Algumas soluções de ITC

Fernando Ferreira
Universidade de Lisboa

Exercício 3. Seja $(N, S, 0)$ uma estrutura de Dedekind-Peano. Para definir a função $(n, m) \rightsquigarrow n^m$, fixamos $n \in \mathbb{N}$ e usamos o teorema da recursão de Dedekind com $X := N$, $a := 1$ e f_n a função de N para N definida por: $f_n(m) := n \cdot m$. Pelo teorema da recursão, existe uma (única) função $h_n : N \mapsto N$ tal que $h_n(0) = 1$ e $h_n(m+1) = f_n(h_n(m)) = n \cdot h_n(m)$. Denota-se $h_n(m)$ por n^m. Note-se que, por definição, $n^0 = 1$ e $n^{m+1} = n \cdot n^m$.

Exercício 6. Dado $X \subseteq \mathbb{N}$ não vazio e majorado, tome-se m o mínimo dos majorantes de X. Vamos ver que $m \in X$, o que mostra que m é o máximo de X. Se $m = 0$, então $X = \{0\}$ e, claramente, 0 é máximo de X. Caso contrário, $m = n + 1$ para certo $n \in \mathbb{N}$. Como $n < m$, n não é majorante de X. Logo, existe $x \in X$ tal que $n < x$. Como, também, $x \leq m = n + 1$, sai $x = m$. Vem, $m \in X$.

Exercício 13. Seja $a \in \mathbb{Q}$ ao arbítrio. Queremos ver que a função $x \rightsquigarrow x^2$ é contínua em a, ou seja:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \exists \delta \in \mathbb{Q}^+ \forall x \in \mathbb{Q} \left(|x - a| < \delta \to |x^2 - a^2| < \varepsilon \right)$$

Para ver isto, considere-se um elemento arbitrário ε de $\mathbb{Q}^+$. Temos que obter $\delta \in \mathbb{Q}^+$ tal que, para todo $x \in \mathbb{Q}$, $|x - a| < \delta \to |x^2 - a^2| < \varepsilon$. Basta pôr $\delta := \min\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|a|}\}$ (o leitor pode perguntar de onde é que veio este δ – ele foi encontrado depois de algumas tentativas e cálculos auxiliares...). Com efeito, se $x \in \mathbb{Q}$ e $|x - a| < \delta$ vem

$$|x^2 - a^2| = |x - a| \cdot |x + a| < \frac{\varepsilon}{1 + 2|a|} \cdot (|x| + |a|) < \frac{\varepsilon}{1 + 2|a|} \cdot (2|a| + 1) = \varepsilon$$

pois $|x| \leq |x - a| + |a| < 1 + |a|$.

Exercício 14. Seja $a \in \mathbb{Q}^+$ ao arbítrio. Queremos ver que a função $x \rightsquigarrow x^{-1}$ é contínua em a. Seja ε elemento arbitrário de $\mathbb{Q}^+$. Tome-se $\delta = \min\{\frac{a}{2}, \frac{a^2\varepsilon}{2}\}$ (se o leitor fizer a mesma pergunta que está na resolução acima, tem a mesma resposta...). Se $x \in \mathbb{Q}^+$ e $|x - a| < \delta$, vem

$$|x^{-1} - a^{-1}| = \frac{|a - x|}{xa} < \frac{a^2\varepsilon}{2} \frac{2}{a} \frac{1}{a} = \varepsilon.$$

Note-se que a desigualdade $|x-a| < \frac{a}{2}$ tem como consequência que $-\frac{a}{2} < x-a$ e, portanto, $\frac{1}{x} < \frac{2}{a}$.

Exercício 15. Por definição de continuidade no ponto a, sabemos que para todo $\delta \in \mathbb{Q}^+$ existe $\epsilon \in \mathbb{Q}^+$ tal que

$$\forall c \in \mathbb{Q}\,(|c-a| < \epsilon \rightarrow |f(c) - f(a)| < \delta)$$

Tome-se $\delta := b - f(a)$. Então existe $\epsilon \in \mathbb{Q}^+$ tal que

$$\forall c \in \mathbb{Q}\,(|c-a| < \epsilon \rightarrow |f(c) - f(a)| < b - f(a))$$

Note-se que se se tem $|f(c) - f(a)| < b - f(a)$ então $f(c) < b$.

