Complementos de Análise

Exame 9 de Janeiro de 2020

(3 valores) **1.** Esboce as linhas de nível da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$. Desenhe, em vários pontos do plano à sua escolha, o gradiente de f.

(4 valores) **2.** Considere, em $\mathbb{R}^3$, a equação $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$. Prove que, na vizinhança do ponto $(1,1,1)$, esta equação é equivalente a uma relação da forma $y = \varphi(x,z)$. Calcule $\varphi(1,1)$ e as derivadas parciais da primeira ordem de φ no mesmo ponto. Confirme os resultados resolvendo a equação dada e derivando a expressão obtida.

(3 valores) **3.** Seja f uma função de três variáveis e seja $g(t) = f(sin(3t), cos(3t), ln(t^2+1))$. Calcule g' e g''.

(2 valores) **4.** Considere um par aleatório (X,Y) uniformemente distribuído no triângulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ e $(0,1)$. Explique como pode ser produzido um tal par a partir dum gerador que produz números (pseudo)aleatórios uniformemente distribuídos no intervalo $[0,1]$.

(2 valores) **5.** Calcule a densidade de probabilidade do par (X,Y) da alínea 4. Calcule a densidade de probabilidade de X. Calcule a densidade de probabilidade de Y. As variáveis aleatórias X e Y são dependentes ou independentes ?

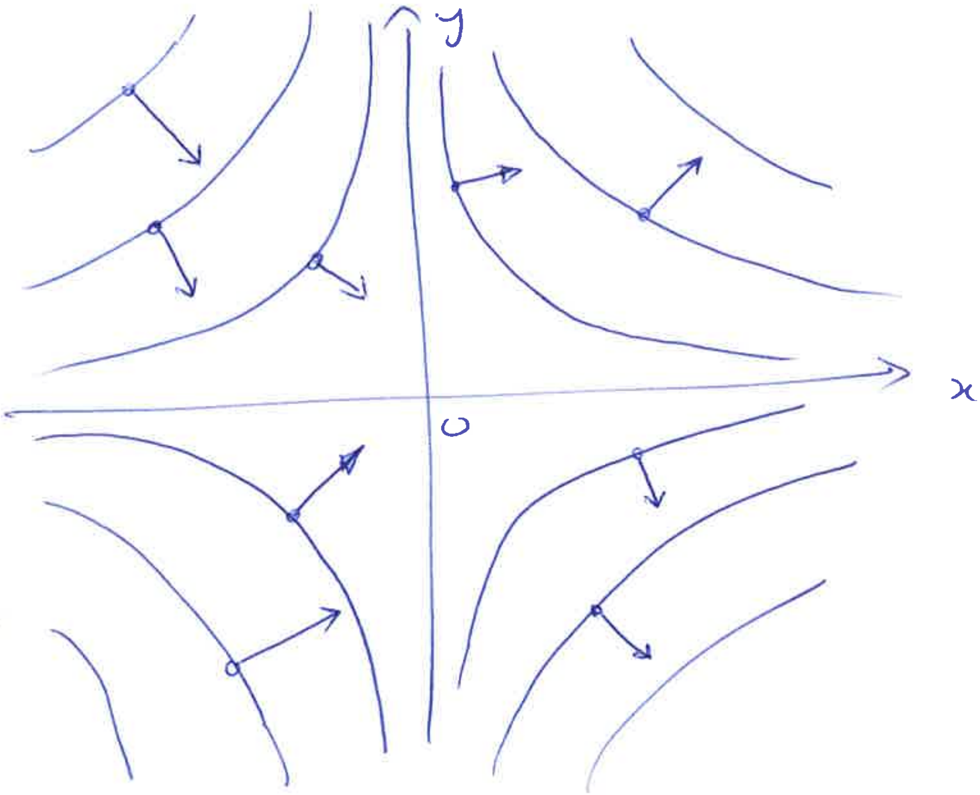
(3 valores) **6.** Calcule o coeficiente de correlação entre as variáveis aleatórias X e Y da alínea 4.

(3 valores) **7.** Calcule a transformada de Laplace da variável aleatória X da alínea 4.

