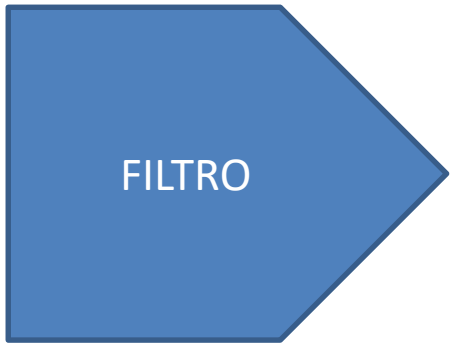
Aula 14

Filtros digitais

INPUT

$x_k, k = 0, \dots, N-1$

Sinal+ Ruído



OUTPUT

$y_k, k = 0, \dots, N-1$

Sinal+…

Sinal e ruído

As séries da dados reais contém em geral informação proveniente de diferentes processos.

Dependendo do objetivo do analista só parte dessa informação é relevante, constituindo o sinal, sendo as outras componentes designadas por ruído.

Separar o sinal do ruído é o objectivo dos filtros.

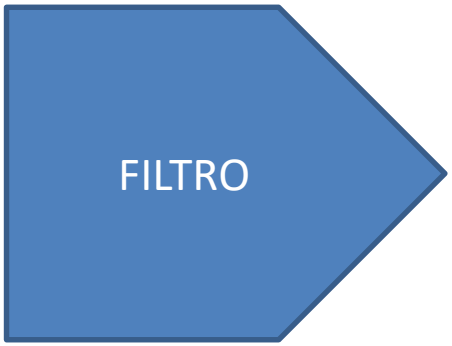
No caso dos filtros digitais a separação é feita de forma algébrica, tipicamente por operações lineares sobre os dados.

Filtro

INPUT

$x_k, k = 0, \dots, N-1$

Sinal+ Ruído



OUTPUT

$y_k, k = 0, \dots, N-1$

Sinal+…

Filtro linear não recursivo (o output depende linearmente do input)

$$y_k = \sum_{n=0}^{N} x_n h_{k-n} \Longrightarrow y = x * h$$

convolução

Coeficientes do filtro $h_j, j = 0, \dots, J-1$

Filtro recursivo

O output num dado instante depende do input, e também do próprio output em instantes anteriores:

$$y_k = \sum_{n=0}^{N} x_n h_{k-n} + \sum_{m=0}^{k-1} y_m b_{k-m}$$

Média móvel

$$y_k = \sum_{n=0}^{N} x_n h_{k-n} \Longrightarrow y = x * h$$

Se:

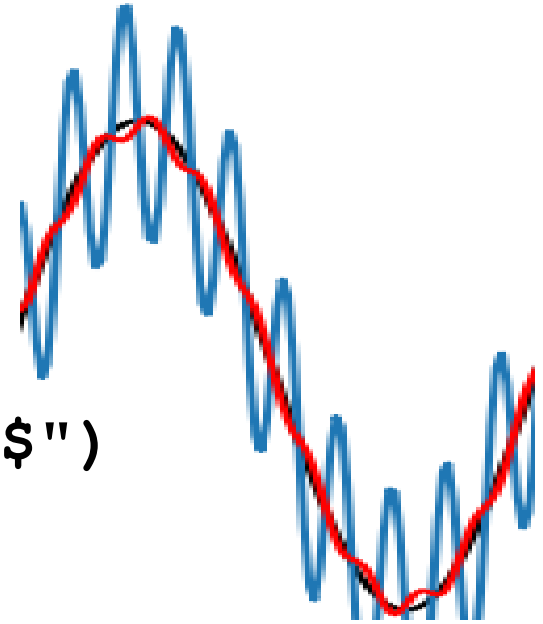
$$\sum_{n=0}^{J} h_j = 1$$

Trata-se de um filtro de média móvel. Exemplo:

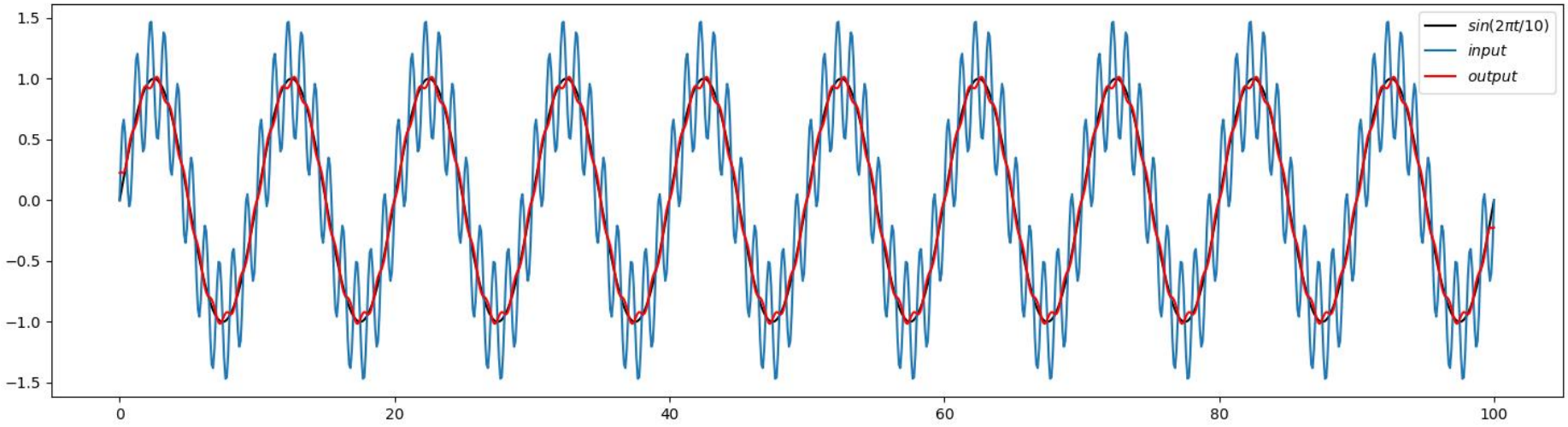
$$h_j = \frac{1}{J}$$

Média móvel

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
N=1001;dt=0.1;T=10.
t=np.arange(0.,(N-1)*dt+dt,dt)
x1=np.sin(2*np.pi*t/T) #"sinal"
x2=0.5*np.sin(2*np.pi*t/(T/10)) #"ruído"
x=x1+x2 #série a filtrar input
plt.plot(t,x1,color='black',\
         label=r"$sin(2\pi t/10)$")
plt.plot(t,x,label=r"$input$")
nn=11 #comprimento do filtro
h=np.ones((nn))/nn
y=np.convolve(x,h,mode='same') #output
plt.plot(t,y,color='red',label=r"$output$")
plt.legend()
```