Exercício 25. Por definição, $0_{\mathbb{R}}$ é a classe de equivalência do par $(1,1)$ de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ para a relação de equivalência: $(X,Y) \sim (W,Z)$ sse $X+Z = W+Y$. Logo, $0_{\mathbb{R}} = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : (X,Y) \sim (1,1)\} = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : X+1 = 1+Y\} = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : X = Y\} = \{(X,X) : X \in \mathbb{R}^+\}$.

Exercício 26. Neste exercício vamos mencionar os vários axiomas (de 1 a 12) de *corpo ordenado*.

(1) Seja $x \neq 0$. Por tricotomia, $0 < x$ ou $x < 0$. No primeiro caso, sai do axioma (12) que $0 < x^2$. No segundo caso, sai de (11) que $0 < -x$ (adiciona-se $-x$ a ambos os membros). Logo, $0 < (-x)^2$. Mas, num corpo, $(-x)^2 = x^2$. Como $0 \neq 1$ (axioma 9), vem $0 < 1^2 = 1$.

(2) Seja $0 < x$ e $y < 0$. Vem $0 < -y$. Logo, por (12), vem $0 < x(-y) = -xy$. Sai, por (11), $xy < 0$. A outra propriedade é semelhante.

(3) Seja $0 < x$. Como se viu, $0 < (x^{-1})^2$. Logo, multiplicando x^{-2} em ambos os membros de "$0 < x$" (axioma 12), vem $0 < x^{-1}$. A outra propriedade é semelhante.

(4) Seja $0 < x < y$. Pelo axioma (12), sai $0 < xy$. Pela alínea anterior, vem $0 < (xy)^{-1}$ e este último valor é, como sabemos, $y^{-1}x^{-1}$. Novamente pelo axioma (12), multiplicando ambos os membros de "$x < y$" por $y^{-1}x^{-1}$, vem o que se quer.

Exercício 28. $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto não vazio e majorado de $\mathbb{R}$. Logo, pelo princípio do supremo, tem supremo z. Vamos ver que $\lim_n x_n = z$, i.e., $\forall \varepsilon > 0\, \exists p\, \forall n \geq p\, |x_n - z| < \varepsilon$. Fixe-se, então, um número real positivo ε arbitrário. Por definição de supremo, $z - \varepsilon$ não é majorante de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Logo, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $z - \varepsilon < x_p$. Daqui sai, para $n \geq p$: $z - \varepsilon < x_p \leq x_n$. Vem, $|x_n - z| = z - x_n < \varepsilon$.

Exercício 37. Vamos supor que X e Y são finitos e disjuntos de cardinalidade m e n, respectivamente. Fixem-se bijecções $f : X \mapsto [m]$ e $g : Y \mapsto [n]$. Defina-se $h : X \cup Y \mapsto [m+n]$ por:

$$z \rightsquigarrow_h \begin{cases} f(z) & \text{se } z \in X \\ m + g(z) & \text{se } z \in Y \end{cases}$$

Note-se que esta definição por casos está bem feita, pois os casos não interferem. Não é difícil de argumentar que h é uma bijecção. Com efeito, suponhamos que $h(z) = h(z')$. Não se pode ter $z \in X$ e $z' \in Y$, pois viria $h(z) < m$ e $h(z') \geq m$. Por razões semelhantes, não se pode ter $z \in Y$ e $z' \in X$. Se $z, z' \in X$ então $f(z) = h(z) = h(z') = f(z')$. Logo, por injectividade de f, $z = z'$. Se $z, z' \in Y$ então $g(z) + m = h(z) = h(z') = g(z') + m$. Logo $g(z) = g(z')$ e, por injectividade de g, $z = z'$. A sobrejectividade de h argumenta-se muito simplesmente. Dado $i \in [m+n]$, temos dois casos a considerar: ou $i < m$ ou $i \geq m$. No primeiro caso, tome-se $x \in X$ tal que $f(x) = i$. Vem $h(x) = i$. No segundo caso, dado que $i - m < n$, tome-se $y \in Y$ tal que $g(y) = i - m$. Vem $h(y) = m + g(y) = m + (i - m) = i$.

