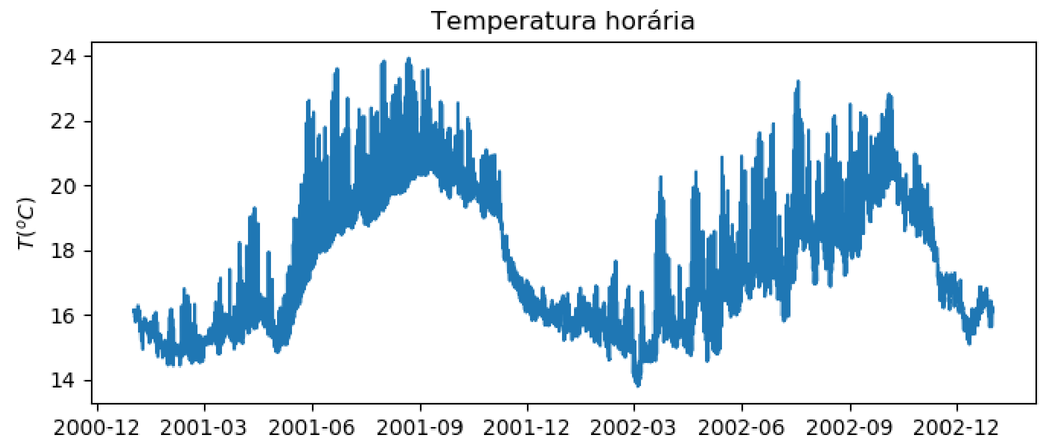
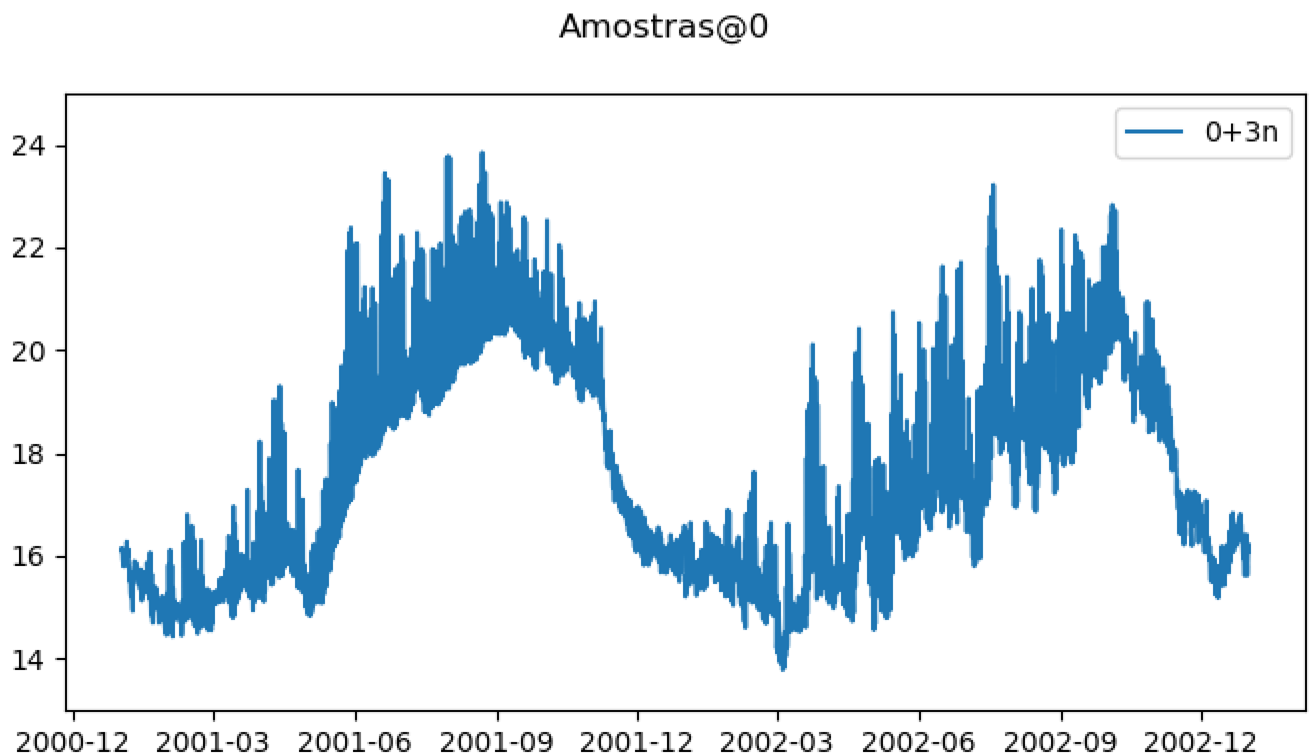
Aula 13



Séries undimensionais

Várias amostras da temperatura



Funções de uma variável independente

$$V = V(t)$$

t é o tempo, mas pode ser outra variável (x ...)

