Cálculo Infinitesimal II / Cálculo II - Apontamentos de Apoio
Capítulo 5 - Integrais de Linha

1 Integrais de linha de campos escalares e vectoriais

Neste capítulo vamos considerar curvas (do plano ou do espaço) orientadas, ou seja, curvas onde foi fixada previamente uma determinada orientação.

Consideremos uma função de classe C^1, $r(t) = (f(t), g(t), h(t))$, definida num intervalo contendo $[a, b]$ e seja C a curva definida por $r(t)$ (neste caso a curva diz-se de classe C^1).

Definição 1.1 *Uma curva C, dada pela função vectorial $r(t)$ com $a \leq t \leq b$, diz-se uma curva simples se não se intersectar, excepto possivelmente nos seus extremos.*

Recordemos o seguinte resultado que vimos no Capítulo 2.

Teorema 1.2 *Nas condições anteriores, o comprimento da curva C descrita por $r(t)$ com $a \leq t \leq b$ é dado por*

$$L(C) = \int_a^b \|r'(t)\| \, dt.$$

Definição 1.3 *Seja C uma curva simples e de classe C^1 do plano ou do espaço e seja $r(t)$, $a \leq t \leq b$ uma parametrização de C. Se f é uma função contínua cujo domínio contém C, definimos o integral de linha (relativamente ao comprimento de arco) de f ao longo da curva C por*

$$\int_C f \, ds = \int_a^b f(r(t)) \|r'(t)\| \, dt.$$

Note-se que o integral anterior é independente da parametrização que se considere para a curva C. Pondo $f \equiv 1$ na definição anterior obtemos

$$\int_C 1 \, ds = \int_a^b \|r'(t)\| \, dt = L(C).$$

Suponhamos agora que a curva C é uma união finita de curvas simples e de classe C^1, $C_1, \ldots, C_m$, onde o ponto inicial da curva C_{i+1} é o ponto final da curva C_i, $i = 1, \ldots, m-1$. Neste caso C diz-se uma curva *seccionalmente de classe* C^1 e definimos

$$\int_C f \, ds = \sum_{i=1}^{m} \int_{C_i} f \, ds.$$

Definição 1.4 *Seja C uma curva simples e de classe C^1 do espaço e seja $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$ uma parametrização de C. Se f é uma função contínua cujo domínio contém C, definimos os seguintes integrais de linha de f ao longo da curva C*

$$\int_C f(x, y, z) \, dx = \int_a^b f(r(t)) \, x'(t) \, dt$$
$$\int_C f(x, y, z) \, dy = \int_a^b f(r(t)) \, y'(t) \, dt$$
$$\int_C f(x, y, z) \, dz = \int_a^b f(r(t)) \, z'(t) \, dt.$$

Analogamente para curvas do plano. Estas noções estendem-se de forma natural ao caso das curvas seccionalmente de classe C^1.

De um modo geral, os integrais de linha dependem das curvas consideradas e não apenas dos pontos iniciais e finais destas. Veremos mais adiante em que condições é que o integral de linha é independente do caminho considerado. O valor do integral de linha depende também da orientação da curva. Dada uma curva orientada C, se designarmos por $-C$ a curva que consiste no mesmo conjunto de pontos mas percorrida em sentido contrário tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{-C} f(x,y,z)\,dx &= -\int_C f(x,y,z)\,dx \\
\int_{-C} f(x,y,z)\,dy &= -\int_C f(x,y,z)\,dy \\
\int_{-C} f(x,y,z)\,dz &= -\int_C f(x,y,z)\,dz,
\end{aligned}$$

no entanto

$$\int_{-C} f(x,y,z)\,ds = \int_C f(x,y,z)\,ds.$$

Vejamos agora como definir integrais de linha de campos vectoriais.

Definição 1.5 *Seja C uma curva simples e de classe C^1 do plano ou do espaço e seja $r(t)$, $a \leq t \leq b$ uma parametrização de C. Se F é um campo vectorial contínuo cujo domínio contém C, definimos o integral de linha de F ao longo da curva C por*

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\,dt.$$

A definição anterior estende-se facilmente ao caso em que C é uma curva seccionalmente de classe C^1 e, tal como para os campos escalares, o integral anterior é independente da parametrização que se considere para a curva C.