EXAME COMPLEMENTOS DE ANÁLISE

9/1/2020

1. $f(x,y) = xy \qquad \nabla f(x,y) = (y, x)$



EXAME COMPLEMENTOS DE ANÁLISE 9/1/2020

2 $x^2+y^2+2z^2=4$

confirmamos que o ponto $(1,1,1)$ verifica a equação:

$1+1+2=4$

notação: ~~$\varphi(x,y,z)$~~ $f(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2x \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)=2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)=2$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=4z \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)=4$

Uma vez que $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)\neq 0$, pelo teorema das funções implícitas, concluimos que, na vizinhança de $(1,1,1)$, $f(x,y,z)=4 \iff y=\varphi(x,z)$

Temos que $\varphi(1,1)=1$ e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1,1)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)}=-1$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1,1)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)}=-2$$

EXAME COMPLEMENTOS DE ANÁLISE 9/1/2020

(2) (continuação)

Podemos resolver a equação $x^2+y^2+2z^2=4$ sem usar o teorema das funções implícitas.

$$x^2+y^2+2z^2=4 \iff y=\sqrt{4-x^2-2z^2}$$

(escolhemos ~~o~~ ramo positivo, pois (x,y,z) está na vizinhança de $(1,1,1)$)

portanto ~~...~~ $\varphi(x,z)=\sqrt{4-x^2-2z^2}$;

$$\varphi(1,1)=\sqrt{4-1-2}=1$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2-2z^2}}=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2-2z^2}}$$

~~$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1,1)=-1$~~ $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(1,1)=-1$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{-4z}{2\sqrt{4-x^2-2z^2}}=-\frac{2z}{\sqrt{4-x^2-2z^2}}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(1,1)=-2$$

EXAME COMPLEMENTOS DE ANÁLISE 9/1/2020

(3) $g(t) = f(\sin(3t), \cos(3t), \ln(t^2+1))$

para simplificar a escrita, designemos $P = (\sin(3t), \cos(3t), \ln(t^2+1))$

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(P)\frac{\partial}{\partial t}\left(\sin(3t)\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)\frac{\partial}{\partial t}(\cos(3t)) +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial z}(P)\frac{\partial}{\partial t}(\ln(t^2+1)) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(P)\cdot 3\cos(3t) - \frac{\partial f}{\partial y}(P)\cdot 3\sin(3t) +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial z}(P)\frac{2t}{t^2+1}$$

$$g''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P)\, 3\cos(3t)\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(P)\cdot 3\sin(3t)\right) +$$
$$+ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(P)\frac{2t}{t^2+1}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P)\right)3\cos(3t) + \frac{\partial f}{\partial x}(P)\frac{d}{dt}(3\cos(3t)) -$$
$$- \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(P)\right)3\sin(3t) - \frac{\partial f}{\partial y}(P)\frac{d}{dt}(3\sin(3t)) +$$
$$+ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(P)\right)\frac{2t}{t^2+1} + \frac{\partial f}{\partial z}(P)\frac{d}{dt}\left(\frac{2t}{t^2+1}\right) = (*)$$

$$\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)' = \frac{2(t^2+1) - 2t\cdot 2t}{(t^2+1)^2} = 2\,\frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$$

EXAME COMPLEMENTOS DE ANÁLISE 9/1/2020

(3) (continuação)

$$\circledast = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P)\, 3\cos(3t) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P)\, 3\sin(3t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(P)\, \frac{2t}{t^2+1}\right] 3\cos t -$$

$$- \frac{\partial f}{\partial x}(P)\, 9\sin(3t) -$$

$$- \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P)\, 3\cos(3t) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P)\, 3\sin(3t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(P)\, \frac{2t}{t^2+1}\right] 3\sin(3t) -$$

$$- \frac{\partial f}{\partial y}(P)\, 9\cos(3t) +$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(P)\, 3\cos(3t) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(P)\, 3\sin(3t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(P)\, \frac{2t}{t^2+1}\right] \frac{2t}{t^2+1} + \frac{\partial f}{\partial z}(P)\, 2\, \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} =$$

$$= 9\cos^2(3t)\, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) - 18\sin(3t)\cos(3t)\, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) +$$

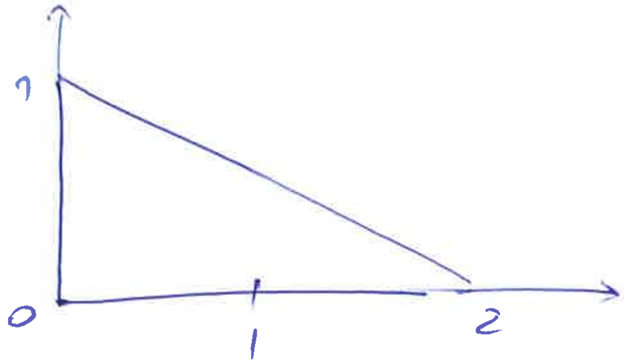
$$+ \frac{12t}{t^2+1}\cos(3t)\, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(P) + 9\sin^2(3t)\, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) -$$

$$- \frac{12t}{t^2+1}\sin(3t)\, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(P) + \frac{4t^2}{(t^2+1)^2}\, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(P) -$$

$$- \frac{\partial f}{\partial x}(P)\, 9\sin(3t) - \frac{\partial f}{\partial y}(P)\, 9\cos(3t) + \frac{\partial f}{\partial z}(P)\, 2\, \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$$

