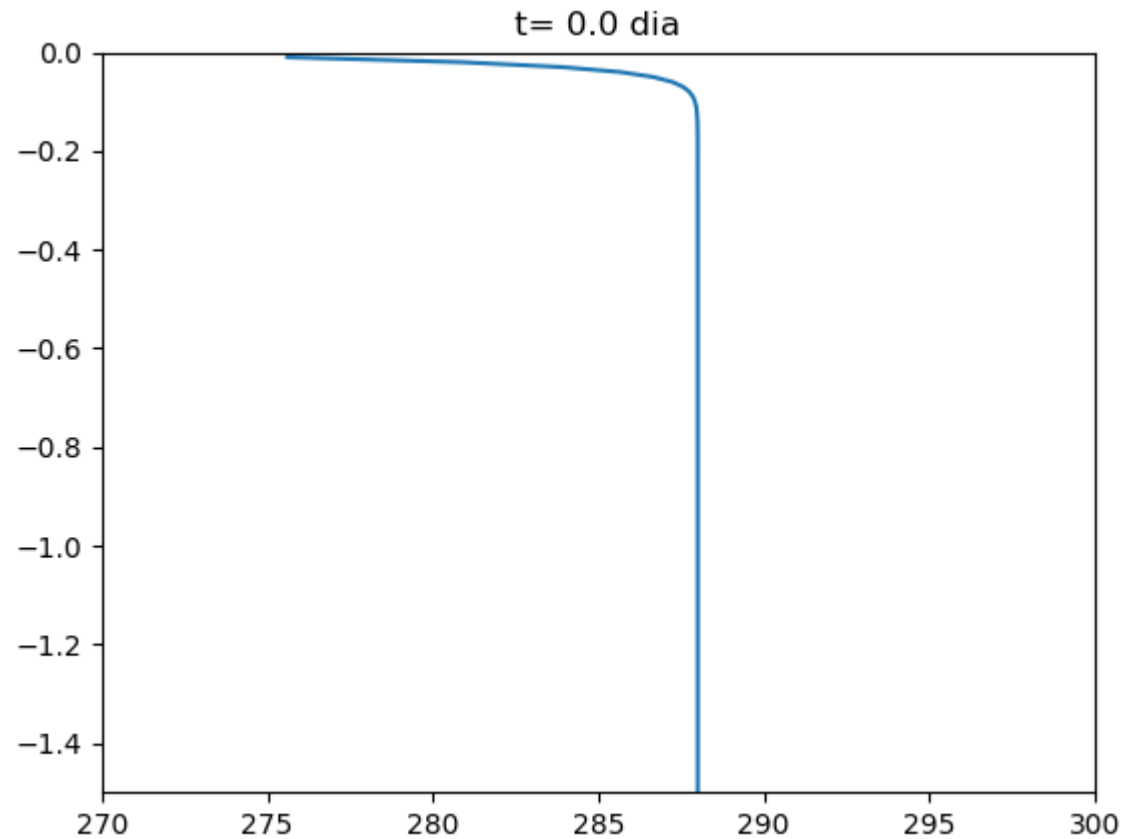


Aula 21

Equação de Fourier: solução transiente



$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (-\chi \nabla T) + \dot{q}_V$$

Vamos considerar o caso **não estacionário** mais simples, representando a condução de calor num meio **unidimensional**, na **ausência de fontes internas**. Nesse caso a equação escreve-se:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(-\chi \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

E representa, por exemplo a evolução de temperatura num perfil vertical de solo, com **condutividade** χ , dadas **condições fronteira** no topo e na base do perfil.

