Folhas de exercícios II

Fernando Ferreira

Introdução à Teoria dos Números
2018/2019

1. Usando o teorema do número primo mostre que $\lim_n \frac{\pi(n)}{n} = 0$.

2. Seja n um número natural.

   (a) Tome-se k inteiro tal que $0 \leq k \leq n$. Mostre que $\binom{n}{k} \leq n^{\pi(n)}$. (Sugestão: use o facto de que se $p^r \mid \binom{n}{k}$ então $p^r \leq n$, para p primo.)

   (b) Conclua que $\frac{2n \ln 2}{\ln(2n)} \leq 1 + \pi(2n)$. (Sugestão: ensanduiche $\binom{2n}{n}$ entre dois valores apropriados e tome logaritmos.)

3. Mostre que a função $x \rightsquigarrow (1 + \sqrt{2x}) \ln(2x)$ tem segunda derivada negativa em $]0, +\infty[$.

4. (a) Dado x um número real maior do que 1, mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ converge (use o teste do integral).

   (b) Dado a um número real positivo, mostre que $\zeta(1 + a) \leq \frac{1+a}{a}$.

5. Mostre que $\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nk^n} < \infty$. (Mostre que para $n, k \geq 3$, se tem $n^2 k^2 \leq nk^n$.)

6. Seja n um número natural. Mostre que, para todo o número complexo s com $Re(s) > 0$, se tem

$$\int_n^{n+1} \left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right| dx \leq \frac{|s|}{n^{Re(s)+1}}$$

   (Note que $\int_n^x \frac{1}{u^{s+1}} du = \frac{1}{s}(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s})$ e majorize o valor absoluto do integrando, onde $n \leq u \leq x \leq n + 1$.)