Exercícios de Cálculo Infinitesimal II / Cálculo II
Capítulo 5

1. Calcule os seguintes integrais de linha

   a) $\displaystyle\int_C \frac{x}{y+7}\, ds$, onde $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25,\ x \leq 0\}$;

   b) $\displaystyle\int_C y\, ds$, onde C é a curva dada por $x = \sqrt{2}t,\ y = \log t,\ z = \dfrac{t^2}{2}$ para $1 \leq t \leq e$;

   c) $\displaystyle\int_C y^2\, dx$, onde C é o arco da parábola $x = y^2$ do ponto $(1,1)$ ao ponto $(4,2)$;

   d) $\displaystyle\int_C z\, dx + x\, dy + y\, dz$, onde C é o segmento de recta do ponto $(0,1,2)$ ao ponto $(3,-1,4)$.

2. Determine o trabalho realizado pelo campo de forças $F(x,y,z) = (yz, xz, xy)$ no deslocamento de uma partícula ao longo da curva dada por $r(t) = \left(t^2, t, \dfrac{1}{t}\right)$, para $1 \leq t \leq 2$.

3. Calcule $\displaystyle\int_C F \cdot dr$, onde

   a) $F(x,y) = (x^2, xy)$ e C é a semi-circunferência dada por $r(t) = (2\cos t, 2\sin t)$ com $0 \leq t \leq \pi$;

   b) $F(x,y) = (2y - x, 3x + y)$ e C é o arco da parábola $x = y^2$ do ponto $(0,0)$ ao ponto $(1,1)$;

   c) $F(x,y) = (2y - x, 3x + y)$ e C é o segmento de recta do ponto $(0,0)$ ao ponto $(1,1)$;

   d) $F(x,y,z) = (y + e^x, e^y, -yz)$ e C é a curva dada por $r(t) = (t, \cos t, \sin t)$ com $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$.

4. Em cada um dos seguintes casos verifique se o campo vectorial dado é conservativo e, caso seja, determine uma função f tal que $F = \nabla f$

   a) $F(x,y) = (3x^2 + 2xy, x + y^2)$;

   b) $F(x,y) = (6xy - 4y^2, 3x^2 + 3y^2 - 8xy)$;

   c) $F(x,y) = (2xe^y + y\cos x, \sin x + x^2e^y + 2)$;

   d) $F(x,y,z) = (yz, xz + y, xy + 2)$;

   e) $F(x,y,z) = (z^2 - y\sin x, \cos x - 2z, 2xz - 2y + z)$.

5. Seja $F(x,y) = (2xe^y, x^2e^y + \cos y)$.

   a) Determine, e represente graficamente, as imagens por meio de F das rectas $x = 0$ e $y = 0$.

   b) Determine um vector não nulo w tal que $F'_w(2,0)$ seja ortogonal ao vector $(-1,1)$.

   c) Mostre que F é conservativo e calcule uma função f tal que $\nabla f = F$.

   d) Calcule $\displaystyle\int_C F \cdot dr$, onde C é uma curva de classe C^1 do ponto $(0,0)$ ao ponto $(1,0)$.

6. Determine o valor de k de modo a que o integral de linha

$$\int_C \left(2\sin x + y^2\right)\, dx + (kxy + e^y)\, dy$$

   seja independente de caminho e, para o valor de k encontrado, calcule o valor do integral, sendo C uma curva de classe C^1 do ponto $(0,1)$ para o ponto $(\pi,2)$.

7. a) Mostre que o campo vectorial $F(x,y) = \big(y\sin(x^2y^2), x\sin(x^2y^2)\big)$ é conservativo.

   b) Calcule $\displaystyle\int_C y\sin(x^2y^2)\,dx + x\sin(x^2y^2)\,dy$, onde C é o segmento de recta do ponto $(0,2)$ ao ponto $(2,0)$.

8. Use o Teorema de Green para calcular os seguintes integrais de linha

   a) $\displaystyle\oint_C \left(2x - y^2\right)\,dx + (xy-1)\,dy$, onde C é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ e $(0,1)$;

   b) $\displaystyle\oint_C xy\,dy$, onde a curva C consiste no segmento de recta do ponto $(-a,0)$ ao ponto $(a,0)$ seguido da semi-circunferência $x^2+y^2=a^2$ com $y \geq 0$, de $(a,0)$ a $(-a,0)$, $(a>0)$;

   c) $\displaystyle\oint_C (x+2y)\,dx + (x-2y)\,dy$, onde a curva C consiste no arco da parábola $y = x^2$ do ponto $(0,0)$ ao ponto $(1,1)$ seguido do segmento de recta do ponto $(1,1)$ ao ponto $(0,0)$;

   d) $\displaystyle\oint_C F\cdot dr$, onde $F(x,y) = (x^2+2x-xy^2, y^3-4y)$ e a curva C consiste no arco da circunferência $x^2+y^2=16$ de $(4,0)$ a $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ seguido dos segmentos de recta de $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ a $(0,0)$ e de $(0,0)$ a $(4,0)$.

9. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma solução da equação diferencial $\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$. Mostre que

$$\oint_C \phi_y\,dx - \phi_x\,dy = 0$$

para toda a curva C seccionalmente de classe C^1, simples e fechada.