UNIVERSIDADE DE LISBOA - FCUL

FÍSICA DOS MEIOS CONTÍNUOS

Problemas - 2ª Série

1. Para um vórtice de linha dado por
$$\mathbf{u} = \frac{\Gamma}{2\pi r}\hat{\theta} \tag{1}$$
calcule a circulação Γ' num circuito que inclua o vórtice, o potencial ϕ e a função de corrente ψ. Mostre que o potencial complexo é dado por
$$w = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\log(z), \tag{2}$$
where $z = re^{i\theta}$.

2. O campo de velocidade
$$u_r = \frac{Q}{2\pi r}, \quad u_\theta = 0, \tag{3}$$
onde Q é uma constante, corresponde ao campo de velocidades de uma fonte se $Q > 0$ ou de um sumidouro se $Q < 0$. a) Mostre que o escoamento é irrotacional e que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ exceto para $r = 0$, onde a velocidade não é definida. b) Determine o potencial de velocidade e a função de corrente e mostre que o potencial complexo é
$$w = \frac{Q}{2\pi}\log(z). \tag{4}$$

3. a) Desenhe as linhas de corrente para o escoamento:
$$u = \alpha x, \quad v = -\alpha y, \quad w = 0, \tag{5}$$
onde α é uma constante positiva.
b) O escoamento é rotacional? Se não, determine o potencial de velocidade.
c) A concentração de um poluente é dada por:
$$c(x,\, y,\, t) = \beta x^2 y e^{-\alpha t}, \tag{6}$$
para $y > 0$, onde β é uma constante. A concentração do poluente muda com o tempo para um determinado elemento de fluido?

4. a) Mostre que numa região simplesmente conexa de um escoamento irrotacional o integral $\phi = \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}$ é independente do caminho entre O e P.
b) Mostre que numa região simplesmente conexa de um escoamento bidimensional e incompressível o integral
$$\psi = \int_O^P u\, dy - v\, dx \tag{7}$$
é independente do caminho entre O e P e portanto serve como definição da função de corrente.

5. Um escoamento irrotacional 2D é caracterizado pela função de corrente $\psi = A(x - c)y$, onde A and c são constantes. Um cilindro circular de raio a é introduzido com o seu centro na origem. a) Determine o potencial complexo e a função de corrente do escoamento resultante. b) Calcule a força exercida no cilindro.

6. Considere a velocidade potencial em coordenadas polares $\phi = Br^2\cos(2\theta)$ onde B é uma constante. a) Mostre que o campo de velocidades satisfaz a equação da continuidade e, portanto, existe uma função de corrente ψ. b) Determine $\psi(r,\,\theta)$. c) Ache o ponto de estagnação.

7. Um circuito fechado C de partículas de um fluido é dado por, em $t = 0$,

$$\mathbf{x} = (a\cos s, a\sin s, 0), \quad 0 \le s \le 2\pi, \tag{8}$$

de forma que cada valor de s entre 0 e 2π corresponde a uma particula de fluido. Sendo $C(t)$ dado por:

$$\mathbf{x} = (a\cos s + a\alpha t\sin s, a\sin s, 0), \quad 0 \le s \le 2\pi. \tag{9}$$

a) Calcule a velocidade $\mathbf{u}(s,\,t)$ de cada partícula de fluido, e mostre que as partículas em $s = 0$ e $s = \pi$ permanecem em repouso. b) Calcule a aceleração de cada partícula de fluido, mostre que $\mathbf{u} = (\alpha y,\,0,\,0)$, e esboçe como a forma de $C(t)$ muda com o tempo. c) Por definição,

$$\Gamma = \int_{C(t)} \mathbf{u}\cdot d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} \mathbf{u}\cdot\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}ds. \tag{10}$$

Calcule o ultimo integral explicitamente no instante t confirmando que é independente de t. Portanto, de acordo com o teorema de Kelvin.

8. Considere um escoamento irrotacional, com velocidade uniforme U no infinito, através de um cilindro de raio a. a) Usando que $\nabla^2\phi = 0$, $\phi \sim Ur\cos\theta$ em $r \longrightarrow \infty$ e $\partial\phi/\partial r = 0$ em $r = a$, mostre que o potencial pode ser escrito como

$$\phi = U\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta. \tag{11}$$

b) Calcule o campo de velocidades em coordenadas polares. c) Se houver circulação Γ em torno do cilindro, obtenha uma expressão para o ponto de estagnação. d) Calcule a força que atua no cilindro na direção perpendicular à velocidade U quando há circulação Γ.