```
plt.plot(t,x1,color='black',\
         label=r"$sin(2\pi t/10)$")
plt.plot(t,x,label=r"$input$")
plt.plot(t,y,color='red',\
         label=r"$output$")
```



A media móvel aplicada…

Diminuiu a amplitude das altas frequências.

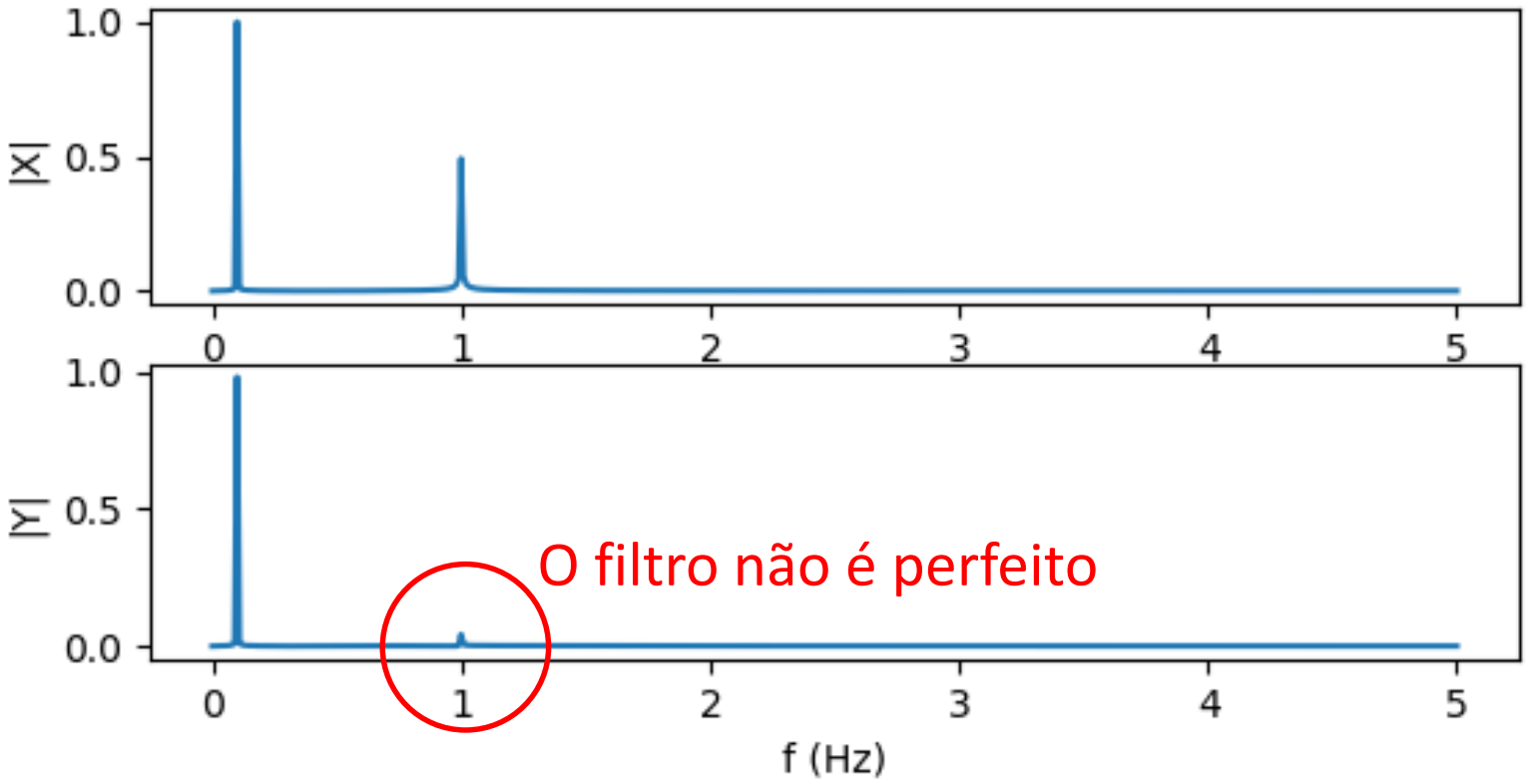
Constitui um filtro passa-baixo: deixa passar as baixas frequências.

```
x1=np.sin(2*np.pi*t/T) #"sinal" (100 pontos/T)
x2=0.5*np.sin(2*np.pi*t/(T/10)) #"ruído" (10 pontos/T=)
x=x1+x2 #série a filtrar input
nn=11 #comprimento do filtro
h=np.ones((nn))/nn
y=np.convolve(x,h,mode='same') #output
```

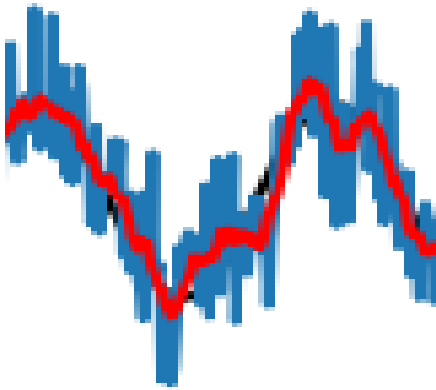
Com a mesma série e filtro