Neste caso temos uma equação diferencial com derivadas (parciais) no espaço e no tempo: dependendo de **condições iniciais e fronteira** (um problema misto)

A aproximação mais simples... não funciona

Calculando derivadas avançadas no tempo e centradas no espaço, obtemos com $\chi = \text{const}$, $\lambda = \frac{\chi}{\rho c_p}$ (difusividade térmica), o método explícito :

$$\frac{T_k^{n+1} - T_k^n}{\Delta t} = \lambda \frac{T_{k-1}^n + T_{k+1}^n - 2T_k^n}{\Delta z^2}$$

(Onde T_k^{n+1} representa a temperatura no ponto \mathbf{k} , no instante $\mathbf{n+1}$)

Que infelizmente é **instável**, i.e. o seu erro cresce exponencialmente no tempo, como veremos mais tarde (porque ele vai ser um caso especial do método a desenvolver).

É claro que o método anterior **não** satisfaz o teorema da média, e já vimos que isso é importante.

Satisfazendo o teorema da média

$$\begin{aligned}\frac{T_k^{n+1} - T_k^n}{\Delta t} &= \left(\frac{T_{k-1}^{n+1/2} + T_{k+1}^{n+1/2} - 2T_k^{n+1/2}}{\Delta Z^2} \right) \\ &= \lambda \left((1 - \alpha) \frac{T_{k-1}^n + T_{k+1}^n - 2T_k^n}{\Delta Z^2} + \alpha \frac{T_{k-1}^{n+1} + T_{k+1}^{n+1} - 2T_k^{n+1}}{\Delta Z^2} \right)\end{aligned}$$

Com $\alpha = \frac{1}{2}$ (notando que se $\alpha = 0$ temos o método explícito)

que se pode escrever (futuro à esquerda):

$$-\alpha \frac{\lambda \Delta t}{\Delta Z^2} T_{k-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{\alpha \lambda \Delta t}{\Delta Z^2} \right) T_k^{n+1} - \alpha \frac{\lambda \Delta t}{\Delta Z^2} T_{k+1}^{n+1} = T_k^n + (1 - \alpha) \Delta t \frac{T_{k-1}^n + T_{k+1}^n - 2T_k^n}{\Delta Z^2}$$

Ou

$$M \vec{T}^{n+1} = \vec{B}^n$$

$$M \vec{T}^{n+1} = \vec{B}^n$$

Este sistema de equações permite calcular a distribuição de temperatura no instante $(n + 1)\Delta t$, conhecida a sua distribuição no instante $n\Delta t$. Esse cálculo, no entanto, é feito de forma **implícita**, obrigando à resolução de um sistema de equações com uma equação para cada ponto da grelha espacial. Se a malha contiver N_z pontos, a matriz M é uma matriz quadrada ($N_z \times N_z$).

Se $\alpha = 0$, o sistema torna-se **explícito**, e será instável.

Se $\alpha = 1$, o sistema é **totalmente implícito**.

Se $\alpha = \frac{1}{2}$, satisfaz o teorema da média, e o método é **semi-implícito**, designado por Crank-Nicholson.

Condições fronteira espaciais

A equação

$$-\alpha \frac{\lambda \Delta t}{\Delta z^2} T_{k-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{2\alpha \lambda \Delta t}{\Delta z^2}\right) T_k^{n+1} - \alpha \frac{\lambda \Delta t}{\Delta z^2} T_{k+1}^{n+1} = T_k^n + (1 - \alpha) \Delta t \frac{T_{k-1}^n - 2T_k^n + T_{k+1}^n}{\Delta z^2}$$

Só pode ser aplicada nos **pontos interiores**: $k \in [1, N_z - 2]$

Nos pontos de fronteira $(T_0^{n+1}, T_{N_z-1}^{n+1})$ a temperatura tem que ser prescrita. Por exemplo, à la **Dirichlet**:

$$T_0^{n+1} = T_b((n+1)\Delta t)$$

ou a la **von Neumann**:

$$T_{N_z-1}^{n+1} = T_{N_z-2}^{n+1} + \left(\frac{\partial T_b}{\partial z}\right) \Delta z$$

