Folhas de exercícios VI

Fernando Ferreira

Introdução à Teoria dos Números
2018/2019

1. Encontrar o número racional representado sob forma de fração continuada de cada item a seguir (apresente a resposta em fração reduzida): $[3,1]$, $[1,1,1]$, $[0,6,5]$, $[1,2,3,4]$ e $[3,7,15,1]$.

2. Exprima os seguintes números racionais sob a forma de fração continuada simples: $11/7$, $-37/5$, $114/235$ e $-51/23$.

3. Este exercício tem por objetivo mostrar que cada número racional pode ser representado exatamente de duas maneiras por uma fração continuada simples (finita). (No que se segue, as frações continuadas são simples.)

   (a) Para cada fração continuada simples do exercício 2, exiba outra fração continuada que represente o mesmo racional. (P. ex., $[3,1] = [4]$.)

   (b) Mostre que $[a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m + 1] = [a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m, 1]$.

   (c) Mostre que se $m \geq 2$ então $\lfloor [a_0, a_1, a_2 \dots, a_m] \rfloor = a_0$.

   (d) Mostre que se $[a_0, a_1, \dots, a_m, 1] = [b_0, b_1, \dots, b_n, 1]$ $(\neq 1)$, então $m = n$ e $a_i = b_i$ para todo $0 \leq i \leq n$.

   (e) Conclua que cada número racional tem exatamente duas representação como fração continuada simples.

4. Seja dada uma fração continuada $[a_0, a_1, \dots, a_n]$, com $a_0 > 0$. Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0]$ e $[a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1] = \frac{q_n}{q_{n-1}}$.

5. Na notação da aula teórica, mostre que

$$p_n = \det \begin{bmatrix} a_0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{bmatrix}$$

   (Sugestão: desenvolva o determinante através da última coluna.) Mostre também que, omitindo-se a primeira linha e a primeira coluna, se obtém uma fórmula para q_n.

6. A representação do número de Napier e em fração continuada infinita simples é: $[2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,\ldots]$. Encontre os primeiros seis convergentes desta fração continuada.

7. Calcule os irracionais quadráticos dados por $[\overline{1}]$, $[2,\overline{1,2,1}]$ e $[4,\overline{2,1,3,1,2,8}]$.

8. Determine as frações continuadas simples infinitas que representam os números irracionais: $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$ e $\sqrt{17}$, $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

9. Suponha que π é dado por 3,1415926 ..., correto à sétima casa decimal. Calcule os quatro primeiros convergentes de π (i.e., os convergentes c_0, c_1, c_2 e c_3 de π).

10. Uma fração continuada simples finita $[a_0,a_1,\ldots,a_n]$ diz-se simétrica se $a_i = a_{n-i}$, para todo o $0 \leq i \leq n$. Por exemplo, $[2,1,5,1,2]$ é simétrica. Mostre que se o número racional $\frac{r}{s}$ tem representação simétrica (onde $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$ e $r \perp s$), então $r \mid (s^2 + (-1)^{n+1})$. (Sugestão: note que $p_n = r$, $q_n = s$ e utilize o exercício 5.)

11. Seja θ um número irracional representado pela fração continuada simples infinita $[a_0,a_1,a_2,\ldots]$. Para cada inteiro não negativo k, seja $\theta_k = [a_k,a_{k+1},a_{k+2},\ldots]$. Dados n,h inteiros não negativos, o segundo dos quais diferente de 0, mostre que as seguintes três condições são mutuamente equivalentes:

    (1) $\theta_{n+h} = \theta_n$.

    (2) $a_{m+h} = a_m$, para todo inteiro m com $m \geq n$.

    (3) $a_{n+qh+r} = a_{n+r}$, para todos os inteiros não negativos q e r com $r < h$.

    Estas condições caracterizam as frações continuadas *periódicas*. O item (3) permite escrever $\theta = [a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},\overline{a_n,a_{n+1},\ldots,a_{n+h-1}}]$. Se $n = 0$, a fração diz-se *puramente periódica*, ficando $\theta = [\overline{a_0,a_1,\ldots,a_{h-1}}]$.

12. Tome-se d um número natural que não seja um quadrado dum número inteiro. A equação de Pell é a equação $x^2 - dy^2 = 1$. A solução trivial da equação nos inteiros não negativos é $x = 1$ e $y = 0$. Neste exercício vamos ver que a equação de Pell tem solução não trivial (de facto, tem uma infinidade delas) e daremos um método para a(s) calcular.

    Admita-se que $\sqrt{d} = [a_0,\overline{a_1,\ldots,a_h}]$ ($h \in \mathbb{N}$) e seja $\theta_1 = [\overline{a_1,\ldots,a_h}]$. Tome-se n *ímpar* da forma $kh-1$, onde $k \in \mathbb{N}$.

    (a) Mostre que $p_n = q_{n+1} - a_0 q_n$ e $p_{n+1} - a_0 p_n = q_n d$. (Sugestão: note que $\sqrt{d} = (p_{n+1}\theta_1 + p_n)/(q_{n+1}\theta_1 + q_n)$.)

    (b) Mostre que $p_n^2 - q_n^2 d = 1$. (Sugestão: elimine a_0.)

    (c) Encontre duas soluções não triviais para $x^2 - 5y^2 = 1$ e $x^2 - 6y^2 = 1$.

    (d) Encontre uma solução não trivial para $x^2 - 10y^2 = 1$, $x^2 - 13y^2 = 1$, $x^2 - 14y^2 = 1$, $x^2 - 17y^2 = 1$ e $x^2 - 19y^2 = 1$.

13. Mostre que toda a fração continuada simples infinita periódica representa um número irracional quadrático.

14. Seja dado $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ e δ um real positivo. Suponha que se tem a desigualdade
$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| > \frac{\delta}{b^n}$$
para todos $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$. Então, se ε é um número real positivo, a desigualdade
$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^{n+\varepsilon}}$$
tem apenas um número finito de soluções racionais $\frac{a}{b}$.