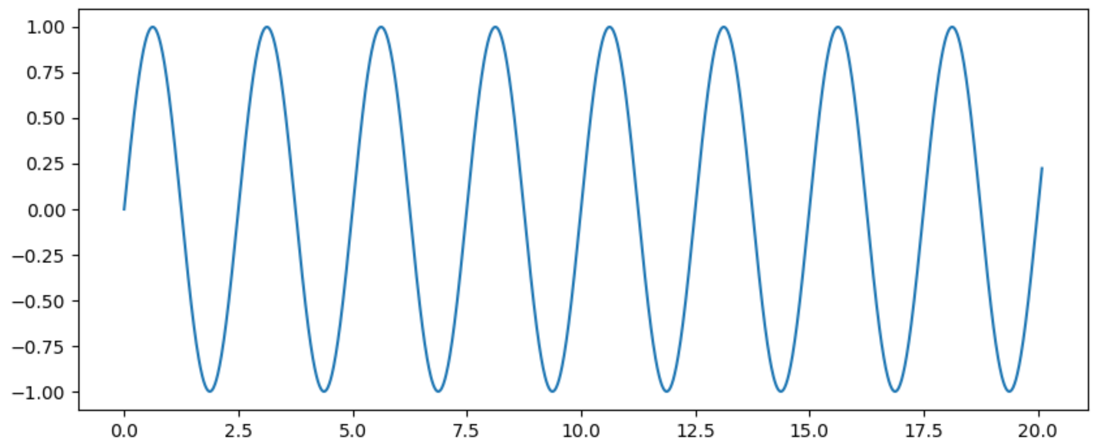
Amostra regular com N pontos

$$V_n = V(t_0 + n\Delta t), n = 0, \dots, N - 1$$

t_0 – fase inicial (amostra 0)

Δt – intervalo de amostragem (step)