```
plt.figure()
X=np.fft.fft(x) #Espectro do input
Y=np.fft.fft(y) #Espectro do output
fNyq=1/(2*dt)
df=2*fNyq/(N-1)
freq=np.arange(0,fNyq+df,df)
plt.subplot(3,1,1)
plt.plot(freq,np.abs(X[0:N//2+1])/(N//2),label='X')
plt.ylabel('|X|') #espectro de amplitude de x
plt.subplot(3,1,2)
plt.plot(freq,np.abs(Y[0:N//2+1])/(N//2),label='Y')
plt.ylabel('|Y|') #espectro de amplitude de y
plt.xlabel('f (Hz)')
```

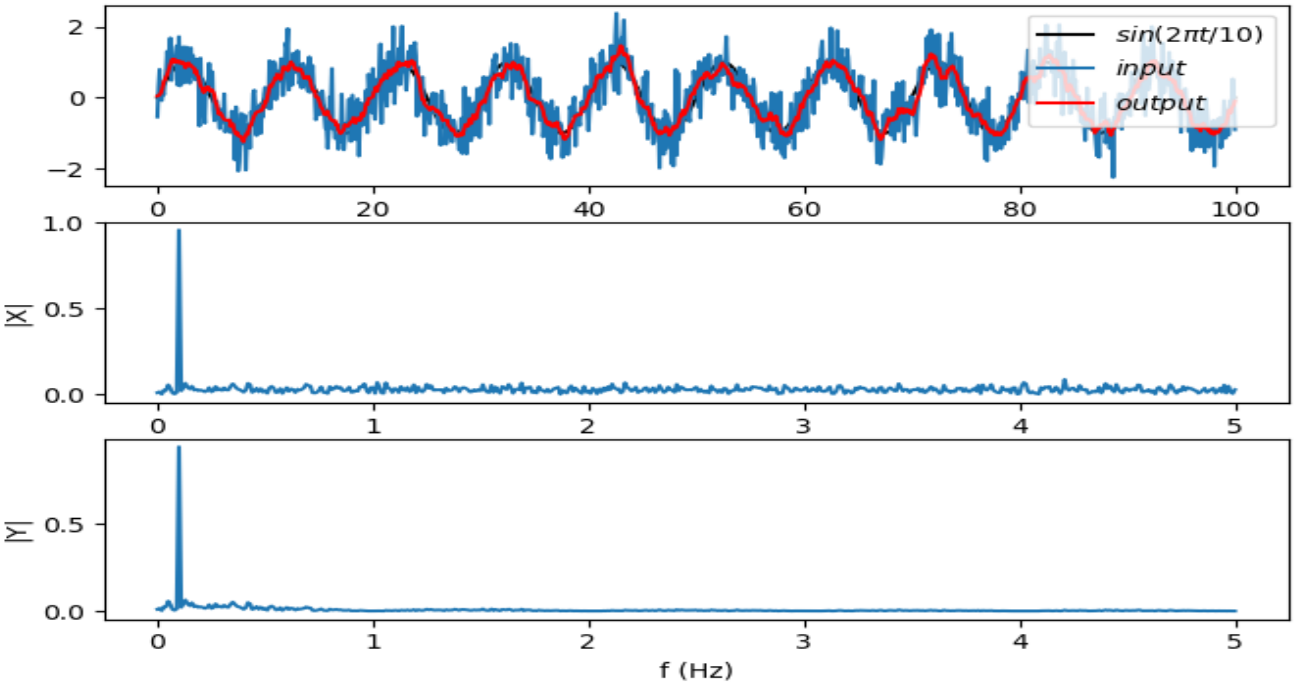
```
x1=np.sin(2*np.pi*t/T) #"sinal"
x2=0.5*np.sin(2*np.pi*t/(T/10)) #"ruído"
x=x1+x2
y=np.convolve(x,h,mode='same')
```



É claro que o ruído não costuma ser um seno de alta frequência…



