

# Mecânica Analítica

## *Série 3: Corpo Rígido*

1. Calcule o tensor de inércia e os eixos principais de:
  - (a) uma esfera homogênea de massa  $M$  e raio  $R$ ;
  - (b) um cubo homogêneo de massa  $M$  e lado  $l$ ;
  - (c) um cone circular homogêneo de massa  $M$ , altura  $h$  e raio  $R$ ;
  - (d) um elipsoide homogêneo de massa  $M$  e eixos de comprimento  $2a > 2b > 2c$ .
2. [2] Proponha uma experiência não destrutiva para distinguir duas esferas com a mesma massa, em que uma é oca e outra é maciça.
3. [2] Mostre que nenhum momento de inércia principal pode exceder a soma dos outros dois.
4. [1] Mostre que, para o movimento de um corpo rígido em torno de um ponto, a variação temporal da energia cinética  $T$  é dada por,

$$\frac{dT}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{N} \quad . \quad (1)$$

5. [2] Uma esfera sólida e homogênea, de massa  $M$  e raio  $R$ , roda livremente com uma velocidade angular  $\omega_0$  em torno de um diâmetro fixo. Uma partícula de massa  $m$ , inicialmente num polo, move-se com velocidade constante  $v$  ao longo de um grande círculo da esfera (mesmo raio e centrado no centro da esfera). Mostre que, quando a partícula atinge o outro polo, a rotação da esfera foi reduzida de um ângulo,

$$\alpha = \omega_0 \tau \left( 1 - \sqrt{\frac{2M}{2M + 5m}} \right) \quad , \quad (2)$$

onde  $\tau$  é o tempo total necessário para a partícula se mover de um polo para o outro.

6. [2] Estude o movimento de um objeto com  $I_1 = I_2 \neq I_3$ , com um ponto fixo, no limite em que o eixo vertical do referencial do corpo e fixo coincidem. Mostre que o movimento pode ser estável ou instável, dependendo se a quantidade  $4I_1 M h g / I_3^2 \omega_3^2$  é menor ou maior do que 1. Se o corpo é posto a rodar numa configuração estável, o que vai acontecer quando o  $\omega_3$  é reduzido gradualmente devido à dissipação?
7. [2] Mostre que o cone do espaço está fora do cone do corpo para uma vara alongada ( $I_1 = I_2 > I_3$ ) e dentro para uma moeda ( $I_1 = I_2 < I_3$ ).
8. [1] Um cone uniforme de altura  $h$ , ângulo  $\alpha$  e densidade  $\rho$  rola sobre o seu lado, sem deslizar, num plano horizontal uniforme. Sabendo que retorna à sua posição original ao fim de um intervalo de tempo  $\tau$ , encontre a expressão para a energia cinética e para as componentes do momento angular do cone.
9. Mostre que, quando dois momentos de inércia principais são iguais (por exemplo,  $I_1 = I_2$ ), o movimento de rotação é apenas estável em torno do eixo  $x_3$ . Qualquer pequena perturbação ao movimento em torno dos outros eixos ou se mantém constante ou cresce linearmente.

## Referências

- [1] GOLDSTEIN, H., POOL, C., AND SAFKO, J. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, Boston, MA, USA, 2002.
- [2] MARION, J. B., AND THORNTON, S. T. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Thomson Learning, Stamford, CT, USA, 1995.