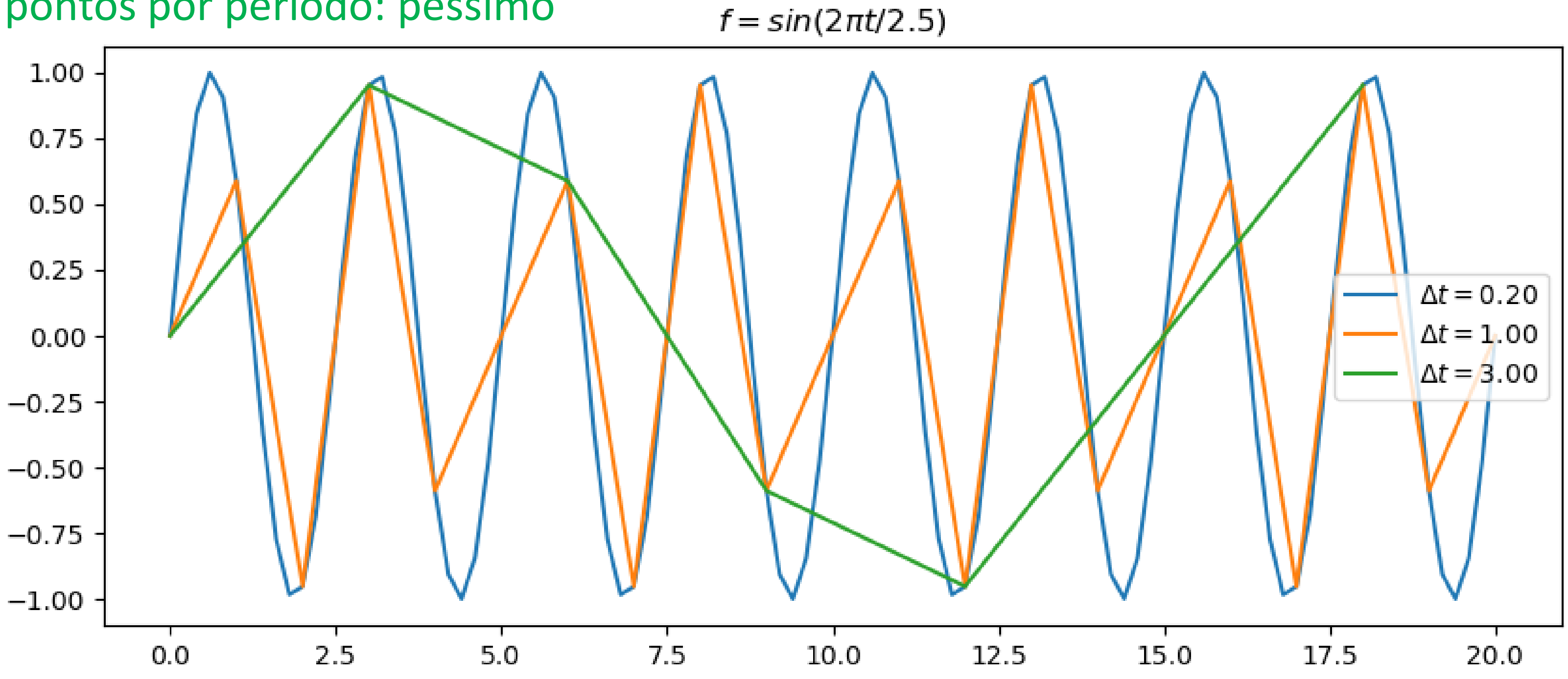
Amostras de Sinusóides $t_0 = 0$



12.5 pontos por período: razoável

2.5 pontos por período: mau

0.8 pontos por período: péssimo



Teorema da amostragem

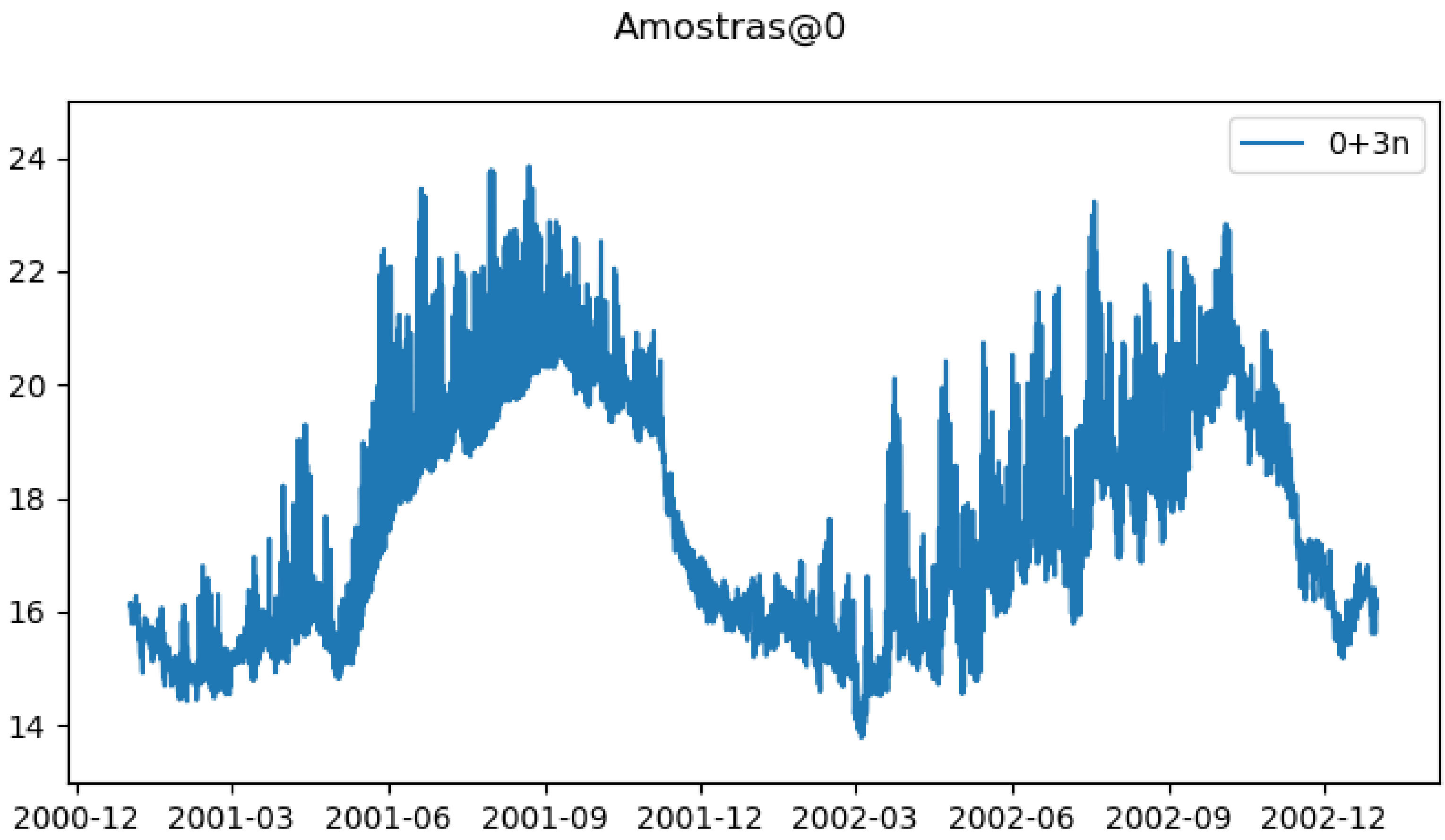
O exemplo anterior mostra que a operação de amostragem implica sempre um erro, mas em certos casos altera completamente a função.