```
x1=np.sin(2*np.pi*t/T)
r=0.5*np.random.randn(t.shape[0])
x=x1+r
```



Efeitos de fronteira

```
y=np.convolve(x,h,mode='same')
'same' prolonga a série x
Produzindo y com os mesmos pontos
```

Série com n pontos, filtro com J pontos

$$\{x_k\} = x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$$

$$\{h_j\} = h_0, h_1, \dots, h_{J-1}$$

Filtragem (convolução):

$$y_k = \sum_{n=0}^{N} x_n h_{k-n}, (k-n) \in [0, J-1]$$

Exemplo $J = 10$:

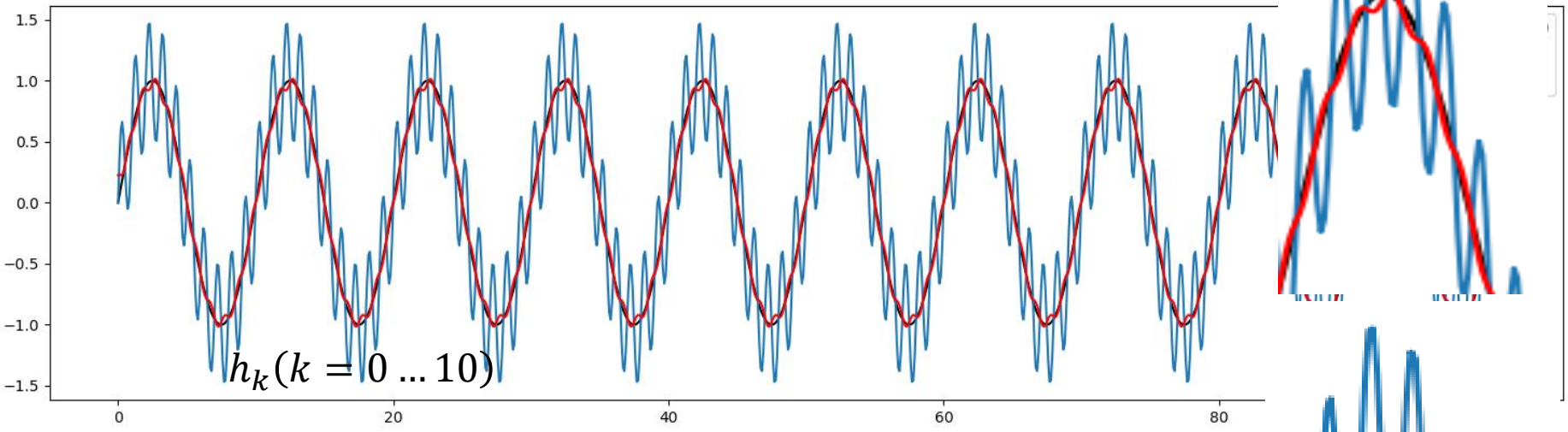
$$y_9 = x_9 h_0 + x_8 h_1 + \cdots + x_0 h_9$$

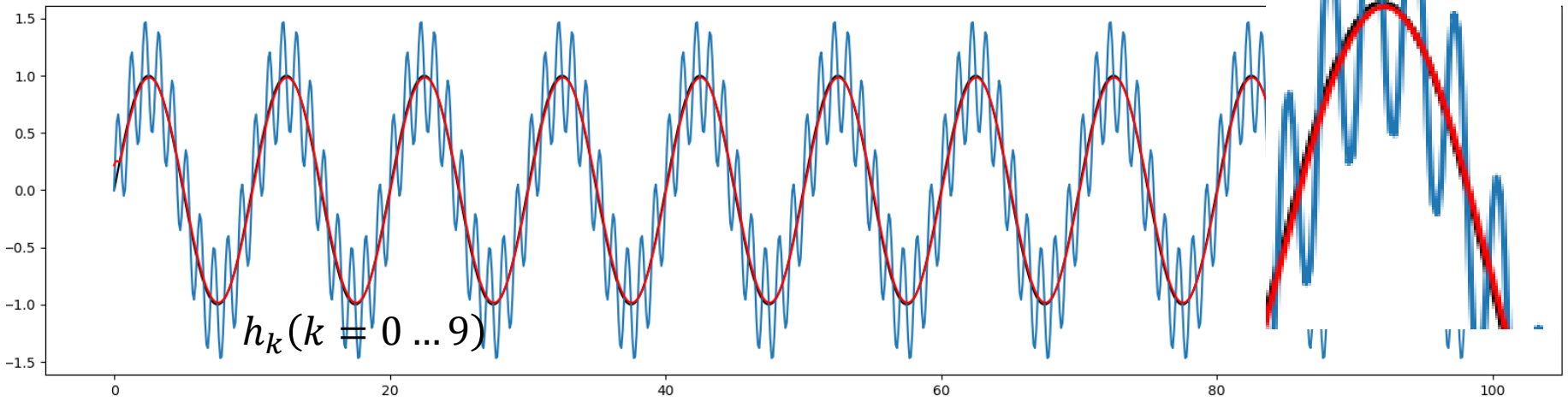
Não existe

$$y_8 = x_8 h_0 + x_7 h_1 + \cdots + x_1 h_7 + x_0 h_8 + x_{-1} h_9$$

O que faz a media móvel ao espetro?

10 pontos/T





