Mecânica Analítica

<u>Série 1</u>: Formulação Lagrangeana

1. [1] Considere uma cadeia de M esferas ligadas entre si por $M-1$ ligações rígidas (comprimento constante). Cada ligação pode mover-se livremente em qualquer direção. Se o movimento da cadeia estiver limitada à superfície de uma mesa, quantos graus de liberdade tem o sistema?

2. [1] Mostre que a relação $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k}$ é válida para a dinâmica de uma partícula material descrita em coordenadas esféricas.

3. [3] Demonstre que o Lagrangeano de uma partícula livre é:

   (a) em coordenadas cartesianas:
   $$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) \quad ; \tag{1}$$

   (b) em coordenadas cilíndricas:
   $$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) \quad ; \tag{2}$$

   (c) em coordenadas esféricas:
   $$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + r^2\sin^2\phi\,\dot{\theta}^2\right) \quad . \tag{3}$$

4. Uma partícula material está sujeita a um potencial central $V(r)$ que só depende da distância r à origem do referencial. Escolha um sistema de coordenadas generalizadas apropriado, escreva o Lagrangeano e obtenha as equações do movimento.

5. Um pêndulo esférico de massa m está suspenso no teto e é capaz de rodar em qualquer direção, mantendo uma distância l_0 constante ao ponto de fixação. Escolha como sistema de coordenadas generalizadas as coordenadas esféricas e escreva o Lagrangeano do sistema.

6. [1] Mostre que um Lagrangeano L' obtido a partir de outro L por adição ou multiplicação de uma constante é fisicamente equivalente a L, ou seja, as equações de Euler-Lagrange são invariantes a estas transformações.

7. [1] Considere a transformação,
   $$L \to L' = L + \frac{dF}{dt} \quad , \tag{4}$$
   onde F é uma função arbitrária dos qs e t, mas não dos $\dot{q}$s. Mostre que as equações de Euler-Lagrange são invariantes a este tipo de transformação.

8. Um pêndulo simples de massa m está suspenso verticalmente por uma barra rígida de comprimento l_0 e massa desprezável, podendo oscilar num plano vertical.

   (a) Escreva o Lagrangeano do sistema;

   (b) Obtenha as equações do movimento;

   (c) Considerando o limite de pequenas oscilações, determine a frequência de oscilação em função dos parâmetros do sistema;

   (d) Usando o ficheiro de *Mathematica* fornecido, explore como dependem as trajetórias das condições iniciais.

9. [1] Uma barra rígida de massa m uniformemente distribuída e comprimento l está suspensa verticalmente por uma extremidade (pêndulo físico). A barra pode oscilar livremente em torno do ponto de suspensão num plano vertical e a aceleração gravítica tem módulo g. Determine T e V como funções da coordenada θ e velocidade $\dot{\theta}$ generalizadas, em que θ é o ângulo com a vertical. Para tal, considere que a barra é dividida em porções infinitesimais de comprimento dl e massa dm e integre ao longo da barra para obter T e V. Escreva também o Lagrangeano do sistema.

10. [1] Um pêndulo de massa m está suspenso por uma barra de comprimento l no teto de um comboio em movimento retílineo. Considere a massa da barra desprezável e uma aceleração contínua do comboio, de intensidade a, partindo de uma velocidade inicial de módulo v_0 na direção e sentido da aceleração. A aceleração gravítica é vertical e de intensidade g. Assuma que (x, y) são as coordenadas espaciais do sistema no referencial Terra (fora do comboio). Há apenas um grau de liberdade, θ, representando o ângulo entre o pêndulo e a vertical.

    (a) Escreva o Lagrangeano $L(\theta, \dot{\theta}, t)$;

    (b) Mostre que a equação do movimento é

    $$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta + \frac{a}{l}\cos\theta = 0 \quad ; \tag{5}$$

    (c) Determine o ângulo θ_{eq} para o qual o pêndulo fica em equilíbrio;

    (d) Defina $\theta(t) = \theta_{\text{eq}} + \eta(t)$. Usando séries de Taylor, mostre que para $\eta(t)$ muito pequeno (limite de pequenas oscilações em torno do equilíbrio), a equação para o $\eta(t)$ é,

    $$\ddot{\eta} + \omega^2\eta = 0 \quad . \tag{6}$$

    Isto significa que o pêndulo faz um movimento harmónico simples, em torno do ponto de equilíbrio, com frequência ω. Mostre que,

    $$\omega^2 = \frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{l} \tag{7}$$

    e compare este resultado com o obtido para um pêndulo simples.

11. [2] Uma pérola de massa m desliza, sem atrito, num fio circular de raio a animado de rotação em torno do seu diâmetro vertical, com velocidade ângular ω constante.