O caso geral (em que X e Y não são necessariamente disjuntos) reduz-se ao caso acima. Com efeito, $X \cup Y = X \uplus (Y \setminus X)$ e, pelo caso já argumentado:

$$card(X \cup Y) = card(X \uplus (Y \setminus X)) = card(X) + card(Y \setminus X) \leq card(X) + card(Y).$$

Exercício 38. Se a cardinalidade de Y é zero então Y é o conjunto vazio e o resultado é trivial. Admitamos que $card(Y) = n + 1$. Dado que $Y \neq \emptyset$, tome-se $y_0 \in Y$. Note-se que $Y \setminus \{y_0\}$ é finito e $card(Y \setminus \{y_0\}) = n$. Logo, por hipótese de indução,

$$card(X \times (Y \setminus \{y_0\})) = card(X) \cdot n.$$

Ora, $X \times Y = (X \times (Y \setminus \{y_0\})) \uplus (X \times \{y_0\})$. Pelo exercício anterior,

$$card(X \times Y) = card(X \times (Y \setminus \{y_0\})) + card(X \times \{y_0\}) =$$

$$card(X) \cdot n + card(X) = card(X) \cdot (n+1) = card(X) \cdot card(Y).$$

Exercício 40. Dado que f é uma sobrejecção, sabemos que existe uma função $g : X \mapsto X$ tal que $f \circ g = id_X$. (Note-se que não é necessário utilizar o axioma da escolha para obter esta sobrejecção, pois todo o conjunto finito tem obviamente funções escolha.) Claramente, g é injectiva (pois tem inversa à esquerda: dados $x, y \in X$ com $g(x) = g(y)$, vem $x = f(g(x)) = f(g(y)) = y$). Logo, pelo teorema dos cacifos, g é sobrejectiva. Daqui sai que f é injectiva: com efeito, suponhamos que $f(a) = f(b)$; por g ser sobrejectiva, existem $x, y \in X$ com $a = g(x)$ e $b = g(y)$; vem $x = f(g(x)) = f(a) = f(b) = f(g(y)) = y$ e, portanto, $a = g(x) = g(y) = b$.

Exercício 41. Seja $f : X \mapsto X$ injectiva e não sobrejectiva. Tome-se $a \notin \mathrm{im} f$. Defina-se por recursão uma função $h : \mathbb{N} \mapsto X$ tal que $h(0) = a$ e $h(n+1) = f(h(n))$. Vamos ver que h é injectiva, o que resolve o problema. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $h(k) = h(n)$, para certos $k, n \in \mathbb{N}$ com $n \neq k$. Sem perda de generalidade, $k < n$, i.e., existe $m \neq 0$ tal que $k + m = n$. Tem-se que $h(k) = h(k+m)$. Dado que f é injectiva, é fácil de ver (argumente!) que $h(0) = h(m)$ e, portanto, $a = h(0) = h(m) = f(h(m-1))$, o que é absurdo (pois a estaria em $\mathrm{im} f$).

[Note que $h(m) = f(f(\ldots f(a)\ldots))$, onde se aplica m vezes f (experimente com números baixos e convença-se disto!). A parte do "argumente!" sai pelo seguinte. Dizer que $h(k) = h(k+m)$ é dizer que $f(f(\ldots f(a)\ldots))$, aplicando k vezes f, é igual a $f(f(\ldots f(a)\ldots))$, onde agora se aplica $k+m$ vezes f. Como f é injectiva, podemos "cortar" f k vezes e obter $a = f(f(\ldots f(a)\ldots))$, m vezes f. Ou seja, $a = h(m)$. Formalmente, o argumento é por indução: mostre, por indução em k, que se tem $h(k) = h(k+m) \Rightarrow a = h(m)$.]

