Aula 14

O pêndulo gravítivo com Runge-Kutta 4ª ordem.

Álgebra complexa.

Pêndulo gravítico

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dfrac{d\omega}{dt} = -\dfrac{g}{L}\sin\theta \\[2ex] \dfrac{d\theta}{dt} = \omega \end{cases}$$

O acoplamento resulta do facto de a taxa de variação de cada variável depender da outra.

Runge-Kutta⁴ $\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{L}\sin\theta \; ; \; \frac{d\theta}{dt} = \omega$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = f(\theta) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial t} = f(\omega)$$

$$m_1 = \Delta t\, f(\theta^n) \qquad k_1 = \Delta t\, f(\omega^n)$$

$$m_2 = \Delta t\, f\left(\theta^n + \frac{k_1}{2}\right) \qquad k_2 = \Delta t\, f\left(\omega^n + \frac{m_1}{2}\right)$$

$$m_3 = \Delta t\, f\left(\theta^n + \frac{k_2}{2}\right) \qquad k_3 = \Delta t\, f\left(\omega^n + \frac{m_2}{2}\right)$$

$$m_4 = \Delta t\, f(\theta^n + k_3) \qquad k_4 = \Delta t\, f(\omega^n + m_3)$$

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} \qquad \omega^{n+1} = \omega^n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}$$

RK4 para o pêndulo gravítico

```
def domegadt(theta):
    g=9.8065;L=1.
    dfdt=-g/L*np.sin(theta)
    return dfdt
def dthetadt(omega):
    dfdt=omega
    return dfdt
def rk4S(x,u,dxdt,dudt,dt):
    k1=dxdt(u)*dt
    m1=dudt(x)*dt
    k2=dxdt(u+m1/2)*dt
    m2=dudt(x+k1/2)*dt
    k3=dxdt(u+m2/2.)*dt
    m3=dudt(x+k2/2.)*dt
    k4=dxdt(u+m3)*dt
    m4=dudt(x+k3)*dt
    xP=x+1./6.*(k1+2*k2+2*k3+k4)
    uP=u+1./6.*(m1+2*m2+2*m3+m4)
    return xP,uP
```

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(u) \qquad x \equiv \theta \quad u \equiv \omega$$

$$k_1 = \Delta t\, f(u^n, t^n)$$

$$k_2 = \Delta t\, f\left(u^n + \frac{m_1}{2}, t^n + \frac{\Delta t}{2}\right)$$

$$k_3 = \Delta t\, f\left(u^n + \frac{m_2}{2}, t^n + \frac{\Delta t}{2}\right)$$

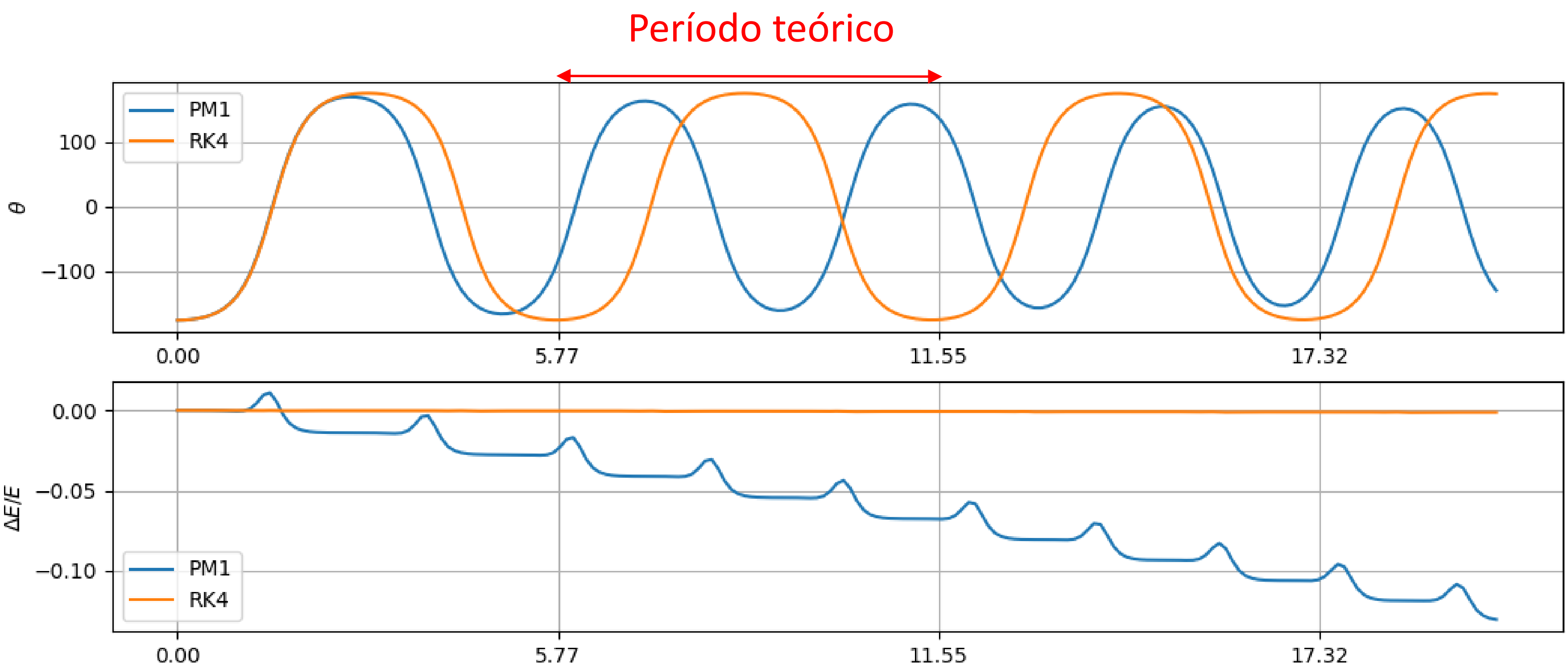
$$k_4 = \Delta t\, f(u^n + m_3, t^n + \Delta t)$$