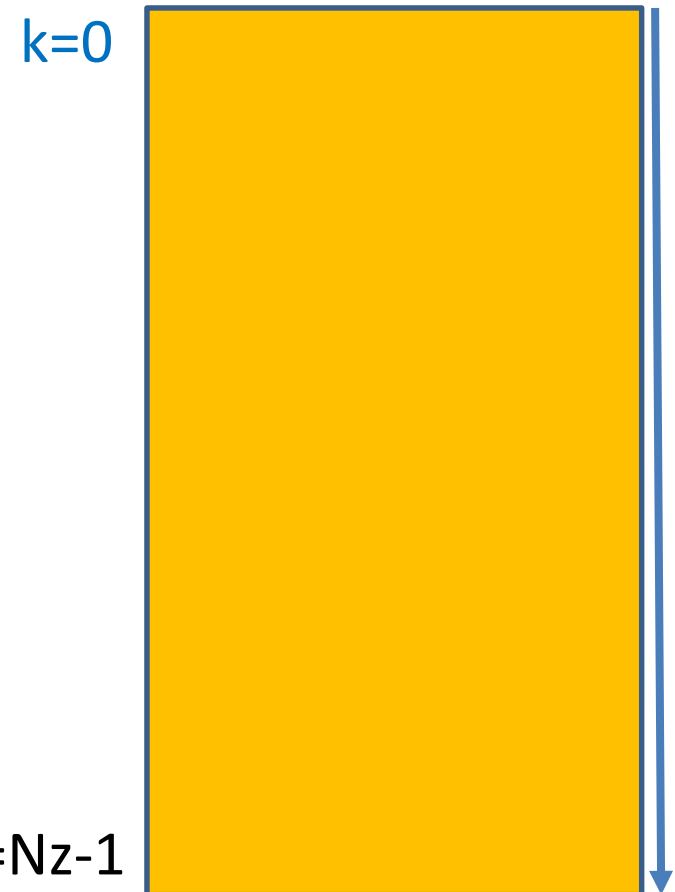
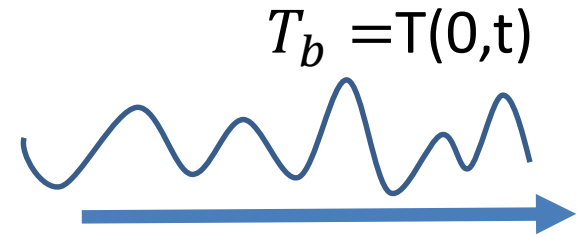
Condição fronteira em $z = 0$

Em $k = 0$: condição Dirichlet (T forçada)

$$\begin{aligned} & -\alpha \frac{\lambda \Delta t}{\Delta z^2} T_b^{n+1} + \left(1 + \frac{\alpha \lambda \Delta t}{\Delta z^2}\right) T_0^{n+1} - \alpha \frac{\lambda \Delta t}{\Delta z^2} T_1^{n+1} \\ & = T_0^n + (1 - \alpha) \lambda \Delta t \frac{T_b^n - 2T_0^n + T_1^n}{\Delta z^2} \end{aligned}$$

Ou

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\alpha \lambda \Delta t}{\Delta z^2}\right) T_0^{n+1} - \alpha \frac{\lambda \Delta t}{\Delta z^2} T_1^{n+1} \\ & = T_0^n + (1 - \alpha) \Delta t \lambda \frac{T_b^n - 2T_0^n + T_1^n}{\Delta z^2} + \alpha \frac{\lambda \Delta t}{\Delta z^2} T_b^{(n+1)} \end{aligned}$$



Condição fronteira em $z = L_z$

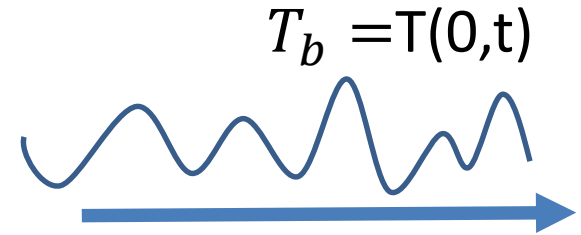
Em $k = N_z - 1$, vamos admitir que o **fluxo de calor**

nulo: $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$ (condição de von Neumann):