Exercício 46. Seja $\mathcal{A}$ o conjunto do todos os abertos de $\mathbb{R}$. A aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathcal{A}$ que a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ faz corresponder o aberto $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ é obviamente injectiva. Logo, $\mathbb{R} \leq_c \mathcal{A}$.

A outra desigualdade é mais difícil de demonstrar. Para ver que $\mathcal{A} \leq_c \mathbb{R}$ (o que nos resolve o problema pelo teorema CSB), considere-se a aplicação f de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{P}(\mathbb{Q}^2)$ definida por $f(U) = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 :]x,y[\subseteq U\}$, para cada aberto U de $\mathbb{R}$. Vejamos que f é injectiva. Suponhamos que $f(U) = f(V)$. Tome-se $z \in U$. Como U é aberto, existem $x, y \in \mathbb{Q}$ tais que $z \in]x,y[\subseteq U$. Logo, $(x,y) \in f(U)$ e, portanto, $(x,y) \in f(V)$. Vem $]x,y[\subseteq V$ e conclui-se que $z \in V$. Mostrámos, pois, que $U \subseteq V$. De modo semelhante, argumenta-se que $V \subseteq U$. Sai $U = V$, como se queria.

Agora, note-se que $\mathbb{R}$ é equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{Q}^2)$, pois $\mathbb{Q}^2$ é equipotente a $\mathbb{N}$.

Exercício 50. Pelo teorema CSB, a igualdade é consequência do seguinte ensaduichamento:

$$\aleph_0 = \sum_{n\in\mathbb{N}^+} 1 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}^+} n = \sum_{n\in\mathbb{N}} n \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

Tem-se $n < \aleph_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Porém, $\sum_{n\in\mathbb{N}} n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \aleph_0$ (já que ambas as somas dão como resultado $\aleph_0$). Isto mostra que na primeira alínea da Proposição 42 não se pode substituir a desigualdade lata pela estrita.

Exercício 51. Seja A um conjunto de cardinalidade λ e, para cada $i \in I$, suponhamos que X_i tem cardinalidade κ_i. Sem perda de generalidade, podemos supor que os conjuntos da família $(X_i)_{i\in I}$ são disjuntos dois a dois. Assim, $A \times \bigcup_{i\in I} X_i$ tem cardinalidade $\lambda \cdot \sum_{i\in I} \kappa_i$. Ora, a família $(A \times X_i)_{i\in I}$ também é constituída por conjuntos disjuntos dois a dois. Logo, o conjunto $\bigcup_{i\in I}(A \times X_i)$ tem cardinalidade $\sum_{i\in I}(\lambda \cdot \kappa_i)$. Como os conjuntos $A \times \bigcup_{i\in I} X_i$ e $\bigcup_{i\in I}(A \times X_i)$ são o mesmo, temos o resultado pretendido.

Exercício 55. Se a classe de todos os conjuntos singulares fosse um conjunto, digamos S, então $\bigcup S$ seria ainda um conjunto (axioma da união) e seria a classe universal, o que é absurdo. Confirmemos, de seguida, que $\bigcup S$ tem como elementos *todos* os conjuntos (i.e., que $\bigcup S$ é a classe universal). Dado x ao arbítrio, tem-se $x \in \{x\} \in S$. Logo, $x \in \bigcup S$.

Exercício 56. O conjunto A^B pode ser obtido da seguinte maneira por separação:

$$A^B := \{f \in \mathscr{P}(B \times A) : \text{“}f \text{ é uma função de domínio } B \text{ e conjunto de chegada } A\text{”}\}$$

Note-se que se f é uma função como está descrito acima entre aspas tem-se, efectivamente, $f \in \mathscr{P}(B \times A)$.

