Trabalho extra III

Fernando Ferreira

Introdução à Teoria dos Números
2018/2019

Num primeiro exercício vamos caracterizar os *triplos pitagóricos*, isto é os triplos de números naturais x, y e z tais que $x^2 + y^2 = z^2$. Fixamos um triplo pitagórico x, y e z com $x \perp y$, $x \perp z$ e $y \perp z$.

(a) Mostre que x e y não têm a mesma paridade. (Sugestão: para ver que não podem ser ambos ímpares considere a igualdade pitagórica módulo 4.)

(b) *A partir de agora, e sem perda de generalidade, supomos que x é ímpar e y é par.* Mostre que $\mathrm{mdc}(z + x, z - x) = 2$.

(c) Mostre que $z + x = 2a^2$, $z - x = 2b^2$ e $y = 2ab$ para certos naturais a e b com $a \perp b$. (Sugestão: note que $(z + x)(z - x) = y^2$.)

(d) Conclua que os triplos pitagóricos (com $x \perp y$, $x \perp z$ e $y \perp z$) têm exatamente a forma $x = a^2 - b^2$, $y = 2ab$ e $z = a^2 + b^2$, onde $a \perp b$ e a e b são de paridades opostas.

(e) Diga quais são os primeiros quatro triplos pitagóricos (i.e., com os valores mais baixos de z).

(f) E se x, y e z não forem primos dois a dois?

De seguida, vamos usar esta caracterização dos triplos pitagóricos para mostrar que a equação $x^4 + y^4 = z^2$ não tem soluções nos números naturais. Note que, em particular, se demonstra que a equação de Fermat de expoente quatro não tem soluções. Suponha, com vista a um absurdo, que $x^4 + y^4 = z^2$ com $x, y, z \in \mathbb{N}$ e z mínimo nestas condições. É claro que x, y e z são coprimos dois a dois. Pelo acima, existem $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $x^2 = a^2 - b^2$, $y^2 = 2ab$ e $z = a^2 + b^2$ com $a \perp b$ e de paridades opostas.

(a) Mostre que b é par. (Sugestão: caso contrário obtém-se uma contradição raciocinando módulo 4.)

(b) Mostre que existem $c, d \in \mathbb{N}$ tais que $a = c^2 + d^2$, $b = 2cd$ e $x = c^2 - d^2$ com $c \perp d$.

(c) Mostre que $y'^2 = (c^2 + d^2)cd$, onde $y = 2y'$.

(d) Da alínea anterior, conclua que c, d e $c^2 + d^2$ são quadrados inteiros. (Sugestão: note que c, d e $c^2 + d^2$ são coprimos entre si.)

(e) Se $c = e^2$, $d = f^2$ e $c^2 + d^2 = g^2$, mostre que $g^2 < z$ e conclua o resultado desejado.