No caso de uma função sinusoidal é fácil perceber que tudo depende do Número de amostras por período:

- Com menos de 2 amostras por período a função é falseada (*aliasing*) sendo vista como um seno com um período muito mais longo : uma amostra só pode representar períodos $\mathrm{T} \geq 2\Delta\mathrm{t}$

- Com pouco mais de 2 amostras por período a série apresenta artefactos. A fase também é importante.

Várias formas de amostrar uma série: start (n_0, fase), step (Δt)



E se a função não for uma sinusoide?

O teorema de Fourier garante que qualquer função periódica pode ser obtida pela soma de sinusoides:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \, cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \, sin \frac{2\pi kt}{T} \right)$$

Onde (a_k, b_k) são as amplitudes associadas à harmónica k

Em geral, precisamos de infinitas harmónicas!

Série de Fourier na forma complexa

Utilizando a formula de Euler pode mostrar-se que:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{\frac{i2\pi kt}{T}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-\frac{i2\pi kt}{T}}$$

Ou

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi kt/T}$$

Com os coeficientes (complexos):

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i2\pi k/T}\, , k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Transformada discreta de Fourier (1)

No caso geral o teorema de Fourier não é computável, pois requer infinitos coeficientes, e os coeficientes são calculados por meio de um integral.

Se a função for representada exatamente com um número finito de harmónicas (função de banda limitada), se o intervalo de amostragem satisfizer o teorema da amostragem $\left(\Delta t < \frac{T_{Min}}{2} \Leftrightarrow \Delta t < \frac{1}{2f_{Max}}\right)$ e se a amostra for suficientemente longa para conter um período fundamental (o mais longo), a série de Fourier é computável e exata.

Transformada discreta de Fourier (2)

Transformada discreta de Fourier

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2\pi i n k/N}$$

transformada discreta inversa de Fourier

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{2\pi i n k/N}$$

Código naïve (lento)