Teorema da convolução

A transformada de Fourier da convolução de duas séries é igual ao produto das transformadas das séries individuais:

$$y = x * h$$
$$Y = \mathcal{F}(y) = F(x * h) = \mathcal{F}(x)\mathcal{F}(h) = XH$$

Notar que Y, X, H são complexos.

H é designada por função de transferência do filtro h

Série sintética com 4 frequências

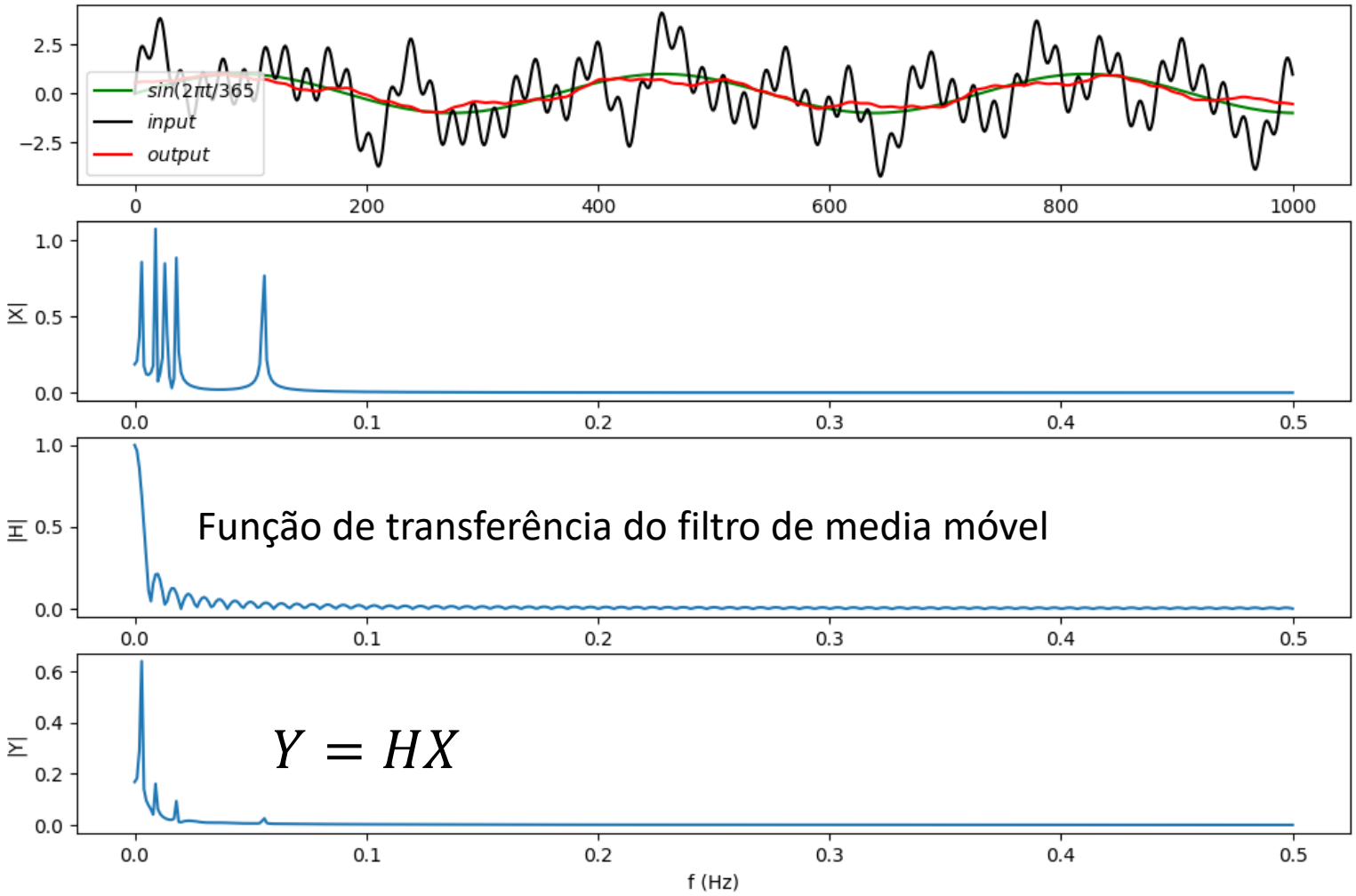
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.close('all')
N=1001
dt=1.0
T=365.
t=np.arange(0.,(N-1)*dt+dt,dt)
x=np.sin(2*np.pi*t/T)
plt.subplot(4,1,1)
plt.plot(t,x,label=r"$sin(2\pi
t/365$",color='green')
for Tr in [110.,75.,55.,18.]:
    x=x+np.sin(2*np.pi*t/Tr)
```

```
plt.plot(t,x,label=r"$input$",color='black')
nn=150 #comprimento do filtro
h=np.ones((nn))/nn #média móvel
y=np.convolve(x,h,mode='same')
plt.plot(t,y,color='red',label=r"$output$")
plt.legend()
X=np.fft.fft(x)
Y=np.fft.fft(y)
```

```
fNyq=1/(2*dt)
if N%2==0:
    df=2*fNyq/N
else:
   df=2*fNyq/(N-1)
freq=np.arange(0,fNyq+df,df)
plt.subplot(4,1,2)
plt.plot(freq,np.abs(X[0:N//2+1])/(N//2),label='X')
plt.ylabel('|X|') #espectro de amplitude de x
hExt=np.zeros(x.shape)
hExt[0:nn]=h #os outros termos são nulos
H=np.fft.fft(hExt)
plt.subplot(4,1,3)
plt.plot(freq,np.abs(H[0:N//2+1]),label='H')
plt.ylabel('|H|') #espectro de amplitude de h
plt.subplot(4,1,4)
plt.plot(freq,np.abs(Y[0:N//2+1])/(N//2),label='Y')
plt.ylabel('|Y|') #espectro de amplitude de y
plt.xlabel('f (Hz)')
```