Exercício 57. O conjunto quociente A/R pode ser obtido da seguinte maneira por separação:

$$A/R := \{C \in \mathscr{P}(A) : \exists a \in A \forall x \in A (x \in C \leftrightarrow xRa)\}$$

Exercício 58. Mostra-se que o conjunto $\{x \in \omega : x \subseteq \omega\}$ é indutivo, o que permite concluir o resultado desejado. Claro que $\varnothing$ está neste conjunto. Admitamos, agora, que $x \in \omega$ e $x \subseteq \omega$. Visto que ω é indutivo, $x \cup \{x\}$ está ainda em ω. Resta ver que $x \cup \{x\} \subseteq \omega$. Ora, por suposição, $x \subseteq \omega$ e, visto que $x \in \omega$, tem-se também $\{x\} \subseteq \omega$. Logo, $x \cup \{x\} \subseteq \omega$.

Exercício 59. Vamos demonstrar a equivalência $\forall x \in \omega\, (x \in y \leftrightarrow x < y)$ por indução em y. Se $y = \varnothing$, ambos os lados da equivalência são sempre falsos. Mostrámos, pois, o caso base. Admitamos agora, por hipótese de indução, que se tem $\forall x \in \omega\, (x \in y \leftrightarrow x < y)$. Queremos ver:

$$\forall x \in \omega\, (x \in S(y) \leftrightarrow x < S(y)).$$

Ora, dado $x \in \omega$, tem-se

$$x < S(y) \leftrightarrow x < y \lor x = y \leftrightarrow_{HI} x \in y \lor x = y \leftrightarrow x \in y \cup \{y\} \leftrightarrow x \in S(y).$$

A segunda parte do exercício pede para se mostrar que $x = \{y \in \omega : y < x\}$. Ora, este último conjunto é $\{y \in \omega : y \in x\}$. Obviamente, está contido em x. Por outro lado, se $y \in x$ então $y \in \omega$ (pois $x \in \omega$ e ω é transitivo). Logo, $x \subseteq \{y \in \omega : y \in x\}$.

Exercício 62. Para começar, note-se que pelo axioma das partes, existe o conjunto $\mathcal{P}(\{\varnothing\})$: o conjunto de dois elementos $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. Sejam agora conjuntos a e b. Queremos ver que o conjunto $\{a, b\}$ existe. Defina-se a operação $x \rightsquigarrow F(x)$ onde $F(\varnothing) = a$ e, para $x \neq \varnothing$, $F(x) = b$. Pelo axioma da substituição, existe o conjunto $F[\{\varnothing, \{\varnothing\}\}]$. Este conjunto é, precisamente, $\{a, b\}$.

Exercício 63. Suponhamos, com vista a um absurdo, que se tem

$$x \in y_0 \in y_1 \in \ldots \in y_{n-1} \in x.$$

Tome-se $X = \{x, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$. Este conjunto é não vazio (pois $x \in X$). Pelo axioma da fundação, existe $z \in X$ tal que $z \cap X = \varnothing$. Poderá z ser x? Não, porque $y_{n-1} \in x \cap X$ (se $n = 0$, i.e., se só temos o x, viria $x \in x \cap X$). Só resta $z = y_i$, para algum $i < n$. Se $i = 0$, vem $x \in z \cap X$. Se $i > 0$, vem $y_{i-1} \in z \cap X$. Isto é contraditório.

Exercício 64. Suponhamos, com vista a um absurdo, que existe uma função de domínio ω tal que, para todo $n \in \omega$, $f(n+1) \in f(n)$. Considere-se $x \coloneqq \mathrm{im} f$. Pelo axioma da fundação existe $y \in x$ tal que $x \cap y \neq \varnothing$. Ora, como $y \in \mathrm{im} f$, existe $n \in \omega$ tal que $y = f(n)$. Mas $f(n+1) \in x \cap y$, o que é contraditório.

Exercício 66. Vamos utilizar a seguinte formulação do axioma da escolha: todo o conjunto tem uma função escolha.