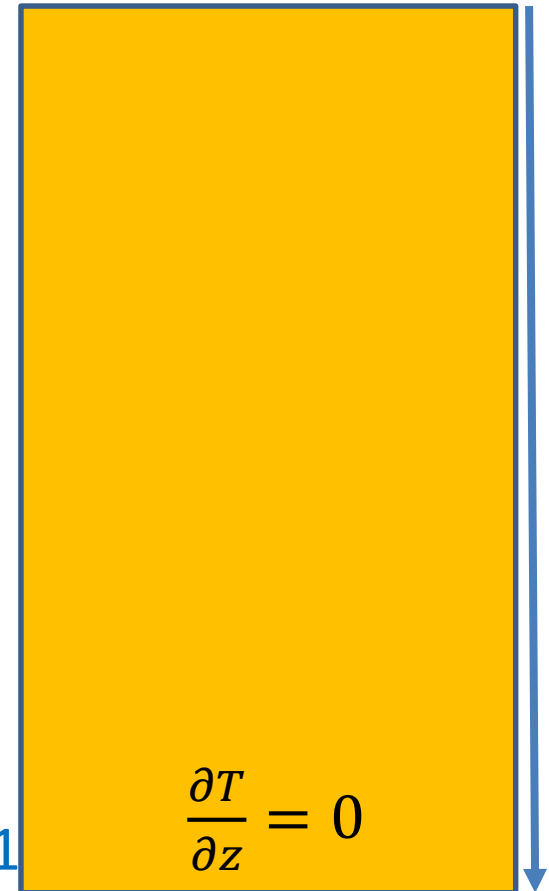
$$\begin{aligned} & -\alpha \frac{\lambda \Delta t}{\Delta Z^2} T_{N_z-2}^{n+1} + \left(1 + \frac{2\alpha \lambda \Delta t}{\Delta Z^2} \right) T_{N_z-1}^{n+1} - \alpha \frac{\lambda \Delta t}{\Delta Z^2} T_{N_z-1}^{n+1} \\ & = T_{N_z-1}^n + (1 - \alpha) \lambda \Delta t \frac{T_{N_z-2}^n - 2T_{N_z-1}^n + T_{N_z-1}^n}{\Delta Z^2} \end{aligned}$$

Ou

$$\begin{aligned} & -\alpha \frac{\lambda \Delta t}{\Delta Z^2} T_{N_z-2}^{n+1} + \left(1 + \frac{\alpha \lambda \Delta t}{\Delta Z^2} \right) T_{N_z-1}^{n+1} \\ & = T_{N_z-1}^n + (1 - \alpha) \lambda \Delta t \frac{T_{N_z-2}^n - T_{N_z-1}^n}{\Delta Z^2} \end{aligned}$$



$k=0$



$$M\vec{x} = \vec{b}$$

$$M\vec{x} = \begin{bmatrix} T_0^n + \frac{(1-\alpha)\lambda\Delta t}{\Delta z^2} (T_b^n - 2T_0^n + T_1^n) + \frac{\alpha\lambda\Delta t}{\Delta z^2} T_b^{n+1} \\ \\ T_k^n + \frac{(1-\alpha)\lambda\Delta t}{\Delta z^2} (T_{k-1}^n - 2T_k^n + T_{k+1}^n) \\ \\ T_{N_z-1}^n + \frac{(1-\alpha)\lambda\Delta t}{\Delta z^2} (T_{N_z-2}^n - T_{N_z-1}^n) \end{bmatrix}$$