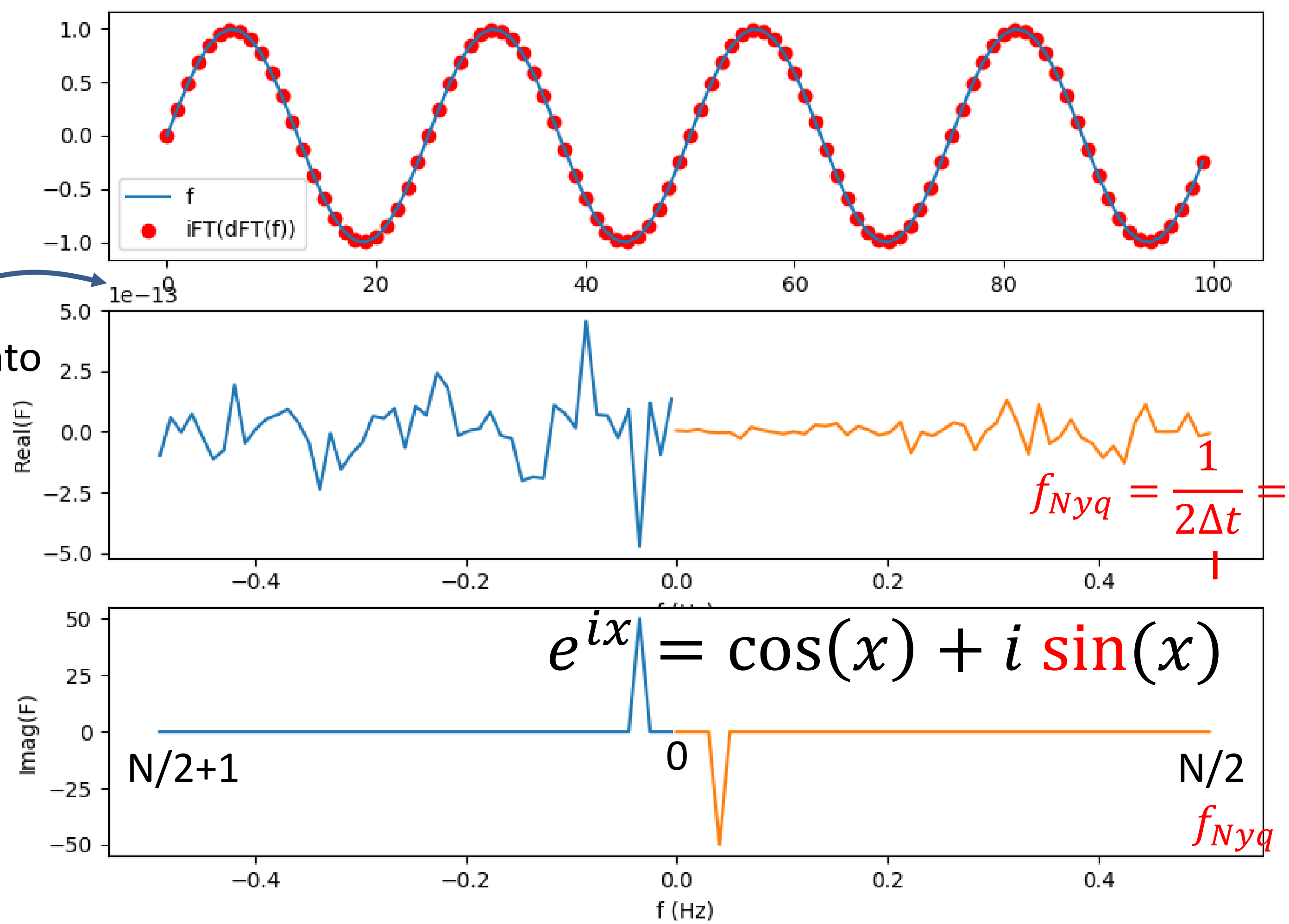
```
import numpy as np;import matplotlib.pyplot as plt
def dFT(y): #transformada discreta de Fourier direta
    i=complex(0,1.);pi=np.pi
    N=len(y)
    z=np.zeros(y.shape,dtype=complex)
    for k in range(N):
        for j in range(N):
            z[k]=z[k]+y[j]*np.exp(-2*pi*i*j*k/N)
    return z
def iFT(y): #transformada discreta de Fourier inversa
    i=complex(0,1.);pi=np.pi
    N=len(y)
    z=np.zeros(y.shape,dtype=complex)
    for k in range(N):
        for j in range(N):
            z[k]=z[k]+y[j]*np.exp(2*pi*i*j*k/N)
    return z/N
```

```
N=100;dt=1.;T=N*dt/4.;
t=np.linspace(0,dt*(N-1),N);
f=np.sin(2*np.pi*t/T)
plt.subplot(3,1,1);plt.plot(t,f,label='f')
F=dFT(f);
fNyq=1/(2*dt) #frequência de Nyquist
df=2*fNyq/(N-1) #resolução espectral
freq=np.zeros(t.shape)
freq[0:N//2+1]=np.arange(0,fNyq+df,df)
if N%2==0:
    freq[N//2+1:N]=np.arange(-fNyq+df,0,df)
else:
    freq[N//2+1:N]=np.arange(-fNyq,0,df)
left=range(N//2+1,N)
right=range(0,N//2+1)
```

```
plt.subplot(3,1,2);
plt.plot(freq[left],np.real(F[left]))
plt.plot(freq[right],np.real(F[right]))
plt.ylabel('Real(F)');plt.xlabel('f (Hz)')
plt.subplot(3,1,3);
plt.plot(freq[left],np.imag(F[left]))
plt.plot(freq[right],np.imag(F[right]));
plt.ylabel('Imag(F)'); plt.xlabel('f (Hz)')
ff=iFT(F)
plt.subplot(3,1,1);
plt.scatter(t,np.real(ff),color='red',\
    label='iFT(dFT(f))')
plt.legend()
```

Transformada de $\boldsymbol{sin}\left(\frac{2\pi t}{25}\right)$

Erro arredondamento



$$f_{Nyq} = \frac{1}{2\Delta t} = 0.5\ \text{Hz}$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i\,\sin(x)$$