Suponhamos que temos o axioma da escolha e seja R uma relação de equivalência em X. Queremos obter um conjunto de representantes para R, i.e., um subconjunto C de X tal que $C \cap W$ é conjunto singular, para todo $W \in X/R$ (C tem exactamente um elemento – um *representante* – de cada classe de equivalência W). Fixe-se, pelo axioma da escolha, uma função escolha $\varepsilon : \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\} \mapsto X$ (portanto, $\varepsilon(Y) \in Y$, para todo $Y \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$). Defina-se $C \coloneqq \{\varepsilon(W) : W \in X/R\}$. Obviamente, $C \subseteq X$. Dado $W \in X/R$, é claro que $\varepsilon(W) \in C \cap W$. Resta ver que $\varepsilon(W)$ é o único elemento de $C \cap W$. Seja $w \in C \cap W$. Então $w = \varepsilon(W')$, para certo $W' \in X/R$. Logo, $w \in W'$. Temos, pois, que as classes de equivalência W e W' têm intersecção não vazia (o elemento w está em ambas). Logo $W = W'$. Vem, $w = \varepsilon(W') = \varepsilon(W)$, como se queria.

Vamos agora argumentar o recíproco. Seja X um conjunto qualquer. Queremos definir uma função escolha de $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ para X. Seja

$$A \coloneqq \{(Y, y) : Y \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\} \wedge y \in Y\}$$

e considere-se a seguinte relação de equivalência em A: $(Y, y) \sim (Z, z)$ se, e somente se, $Y = Z$. É elementar verificar que se trata de facto duma relação de equivalência. Por hipótese, há um conjunto C de representantes para esta relação de equivalência. Ora, C é *literalmente* uma função escolha para X.

Em primeiro lugar, C é um conjunto de pares ordenados (visto que $C \subseteq A$). Será C uma função? Sejam dados $(Y, y), (Y, y') \in C$ com vista a mostrar que $y = y'$. Ora, $(Y, y) \sim (Y, y')$. Visto que C é um conjunto de representantes para a relação de equivalência $\sim$, $C \cap [(Y, y)]_\sim$ é um conjunto singular. Sai $(Y, y) = (Y, y')$ e, portanto, $y = y'$. Será que o domínio de C é $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$? Dado que $C \subseteq A$, $\mathrm{dom}(C) \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$. Dado $Y \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$, tome-se $y \in Y$. Então $(Y, y) \in A$ e podemos considerar a classe de equivalência $[(Y, y)]_\sim$. Por definição de conjunto de representantes, $C \cap [(Y, y)]_\sim$ é um conjunto singular. Em particular tem lá um elemento, necessariamente da forma (Y, y'), para algum $y' \in Y$. Logo $Y \in \mathrm{dom}(C)$.

Vimos, pois, que C é uma função de $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ para X. Podemos, então, usar a notação funcional e escrever $C(Y) = y$ para dizer $(Y, y) \in C$. Resta ver que, para todo $Y \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$, $C(Y) \in Y$. Mas isto é óbvio, pois $C \subseteq A$.

Exercício 68. Dada uma boa-ordem $(X,<)$ e dado $x \in X$ que não é máximo, tem sentido falar em $S_X(x)$. Este é o (único) elemento que verifica as duas seguintes condições: $x < S_X(x)$ e $x < y \to S_X(x) \leq y$. Vamos agora resolver o exercício. Suponhamos que $w \nless S_X(x)$. Então, $S_X(x) \leq w$. Como $x < S_X(x)$, vem $x < w$ e, portanto, $w \nleq x$. Reciprocamente, suponhamos que $w \nleq x$. Então, $x < w$. Logo, $S_X(x) \leq w$ e, portanto, $w \nless S_X(x)$.