$$M\vec{T}^{n+1} = \vec{b}^n$$

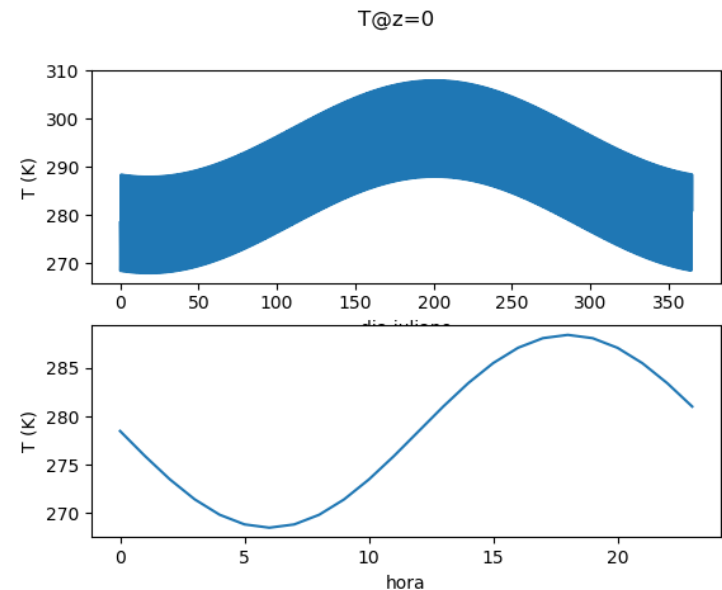
A solução numérica da lei de Fourier por métodos implícitos é absolutamente estável, o que não quer dizer que os seus resultados sejam bons se o passo de tempo for excessivo.

Por outro lado, o método tem uma característica notável, que levanta problema conceptuais: **ele permite a propagação instantânea de informação a todo o domínio num único passo de tempo!**

O método semi-implícito de Crank-Nicholson ($\alpha = 0.5$) não evita o problema da propagação instantânea, mas é mais preciso.

Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
alpha=0.5 #Crank-Nicholson
Nz=500;Lz=5.;dz=Lz/Nz; #dz=1cm
z=np.arange(dz,Lz,dz)
TimeSpan=365*24*3600. #1 ano
dt=3600.;tempo=np.arange(0.,TimeSpan,dt)
ddia=24*3600;dano=365*ddia
lam=0.25/1600/890 #difusividade térmica
Tmed=288;AmpD=10;AmpA=10
lev=np.array([0,2,4,9,19,29,39,59],int);nlev=len(lev)
Tz=np.ones((nt,nlev))*Tmed
T0=Tmed+AmpD*np.sin(2*np.pi*tempo/ddia+np.pi)\
    +AmpA*np.sin(2*np.pi*tempo/dano-np.pi*3./5);
plt.subplot(2,1,1);plt.plot(tempo/3600/24,T0)
plt.ylabel('T (K)');plt.xlabel('dia juliano')
plt.subplot(2,1,2);plt.plot(tempo[:24]/3600,T0[:24])
plt.ylabel('T (K)');plt.xlabel('hora')
plt.suptitle('T@z=0')
plt.figure()
```



Cálculos preliminares: a matriz M é constante!

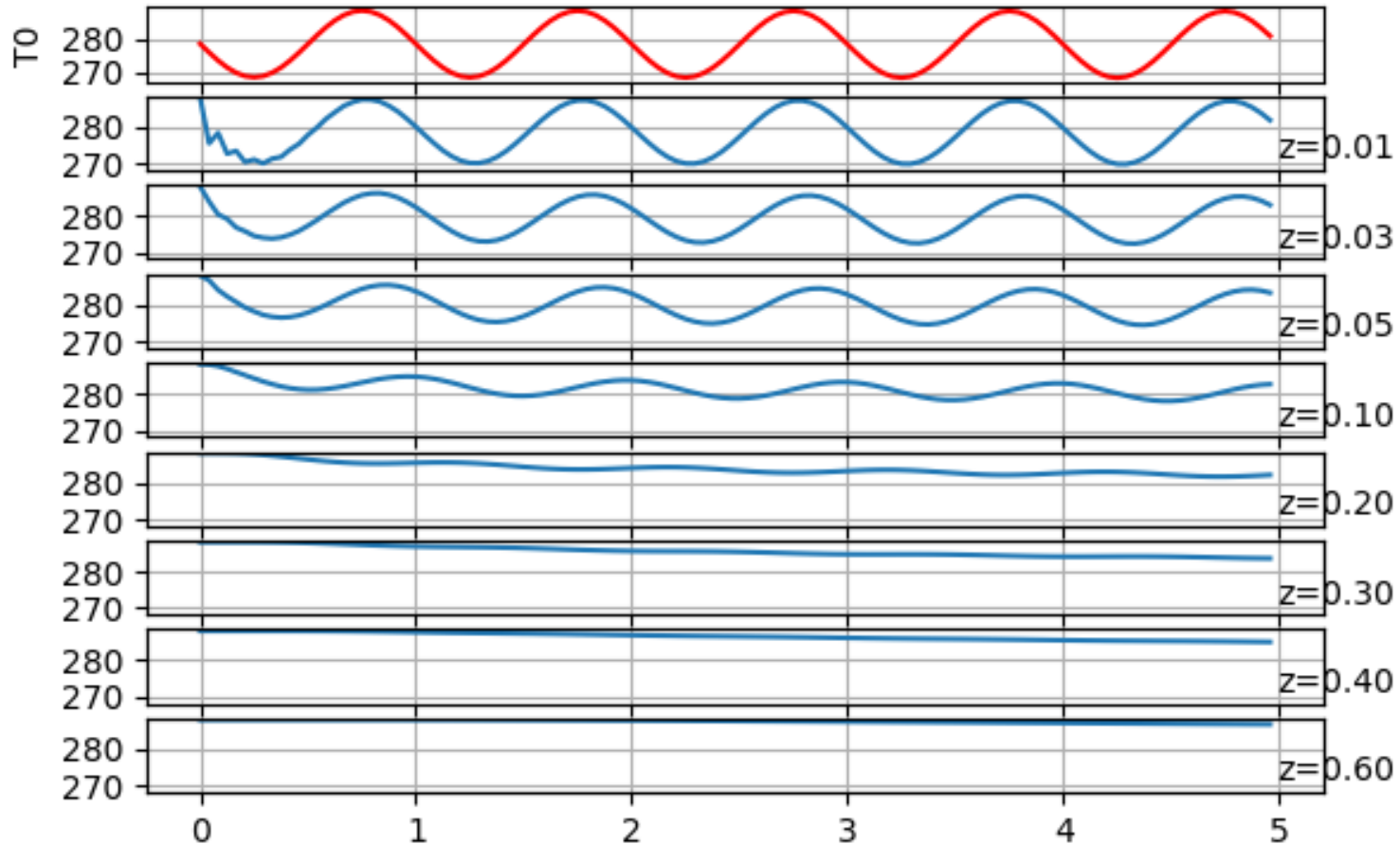
```
Tmin=np.min(T0);Tmax=np.max(T0);
zmin=-np.max(z);zmax=0;
T=Tmed*np.ones((Nz)) #perfil inicial de T
beta=alpha*lam*dt/dz**2
zeta=(1-alpha)*lam*dt/dz**2
M=np.zeros((Nz,Nz),float);b=np.zeros((Nz),float)
M[0,0]=1+2*beta;M[0,1]=-beta
for k in range(1,Nz-1):
    M[k,k-1]=-beta
    M[k,k]=1+2*beta
    M[k,k+1]=-beta
M[Nz-1,Nz-2]=-beta
M[Nz-1,Nz-1]=1+beta
Minv=np.linalg.inv(M)
```

Integração

