2)\}$ e pela recta

$$\mathcal{R} = < (1,-1,1) > .$$

(c) A recta que passa pelos pontos $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$.
(d) O plano perpendicular à recta de (c) que contém o ponto $(0,1,0)$.
(e) O plano que contém os pontos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.
(f) A recta perpendicular ao plano de (d) que passa pelo o ponto $(0,0,0)$.

68. Em $\mathbb{R}^3$, determine uma representação paramétrica para as variedades de $\mathbb{R}^3$ com as seguintes equações cartesianas.
(a) $3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 4$;

(b)
$$x_1 + x_2 + 0x_3 = 1$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2.$$