N/2+1

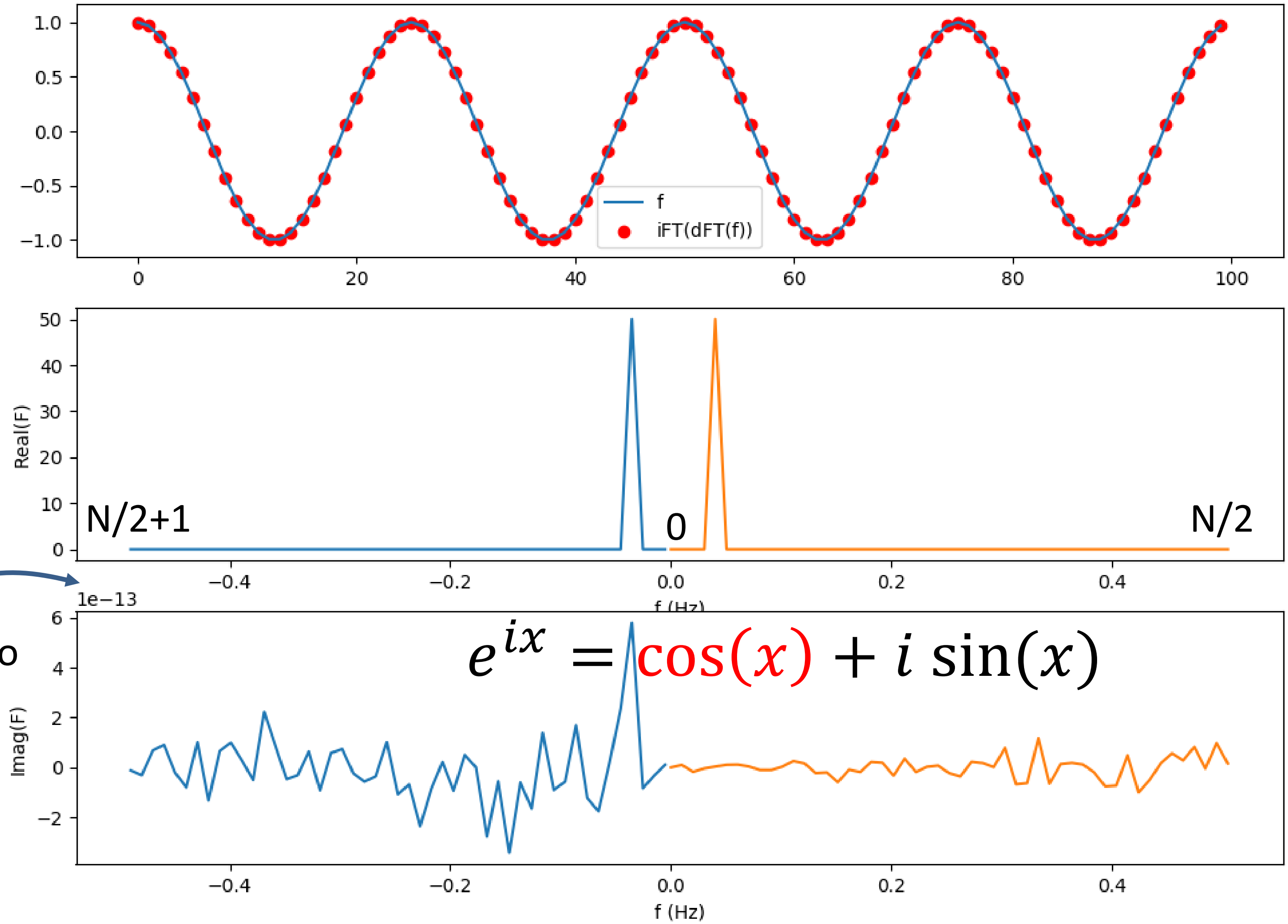
0

N/2

f_{Nyq}

Transformada de $\boldsymbol{cos\left(\frac{2\pi t}{25}\right)}$

Erro
arredondamento



$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Espectros de amplitude e de fase

Em vez de analisar a parte Real e a parte Imaginária da transformada de Fourier, podemos analisar o seu módulo, designado por espectro de amplitude:

$$A(\omega) = |F(\omega)|$$

O seu espectro de fase (ângulo no plano complexo)

$$\Phi(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{Imag(F)}{Real(F)}\right)$$

Onde $\omega = 2\pi f$

Se f for real, o espectro de amplitude é simétrico.

Fast Fourier Transform $N = 2^k 3^m 5^n$

As simetrias dos senos e cosenos podem ser aproveitadas para desenhar algoritmos muito eficientes **se** o Número de pontos da amostra for da forma $N = 2^k 3^m 5^n, (k, n, m \in \mathbb{N})$.

