Trabalho extra I

Fernando Ferreira

Introdução à Teoria dos Números
2018/2019

Esta sequência de exercícios culmina com a demonstração de que $\zeta(z) \neq 0$ para $z \neq 1$ na reta vertical $Re(z) = 1$.

(a) Dado um real positivo r e $\theta \in \mathbb{R}$, mostre que $|1 - re^{i\theta}|^2 = 1 - 2r\cos\theta + r^2$.

(b) Mostre que para $0 < r < 1$ se tem $|(1-re^{i\theta})^4(1-re^{2i\theta})^2| \leq \frac{1}{(1-r)^3}$. (Sugestão: ponha $u = \cos\theta$ e considere a função

$$g(u) := (1 + r^2 - 2ru)^2(1 + r^2 + 2r - 4ru^2)$$

para $u \in [-1, 1]$. Mostre que a função h dada por $u \rightsquigarrow \ln g(u)$ está bem definida e atinge o máximo em $u = -\frac{1}{2}$. Para ver isto, ache $h'(u)$ e calcule $h'(-\frac{1}{2})$ e $h'(1)$.)

(c) Mostre que, para cada número primo p, se tem

$$\left|\left(1 - \frac{1}{p^x}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{p^{x+iy}}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{p^{x+2iy}}\right)^2\right| \leq 1,$$

sempre que $x, y \in \mathbb{R}$ com $x > 1$. (Sugestão: use a alínea anterior com $\frac{1}{p^x} = r$ e $\frac{1}{p^{iy}} = e^{i\theta}$.)

(d) Mostre que se tem $|\zeta(x)^3\zeta(x+iy)^4\zeta(x+2iy)^2| \geq 1$ sempre que $x, y \in \mathbb{R}$ e $x > 1$. (Sugestão: use a alínea anterior e a fórmula do produto de Euler.)

(e) Mostre que se tem $|(x-1)\zeta(x)|^3 \left|\frac{\zeta(x+iy)}{x-1}\right|^4 |\zeta(x+2iy)|^2 \geq \frac{1}{x-1}$ sempre que $x, y \in \mathbb{R}$ e $x > 1$.

(f) Mostre que $\zeta(1 + iy) \neq 0$ para todo o número real y não nulo. (Sugestão: suponha que $\zeta(1 + iy_0) = 0$, para certo $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e use a alínea anterior com $y = y_0$, fazendo $x \to 1^+$, de modo a chegar a uma contradição.)