Teorema da convolução

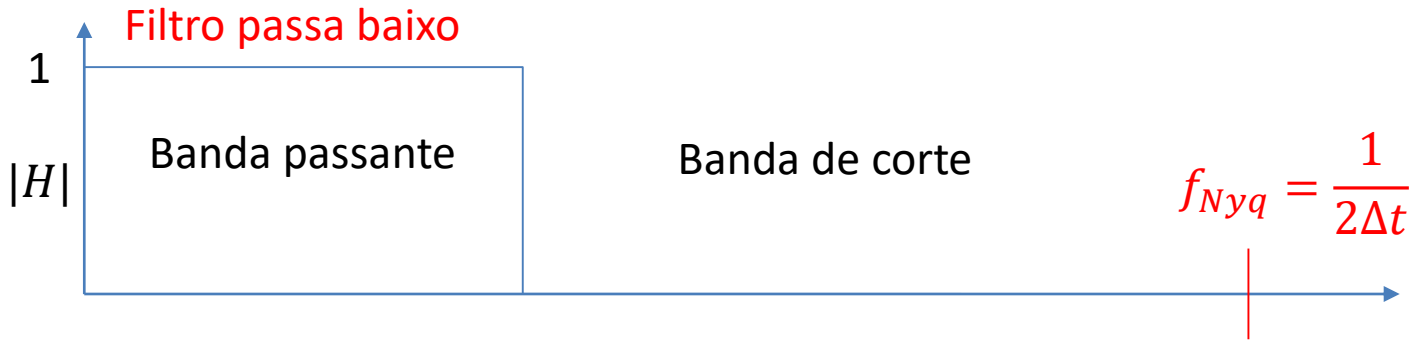
```
x=np.sin(2*np.pi*t/365)
for Tr in [110.,75.,55.,18.]:
    x=x+np.sin(2*np.pi*t/Tr)
```



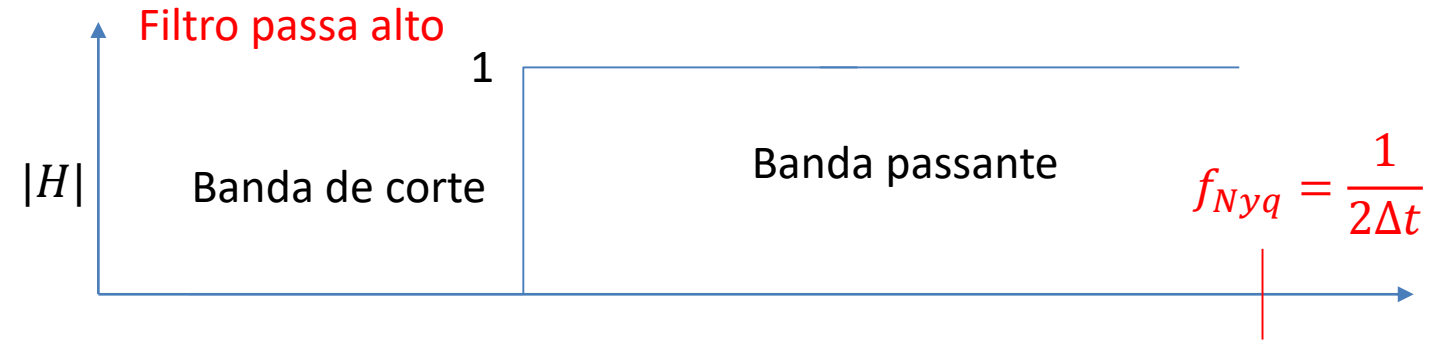
O que seria um filtro perfeito? (amplitude)

$Y_L = H_{Low}X$

$Y = HX$



$Y_H = H_{High}X$



$Y_H = (1 - H_{Low})X$

Filtros de Fourier

Se desenharmos diretamente $H(\omega)$, podemos fazer:

$$X = \mathcal{F}(x)$$

$$Y = HX$$

$$y = \mathcal{F}^{-1}(Y)$$

Como a fft é muito eficiente, o método permite implementar filtros quase-ideais.

Mas atenção: H (tal com X) é complexo e tem que ser definido em todo o domínio $[-f_{Nyq}, f_{Nyq}]$ com as simetrias adequadas.

Ver exemplo nos apontamentos!