Exercício 70. Seja x o menor elemento limite duma dada boa ordem $(X,<)$. Vamos ver que $N = \{u \in X : u < x\}$ munido da função sucessor S_X (note que está bem definida em N, pois x é ordinal limite) e de 0_X é uma estrutura de Dedekind-Peano. Claro que $S_X(u) \neq 0_X$, para todo $u \in X$ (e, portanto, para todo $u \in N$). Para ver a segunda propriedade das estruturas de Dedekind-Peano, admitamos que $u \neq v$ (com $u, v < x$). Sem perda de generalidade, $u < v$. Então sai $S_X(u) \leq v < S_X(v)$ e, portanto, $S_X(u) \neq S_X(v)$. Resta argumentar a terceira propriedade das estruturas de Dedekind-Peano. Seja $Y \subseteq N$ tal que $0_X \in Y$ e, para todo $u \in N$, se $u \in Y$ então $S_X(u) \in Y$. Se, por absurdo, $N \setminus Y \neq \varnothing$ tome-se x_0 o elemento mínimo deste conjunto. Claramente x_0 nem é 0_X nem é um elemento sucessor. Logo, é um elemento limite. Isto contradiz a minimalidade de x.

Exercício 71. A função h (de domínio ω) está definida por recursão. Para o ver formalmente apenas temos que enquadrar a sua definição no formato do princípio da recursão transfinita. A boa ordem em causa é $(\omega,<)$ e a operação $w, y \rightsquigarrow G(w,y)$ define-se do seguinte modo:

$$w, y \rightsquigarrow_G \begin{cases} a & \text{se } y = 0 \\ F(w(x)) & \text{se } y \text{ é da forma } x+1 \\ \varnothing & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $w(x)$ é por definição o único u tal que $(x,u) \in w$, se existir tal único u; caso contrário (não vai interessar) é $\varnothing$. Pelo teorema da recursão transfinita, existe uma função h de domínio ω tal que $h(x) = G(h \restriction_{\omega_{<x}}, x)$, para todo $x \in \omega$. Recorde-se que $h \restriction_{\omega_{<x}}$ é a função h restrita ao conjunto $\{n \in \omega : n < x\}$. Vem, $h(0) = G(h \restriction_{\omega_{<0}}, 0) = G(\varnothing, 0) = a$. E, para todo $n \in \omega$,

$$h(n+1) = G(h \restriction_{\omega_{<(n+1)}}, n+1) = F(h \restriction_{\omega_{<(n+1)}} (n)) = F(h(n)).$$

Exercício 73. Já vimos que se X é constituído por conjuntos transitivos, então $\bigcup X$ é transitivo. Para ver que $\bigcup X$ é um ordinal, resta ver que quaisquer dois elementos distintos a e b de $\bigcup X$ são comparáveis (pela relação de pertença). Por definição de união, existem $\alpha, \beta \in X$ tais que $a \in \alpha$ e $b \in \beta$. Como sabemos, a e b são ordinais (todo o elemento dum ordinal é um ordinal) e, portanto, comparáveis. Finalmente, dado que a ordem $\leq$ entre ordinais coincide com a ordem $\subseteq$, sai imediatamente que $\bigcup X$ é o supremo de X.

Exercício 75. Por contra-recíproco. Se $\alpha \nleq \beta$, vem $\beta \leq \alpha$. Logo, por um lema da teórica, $\gamma + \beta \leq \gamma + \alpha$ e, portanto, $\gamma + \alpha \nleq \gamma + \beta$.

Exercício 76. Por contra-recíproco. Se $\alpha \neq \beta$, sem perda de generalidade $\alpha < \beta$. Logo $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$ e, portanto, $\gamma + \alpha \neq \gamma + \beta$. O resultado não é verdade com as parcelas trocadas. Por exemplo: $0 + \omega = 1 + \omega$ (ambos iguais a ω), mas $0 \neq 1$.