```
for it in range(1,nt):
    b[0]=T[0]+zeta*(T0[it-1]-2*T[0]+T[1])+beta*T0[it]
    for iz in range(1,Nz-1):
        b[iz]=T[iz]+zeta*(T[iz-1]-2*T[iz]+T[iz+1])
    b[Nz-1]=T[Nz-1]+zeta*(T[Nz-2]-T[Nz-1])
    T=np.matmul(Minv,b)
    for klev in range(nlev):
        Tz[it,klev]=T[lev[klev]]
plt.subplot(nlev+2,1,1)
tempoh=tempo/3600/24;plt.plot(tempoh,T0,color='red')
plt.grid();plt.ylabel('T0')
for klev in range(nlev):
    ax=plt.subplot(nlev+2,1,klev+2)
    plt.plot(tempoh,Tz[:,klev]); plt.grid()
    ax2=ax.twinx(); ax2.set_yticks([])
    ax2.set_ylabel('z=%3.2f' % (z[lev[klev]]),rotation=0)
plt.suptitle(r'$\partial T / \partial t = \lambda \nabla^2 T$,
\lambda=%4.2e$' % (lam))
```

Propagação vertical do ciclo diurno

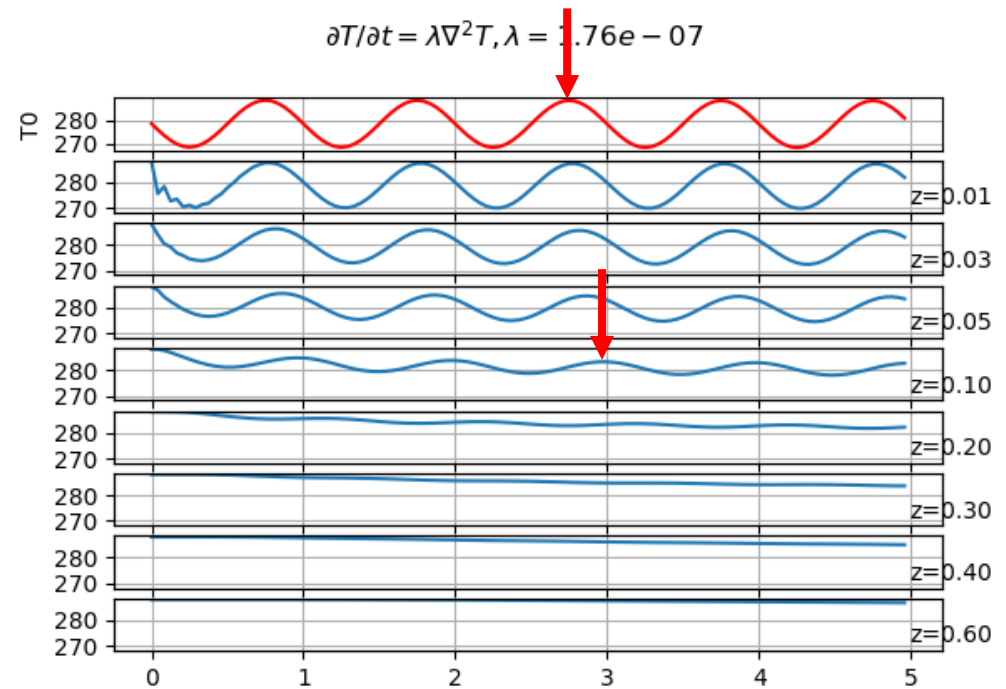