Se F representar um campo de forças contínuo, o integral anterior dá-nos o trabalho W realizado por esse campo de forças no deslocamento de uma partícula ao longo da curva C

$$W = \int_C F \cdot dr.$$

Vamos agora ver qual a relação entre os integrais de linha que definimos acima. Seja $F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ um campo vectorial contínuo e seja C uma curva simples e de classe C^1 dada por $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ com $a \leq t \leq b$. Então tem-se

$$\int_C F \cdot dr = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Daqui resulta que

$$\int_{-C} F \cdot dr = -\int_C F \cdot dr.$$

2 Independência de caminho

Vimos que, em geral, o integral de linha $\int_C F \cdot dr$ depende da curva C considerada e não apenas dos seus pontos inicial e final. No entanto, há casos em que o referido integral é independente do caminho, vejamos em que circunstâncias é que isso acontece. Para simplificar, tomaremos nesta secção campos vectoriais cujos domínios são $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Teorema 2.1 *Seja C uma curva seccionalmente de classe C^1 dada pela função vectorial $r(t)$ com $a \leq t \leq b$. Seja f uma função de classe C^1 definida em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Então*

$$\int_C \nabla f \cdot dr = f(r(b)) - f(r(a)).$$

Note-se a semelhança entre este resultado e a Fórmula de Barrow para funções de uma só variável: $\displaystyle\int_a^b g'(x)\,dx = g(b) - g(a)$.

Definição 2.2 *Um campo vectorial F, definido em $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$), diz-se conservativo se existe uma função escalar f, definida em $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$), tal que $\nabla f(x,y) = F(x,y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ (ou $\nabla f(x,y,z) = F(x,y,z)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$).*

Definição 2.3 *Seja F um campo vectorial contínuo. Dizemos que o integral de linha $\displaystyle\int_C F \cdot dr$ é independente de caminho se*

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_{C_2} F \cdot dr$$

para quaisquer curvas simples C_1 e C_2 com os mesmos pontos iniciais e finais.

De acordo com o teorema anterior concluimos que integrais de linha de campos conservativos são independentes de caminho, uma vez que dependem apenas dos valores de f nos pontos $r(b)$ e $r(a)$.

Definição 2.4 *Uma curva C diz-se fechada se o seu ponto final coincidir com o seu ponto inicial, isto é, supondo que C é dada por $r(t)$ com $a \leq t \leq b$, C é fechada se $r(b) = r(a)$.*

Teorema 2.5 *Seja F um campo vectorial contínuo definido em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Se $\displaystyle\int_C F \cdot dr$ é independente do caminho, então $\displaystyle\int_C F \cdot dr = 0$ para toda a curva C simples, fechada e seccionalmente de classe C^1.*

Resulta dos dois teoremas anteriores que para campos conservativos F se tem

$$\int_C F \cdot dr = 0$$

para toda a curva C simples, fechada e seccionalmente de classe C^1. O resultado que se segue diz-nos que os únicos campos vectoriais para os quais o integral de linha é independente de caminho são os campos conservativos.

Teorema 2.6 *Seja F um campo vectorial contínuo definido em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Se $\displaystyle\int_C F \cdot dr$ é independente do caminho então F é um campo conservativo.*

É, assim, importante ver em que condições é que se pode garantir que um campo vectorial é conservativo. A resposta é dada pelo teorema que se segue.

Teorema 2.7 *Seja $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ um campo vectorial de classe C^1 definido em $\mathbb{R}^2$. Então F é conservativo se e só se*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y), \;\; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Seja $F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ um campo vectorial de classe C^1 definido em $\mathbb{R}^3$. Então F é conservativo se e só se

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z), \;\; \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial R}{\partial x}(x,y,z), \;\; \frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial R}{\partial y}(x,y,z),$$

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

3 Teorema de Green

O Teorema de Green, que enunciaremos de seguida, dá-nos a relação entre um integral de linha ao longo de uma curva simples e fechada C e um integral duplo na região D do plano limitada por C. Usamos a convenção que a orientação positiva de C é no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, de modo que ao percorrermos C neste sentido a região D fica do nosso lado esquerdo. Usamos a notação $\oint_C P\,dx + Q\,dy$ para indicar que o integral de linha é calculado usando a orientação positiva da curva simples e fechada C.

Teorema 3.1 *Seja C uma curva seccionalmente de classe C^1, simples e fechada do plano, com orientação positiva e seja D a região do plano limitada por C. Se P e Q são funções de classe C^1 num aberto que contém D então*

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dA.$$