    (a) Escreva o Lagrangeano do sistema e determine as constantes de movimento que possam existir;

    (b) Localize as posições de equilíbrio da pérola para $\omega < \omega_c$ e $\omega > \omega_c$, onde $\omega_c = \sqrt{g/a}$. Quais destas posições de equilíbrio são estáveis e quais são instáveis?

    (c) Determine as frequências de oscilação para vibrações de pequena amplitude próximas dos pontos de equilíbrio estáveis.

12. Um pêndulo de massa m está suspenso verticalmente por uma mola de constante k e comprimento de equilíbrio l_0 podendo oscilar num plano vertical.

    (a) Escreva o Lagrangeano do sistema;

    (b) Obtenha as equações do movimento;

    (c) Usando o ficheiro de *Mathematica* fornecido, explore como dependem as trajetórias das condições iniciais.

13. Um pêndulo duplo de massas m_1 e m_2 está suspenso verticalmente por duas barras rígidas de comprimentos l_1 e l_2, respetivamente, ambas de massa desprezável, podendo oscilar num plano vertical.

    (a) Escreva o Lagrangeano do sistema;

    (b) Obtenha as equações do movimento;

    (c) Usando o ficheiro de *Mathematica* fornecido, explore como dependem as trajetórias das condições iniciais;

    (d) Mostre que, no limite $m_2 = 0$ obtém a equação do movimento do pêndulo simples;

    (e) Obtenha as equações do movimento no limite $m_1 = 0$.

14. [2] Duas massas pontuais m_1 e m_2 ($m_1 \neq m_2$) estão ligadas por um fio de comprimento l que passa através de um orifício numa mesa horizontal. O fio e as massas movem-se sem atrito, estando m_1 na mesa e m_2 livre para se deslocar numa linha vertical.

    (a) Escreve o Lagrangeano do sistema;

    (b) Qual deve ser a velocidade inicial de m_1 para que m_2 permaneça em repouso, a uma distância d abaixo da superfície da mesa?

    (c) Se m_2 for ligeiramente deslocada na direção vertical, irão resultar pequenas oscilações nas duas massas. Use as equações de Lagrange para encontrar os períodos destas oscilações.

15. [2] Considere uma partícula de massa m que se pode mover sobre uma superfície esférica fixa de raio a. Designe por g o módulo da aceleração da gravidade, vertical e uniforme. Considere, apenas, o movimento da partícula no plano vertical passando pelo centro da esfera; designe por θ o ângulo que o vetor de posição da partícula, em relação ao centro da esfera, faz com a vertical, sendo $\theta = 0$ para a partícula colocada no "alto da esfera".

    (a) Supondo não existir atrito, obtenha o Lagrangeano

    $$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - mgr\cos\theta \quad ; \tag{8}$$

    (b) A condição de aderência ($r = a$) é imposta de forma suplementar. Mostre que a esfera exerce sobre a partícula uma força radial, dirigida para fora da esfera, com o valor $N = mg\cos\theta - ma\dot{\theta}^2$.

16. [2] Uma partícula de mass m pode deslizar, sem atritio, sobre a superfície de uma hemi-esfera de raio a e massa M. A hemi-esfera desliza, também sem atrito, sobre uma superfície horizontal. Admita que a aceleração da gravidade é vertical e uniforme, de módulo g. Inicialmente, o sistema está em repouso, com a partícula colocada no ponto mais alto da semi-esfera; a seguir, a partícula é deslocada, infinitesimalmente, para fora deste ponto, iniciando-se o movimento de todo o sistema.

    (a) Mostre que o Lagrangeano do sistema é

    $$L = \frac{1}{2}(m + M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + ma\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta - mga\cos\theta \quad , \tag{9}$$

    onde θ é o ângulo com a vertical, do vetor de posição da partícula em relação ao centro da hemi-esfera, e x é a posição desse ponto;

    (b) Determine as constantes do movimento, bem como os seus valores, para os dados do problema.

17. [4] Um disco de raio R e massa m desce, sem deslizar, ao longo de um plano inclinado, de massa M e ângulo α com a horizontal. Assumindo que o plano pode deslizar sem atrito ao longo da horizontal, escreva o Lagrangeano do sistema, as constantes do movimento e as equações da dinâmica.

Referências

[1] Hand, L. N., and Finch, J. D. *Analytical Mechanics.* Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 1998.

[2] Lage, E. J. S. *Mecânica Avançada.* Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2015.

[3] Landau, L. D., and Lifshitz, E. M. *Course of Theoretical Physics, Volume 1, Mechanics.* Butterworth-Heinemann, Burlington, MA, USA, 1976.

[4] Marion, J. B., and Thornton, S. T. *Classical Dynamics of Particles and Systems.* Thomson Learning, Stamford, CT, USA, 1995.