$$\partial T / \partial t = \lambda \nabla^2 T, \lambda = 1.76e - 07$$



À superfície ($z=1\text{cm}$) o solo acompanha o ar.

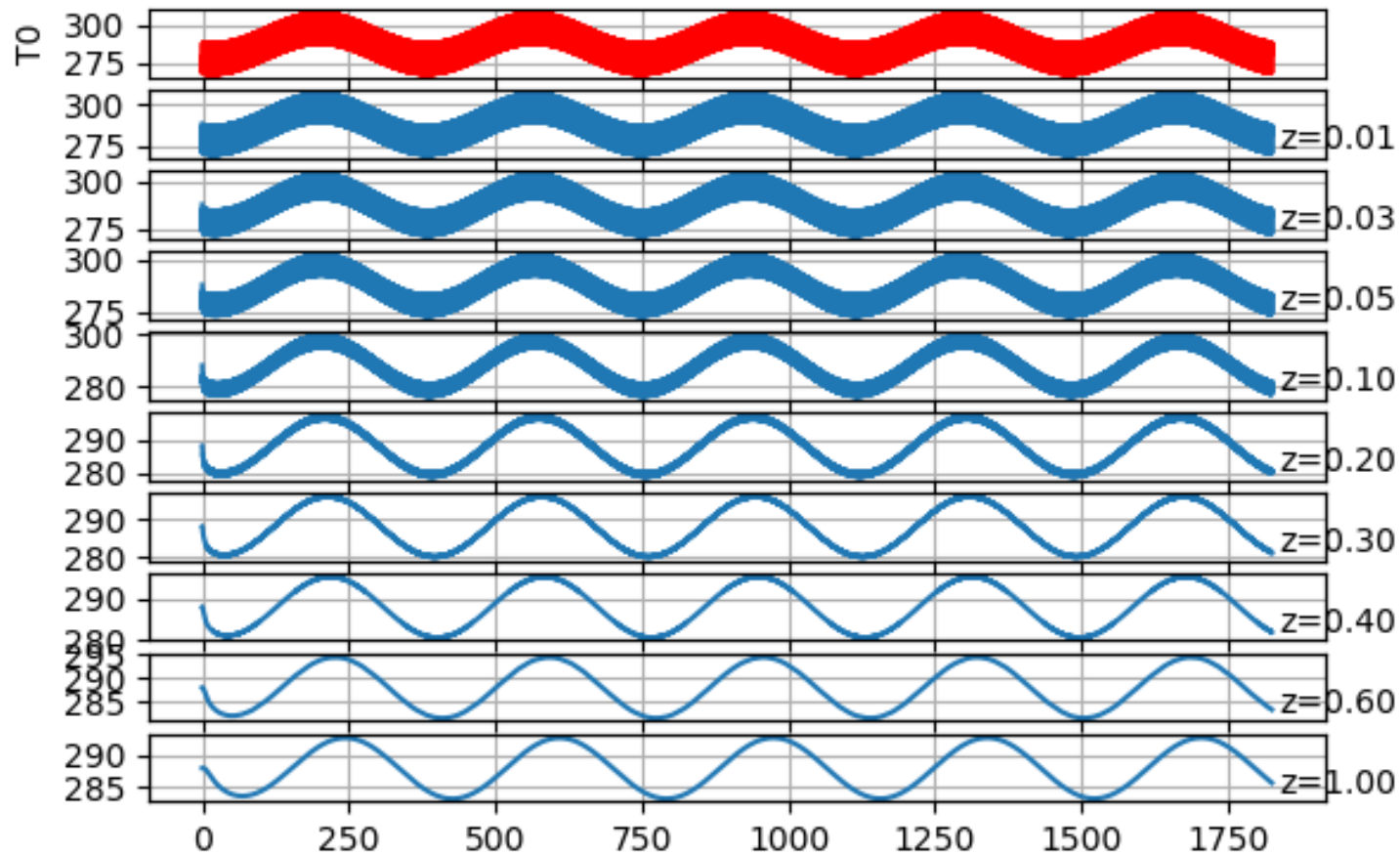
Em profundidade segue a evolução da superfície com atenuação e atraso (desfasamento).

Nesta fase arrefece lentamente em profundidade pois o estado inicial foi $T=288$, e a superfície está mais fria (inverno)



Integração a 5 anos

$$\partial T / \partial t = \lambda \nabla^2 T, \lambda = 1.76e - 07$$



O ciclo diurno é completamente atenuado nas primeiras dezenas de cm.

Abaixo só há ciclo anual com **desfasamento progressivo**.

O comportamento depende é claro da **difusividade térmica**, i.e., das propriedades físicas do meio.

Em cada nível a temperatura oscila em torno da sua temperatura média (igual em todos os níveis)