Exercício 77. A parte da unicidade é consequência do exercício acima. Fixado um ordinal α, demonstra-se, por indução transfinita em β, o condicional $\alpha < \beta \to \exists\gamma\,(\alpha + \gamma = \beta)$. O caso $\beta = 0$ é trivial. Dado β ao arbítrio, admita-se que $\alpha < \beta + 1$. Se $\alpha = \beta$ então basta pôr $\gamma = 1$ para se ter $\alpha + \gamma = \beta + 1$. Caso contrário, $\alpha < \beta$ e, por hipótese de indução transfinita, existe γ tal que $\alpha + \gamma = \beta$. Sai $\alpha + (\gamma + 1) = \beta + 1$. Vejamos, agora, o caso em que β é ordinal limite e $\alpha < \beta$. Por hipótese de indução transfinita, para cada η tal que $\alpha < \eta < \beta$, existe γ_η tal que $\alpha + \gamma_\eta = \eta$. Tome-se $\gamma = \sup\{\gamma_\eta : \alpha < \eta < \beta\}$. Visto que se tem $\alpha < \eta_1 < \eta_2 < \beta \to \gamma_{\eta_1} < \gamma_{\eta_2}$ (ver exercício acima), γ é um ordinal limite. Logo,

$$\alpha + \gamma = \sup_{\rho<\gamma}(\alpha + \rho) = \sup_{\alpha<\eta<\beta}(\alpha + \gamma_\eta) = \sup_{\alpha<\eta<\beta}\eta = \beta.$$

Exercício 78. $2 \cdot \omega = \sup_{n\in\omega} 2n = \omega$ e $\omega \cdot 2 = \omega \cdot (1 + 1) = (\omega \cdot 1) + \omega = \omega + \omega$.

Exercício 86. Seja $a < b < c$ uma boa ordem com três elementos. A função colapso f opera da seguinte maneira: $f(a) = \{f(y) : y < a\} = \varnothing = 0$; $f(b) = \{f(y) : y < b\} = \{f(a)\} = \{0\} = 1$; e $f(c) = \{f(y) : y < c\} = \{f(a), f(b)\} = \{0, 1\} = 2$.

Exercício 88. Seja $\mathfrak{C} \subseteq Cadeias(X, \leq)$ uma cadeia de elementos de $Cadeias(X, \leq)$. Isto quer dizer que dados elementos $C, C' \in \mathfrak{C}$, $C \subseteq C'$ ou $C' \subseteq C$. Basta ver que $\bigcup\mathfrak{C} \in Cadeias(X, \leq)$. Sejam $a, b \in \bigcup\mathfrak{C}$, com vista a mostrar que são comparáveis (de acordo com a ordem $\leq$). Por definição de união, sejam $C, C' \in \mathfrak{C}$ tais que $a \in C$ e $b \in C'$. Sem perda de generalidade, $C \subseteq C'$. Vem, $a, b \in C'$. Logo, como $C' \in Cadeias(X, \leq)$, $a \leq b$ ou $b \leq a$.

Exercício 89. Seja X um conjunto ao arbítrio. Pelo princípio da boa ordenação, existe uma boa ordem $<$ em X. Agora é fácil de definir uma função escolha $\epsilon_X : \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\} \mapsto X$ por

$$\epsilon_X(Z) \coloneqq \text{ o menor elemento (para a ordem <) de } Z$$

Exercício 92. Por definição de cardinal, um cardinal κ não é equipotente a nenhum ordinal inferior. Ora, para α ordinal infinito, α é equipotente $\alpha + 1$ ($= \alpha \cup \{\alpha\}$). Logo, um cardinal infinito não pode ser da forma $\alpha + 1$. Também não é zero. Logo, é um ordinal limite.

Exercício 95. $2^{\aleph_\beta} \leq {\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} \leq (2^{\aleph_\beta})^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta \cdot \aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$ (estamos, obviamente, em aritmética cardinal).

Exercício 96. Claramente, $\prod_{0<\alpha<\omega_1} \alpha = \prod_{1<\alpha<\omega_1} \alpha$. Vem:

$$2^{\aleph_1} = \prod_{1<\alpha<\omega_1} 2 \leq \prod_{1<\alpha<\omega_1} \aleph_1 = \aleph_1^{\aleph_1} \leq (2^{\aleph_1})^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1 \cdot \aleph_1} = 2^{\aleph_1}.$$