UNIVERSIDADE DE LISBOA - FCUL

FÍSICA DOS MEIOS CONTÍNUOS

Problemas - 4ª Série

1. Aplicando o rotacional à equação de Euler, mostre que

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\mathbf{u}.$$

Se o fluido for incompressível, interprete o resultado em termos da conservação das linhas de vorticidade.

2. Mostre que para a equação de Navier-Stokes se obtem o resultado:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega}$$

Mostre que a vorticidade se difunde no referencial que se move com o fluido e discuta o significado do coeficiente de difusão.

3. Considere um fluido em escoamento de Poiseuille num tubo cilíndrico com eixo paralelo a $\hat{\mathbf{z}}$. a) Mostre que no plano $y = 0$, $\omega_x = \omega_z = 0$ e

$$\omega_y = -\frac{\partial u_z}{\partial x} = -\frac{x}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

b) Mostre que ω muda de sinal no planos $y = 0$ e $x = 0$. c) Mostre que as linhas de vorticidade são anéis fechados, co-axiais com o tubo. d) Determine a direcção da difusão de vorticidade e discuta a sua evolução temporal. e) No estado estacionário, como pode a vorticiade ser conservada?

4. Usando a equação de Navier-Stokes em coordenadas cartesianas, e considerando um escoamento em 2D através de uma placa fina, mostre em que condições as equações para a camada limite se reduzem à equação da continuidade e

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2},$$

onde x é a direção da corrente onde a placa está inserida e y é a direção normal à placa. Considere que a placa tem largura D na direção da corrente, espessura desprezável e comprimento $L \gg D$.

5. Usando análise dimensional, mostre que as equações para a camada limite são auto semelhantes.

6. Considere a seguinte equação diferencial para uma função $u(y)$:

$$\epsilon u'' + u' = 1, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 2,$$

onde ϵ denota uma constante positiva pequena. a) Mostre que a solução é dada por:

$$u = y + \frac{1 - e^{-y/\epsilon}}{1 - e^{-1/\epsilon}}$$

b) Discuta os limites desta solução quando y é muito pequeno (da ordem de ϵ) ou quando $y \gg \epsilon$ se u for a velocidade de um fluido na direção x. c) Considere $\epsilon = 0$ diretamente na equação diferencial e encontre a solução. Corresponde ao limite $y \gg \epsilon$ da alínea b? O que significa isto?

7. Calcule o perfil de velocidades e a força de arrasto de um fluido que escoa através de uma placa de comprimento L com velocidade U (longe da placa). Parte da solução deve ser numérica, pois a equação diferencial resultante não tem solução exata.

8. A instabilidade de Saffman-Taylor é formada quando um fluido de viscosidade η é usado para empurrar outro fluido mais viscoso (viscosidade η') estando os dois fluidos entre placas paralelas com separação d. A velocidade de escoamento perpendicular à interface entre os dois fluidos é U e há uma tensão superficial σ na interface. Mostre que o vetor de onda mínimo de uma perturbação na interface que dá origem à instabilidade é dado por

$$k_c^2 = \frac{12U(\eta - \eta')}{\sigma d^2}.$$

9. Use o código fornecido (code4-kelvin-helmholtz.py) para observar a formação da instabilidade de Kelvin-Helmholtz em um fluido ao passar por uma placa perpendicular à velocidade de escoamento. Discuta quais as condições reuinidas neste sistema que permitem a formação da instabilidade? Ver seção 8.12 do Faber.

10. Use o código fornecido (code5-von-karman-street.py) para visualizar os vórtices de von Kárman num fluido que escoa através de um cilindro. Compare, para um determinado número de Reynolds, a frequência de oscilação com a obtida na tabela 1 da referência: Xiaoyi He and Gary D. Doolen, Phys. Rev. E, **56**, 434 (1997). Nota: pode levar várias horas de simulação até a formação dos vórtices de von Kárman.