Transformada discreta de Fourier em numpy

```
F=np.fft.fft(f)
```

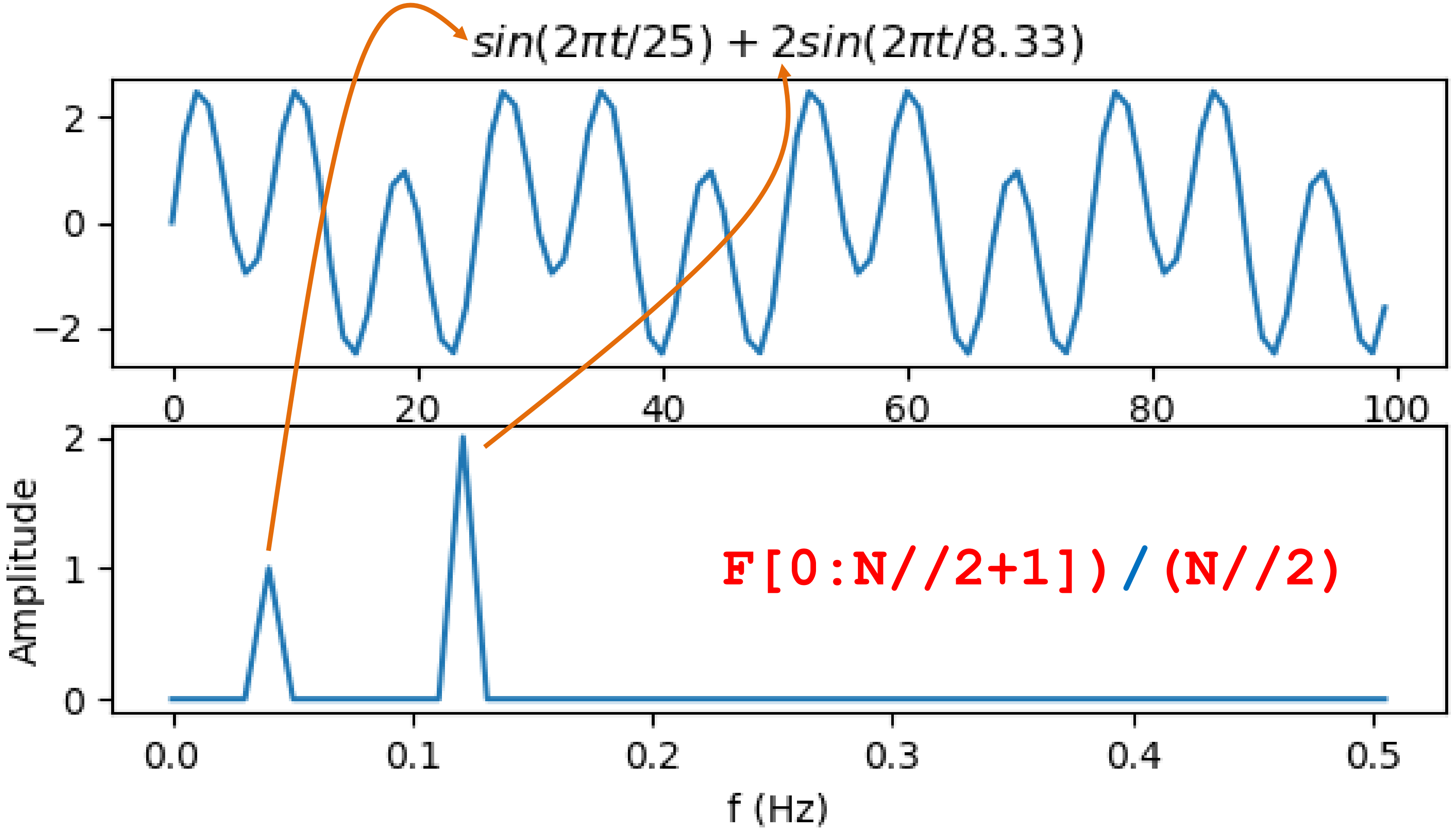
Transformada inversa

```
f=np.fft.ifft(F)
```

fft da soma de dois senos

```
import numpy as np;import matplotlib.pyplot as plt
N=100;dt=1.;T=N*dt/4.;
t=np.linspace(0,dt*(N-1),N);
f=np.sin(2*np.pi*t/T)+2*np.sin(2*np.pi*t/(T/3))
plt.subplot(3,1,1);plt.plot(t,f)
plt.title(r"$sin(2\pi t/25)+2 sin (2\pi t/8.33 )$")
F=np.fft.fft(f)
fNyq=1/(2*dt); df=2*fNyq/(N-1)
freq=np.arange(0,fNyq+df,df)
plt.subplot(3,1,2)
plt.plot(freq,np.abs(F[0:N//2+1])/(N//2))
plt.ylabel('Amplitude');plt.xlabel('f (Hz)')
```

fft da soma de dois senos



Uma série finita (amostra) …

Tem uma transformada discreta de Fourier

$$F = \mathcal{F}(f)$$

e existe uma transformada discreta inversa tal que:

$$f = \mathcal{F}^{-1}(F)$$

Trata-se de operações exatas (a menos do erro de arredondamento).

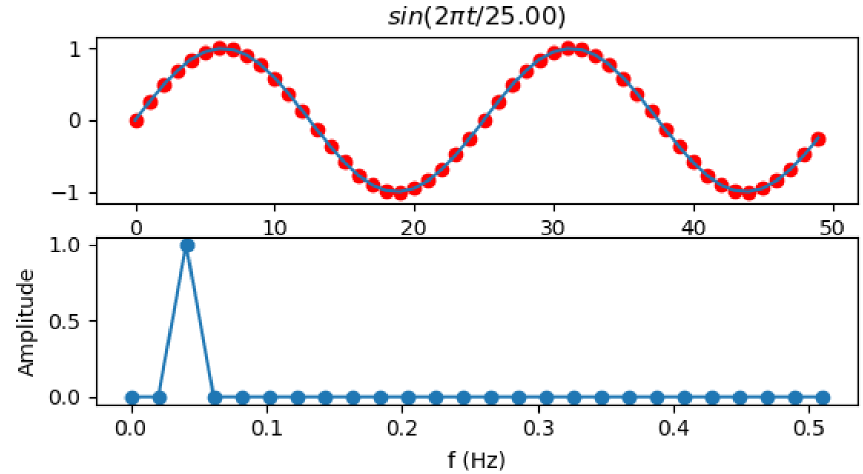
Em consequência, a função f (no domínio físico $f(t)$ ou $f(x)$) tem a mesma informação que o seu espectro F (no domínio transformado $f(\omega)$ ou $f(k_x)$).