EXAME COMPLEMENTOS DE ANÁLISE 9/1/2020

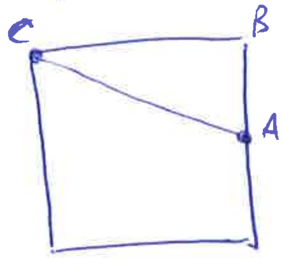
4



primeira solução

produzimos um par aleatório no rectângulo $[0,2] \times [0,1]$ e descartamos os pares na metade superior do rectângulo

```
x = rand()
y = 2*rand()
if y > 1 - x/2
    retomamos o processo
```



segunda solução

produzimos um par aleatório no quadrado $[0,1] \times [0,1]$ e rodamos o triângulo ABC com $180°$ em torno de A

```
x = rand()
y = rand()
if y > 1 - x/2
    x = 2 - x
    y = 1 - y
```

EXAME COMPLEMENTOS DE ANÁLISE 9/1/2020

5) O par aleatório é uniformemente distribuido no triângulo; a área do triângulo é 1, portanto a densidade é constante igual a 1.

Calculemos a densidade de probabilidade de X e de Y

$$f_X(x) = \int_{y=0}^{1-x/2} f_{XY}(x,y)\,dy = 1 - \frac{x}{2}$$

$$f_Y(y) = \int_{x=0}^{2-2y} f_{XY}(x,y)\,dx = 2-2y$$

Uma vez que $f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f_{XY}(x,y)$, as variáveis aleatórias X e Y são dependentes.

Isto confirma a nossa intuição:

se X estiver perto de 2, Y estará obrigatoriamente perto de 0, ou seja, Y depende probabilisticamente de X

EXAME COMPLEMENTOS DE ANÁLISE 9/1/2020

6

$$E(X) = \int_0^2 x f_X(x)\,dx = \int_0^2 x\left(1-\frac{x}{2}\right)dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_{x=0}^{2} = \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{6} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$E(Y) = \int_0^1 y f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y(2-2y)\,dy =$$

$$= \left[y^2 - \frac{2}{3}y^3\right]_{y=0}^{1} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^2 x^2\left(1-\frac{x}{2}\right)dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8}\right]_{x=0}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{8} = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 y^2 f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y^2(2-2y)\,dy =$$

$$= \left[\frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^4\right]_{y=0}^{1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\operatorname{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\operatorname{var}(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

$$\sigma(Y) = \frac{1}{\sqrt{18}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

EXAME COMPLEMENTOS DE ANÁLISE 9/1/2020

(6) (continuação)

$$E(XY) = \iint_{\text{triângulo}} xy\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{1-x/2} xy\, dy\, dx = \int_{x=0}^{2} \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=0}^{1-x/2} dx =$$

$$= \int_{x=0}^{2} \frac{x}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^2 dx = \int_{x=0}^{2} \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{8}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{32}\right]_{x=0}^{2} = \frac{2^2}{4} - \frac{2^3}{6} + \frac{2^4}{32} =$$

$$= 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{6-8+3}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{6} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{3} =$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{2}{9} = -\frac{1}{18}$$

$$\rho(X,Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = -\frac{1/18}{\sqrt{2}/3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}}} = -\frac{3\sqrt{6}}{18} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$$

Uma covariância negativa confirma a nossa intuição: quando X é grande Y é pequeno e vice-versa. É como uma dependência decrescente

EXAME COMPLEMENTOS DE ANÁLISE 9/1/2020

7

$$L_X(t) = \int_0^2 e^{-tx} f_X(x)\,dx =$$

$$= \int_0^2 e^{-tx}\left(1-\frac{x}{2}\right)dx =$$

$$= \int_0^2 e^{-tx}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^2 x e^{-tx}\,dx = (*)$$

$$\int_0^2 x e^{-tx}\,dx = -\frac{1}{t}\int_0^2 x\left(e^{-tx}\right)'dx =$$

$$= -\frac{1}{t}\left[x e^{-tx}\right]_{x=0}^2 + \frac{1}{t}\int_0^2 e^{-tx}\,dx$$

$$= -\frac{1}{t}\,2e^{-2t} + \frac{1}{t}\int_0^2 e^{-tx}\,dx$$

$$(*) = \frac{1}{t}e^{-2t} + \left(1-\frac{1}{2t}\right)\int_0^2 e^{-tx}\,dx =$$

$$= \frac{1}{t}e^{-2t} - \left(1-\frac{1}{2t}\right)\frac{1}{t}\left[e^{-tx}\right]_{x=0}^2 =$$

$$= \frac{1}{t}e^{-2t} - \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}\right)\left(e^{-2t}-1\right) =$$

$$= \frac{1}{2t^2}e^{-2t} + \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2}$$