Notas

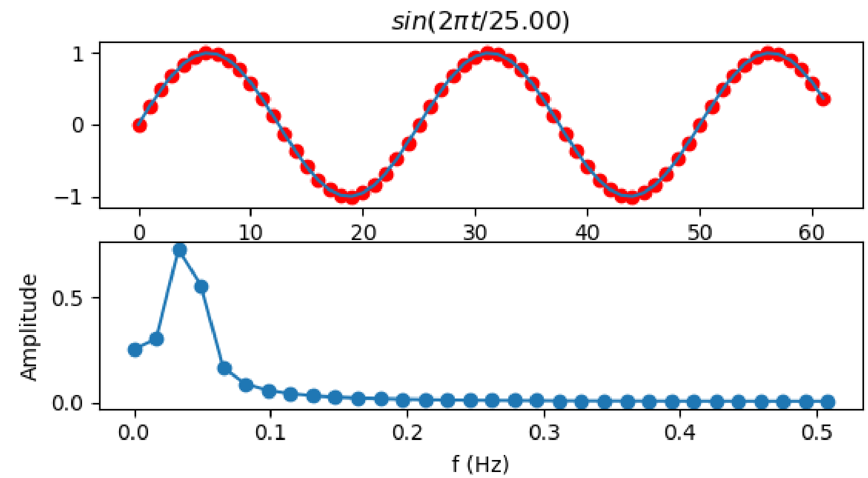
O facto de a transformada discreta ter a mesma informação do que a série discreta finita, não implica que ela tenha toda a informação da série original (continua e infinita). Isso só aconterá nas condições indicadas anteriormente.

Problema do domínio

Exatamente dois periodos fundamentais.
Espectro OK
Pico em 0.04Hz=1/T



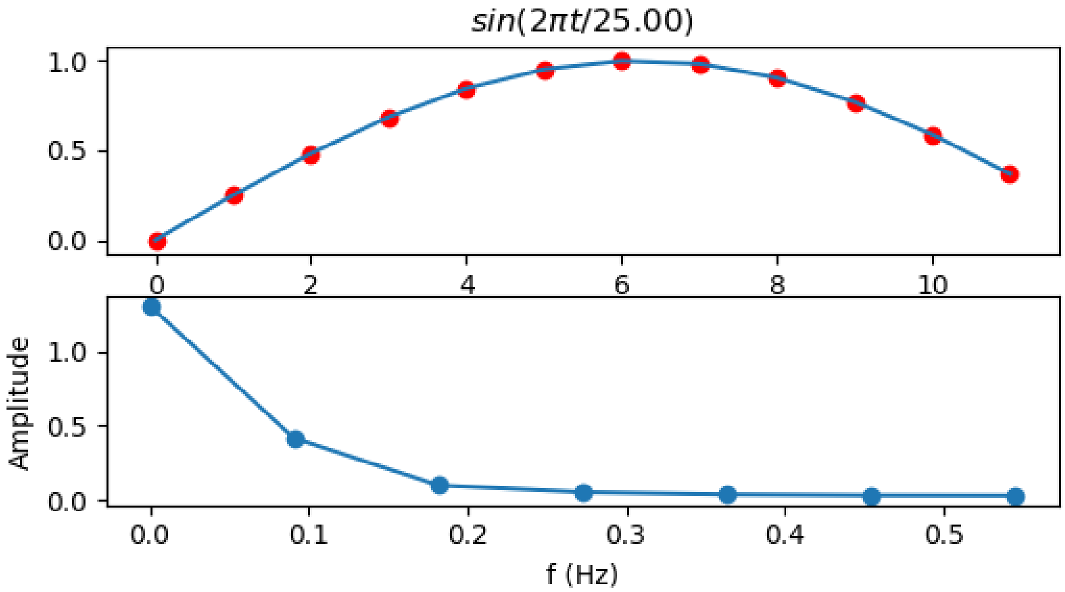
2.5 periodos fundamentais.
Espectro poluído



Mas, em ambos os casos
$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$

Domínio inferior ao período fundamental

Mas,
$\mathcal{F}^{-1}\big(\mathcal{F}(f)\big) = f$



Pico em 0Hz (média mão nula)

Com dados reais

Existem muitas harmónicas e podemos não saber qual a harmónica fundamental.

É preciso ter bom senso e ensaiar diferentes aproximações.

Por exemplo, se se tratar de uma série climática (em que existe um período anual obrigatório) deve analisar-se um período que corresponda a anos completos, ou a dias completos (não cortar o período diurno)