$$x^{n+1} = x^n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}$$

Pêndulo

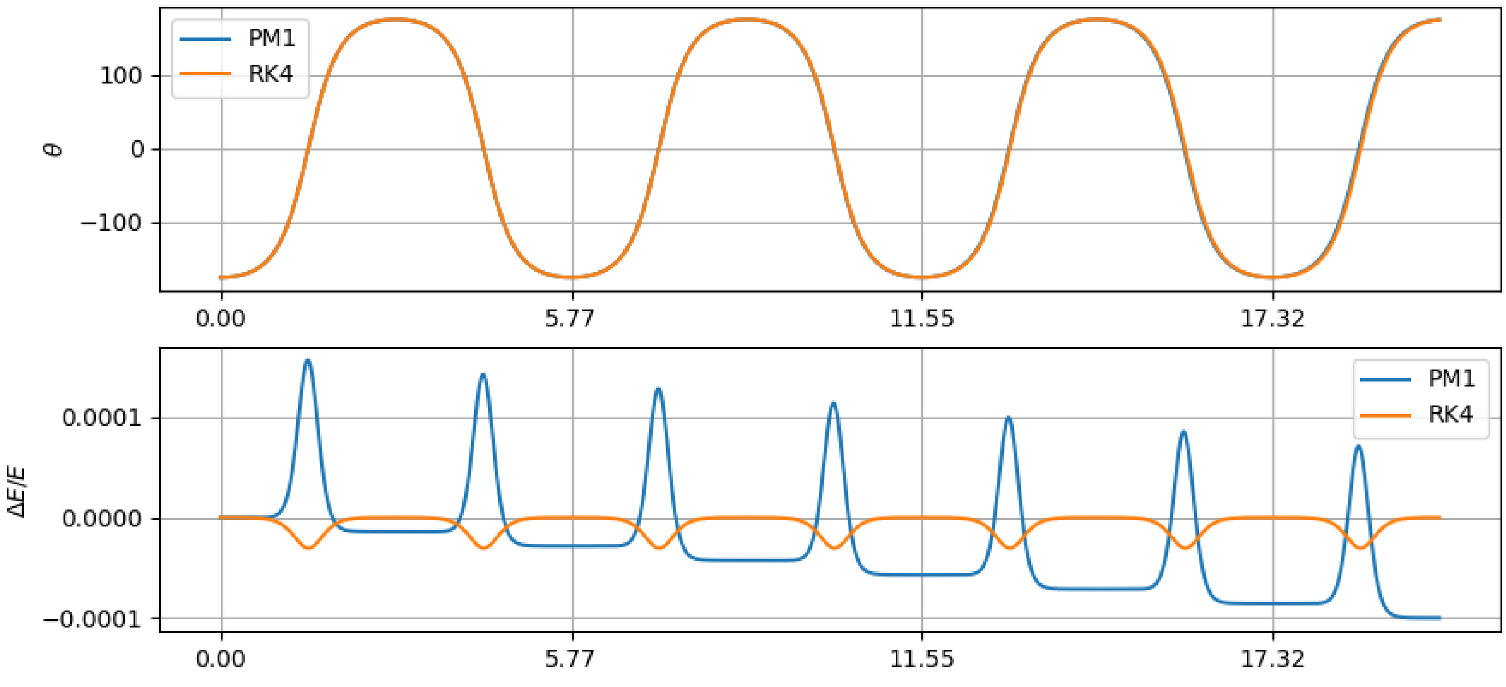
```
dt=0.1 #passo de tempo
theta0=-175./180.*np.pi #amplitude em radianos
omega0=0. #velocidade angular inicial
T=2*np.pi*np.sqrt(L/g)
t=np.arange(0.,10*T,dt) #vetor de tempos (10T)
n=len(t)
theta=np.zeros(t.shape); omega=np.copy(theta)
theta[0]=theta0; omega[0]=omega0
for kt in range(1,n):
    omega[kt],theta[kt]=\
    rk4S(omega[kt-1],theta[kt-1],\
    domegadt,dthetadt,dt)
```

$\Delta t = 0.1s$



Período teórico
PM1
RK4
100
0
−100
θ
0.00
5.77
11.55
17.32
0.00
−0.05
−0.10
ΔE/E
PM1
RK4
0.00
5.77
11.55
17.32

$\Delta t = 0.01s$



Como esperado converge quando $\Delta t \longrightarrow 0$, mas RK4 mantém-se melhor (energia)

Álgebra complexa

Fórmula de Euler

No domínio dos números complexos, definindo unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$

E um número complexo como $c = a + ib, (a, b \ \in \mathcal{R})$

Se $x \in \mathcal{R}$:

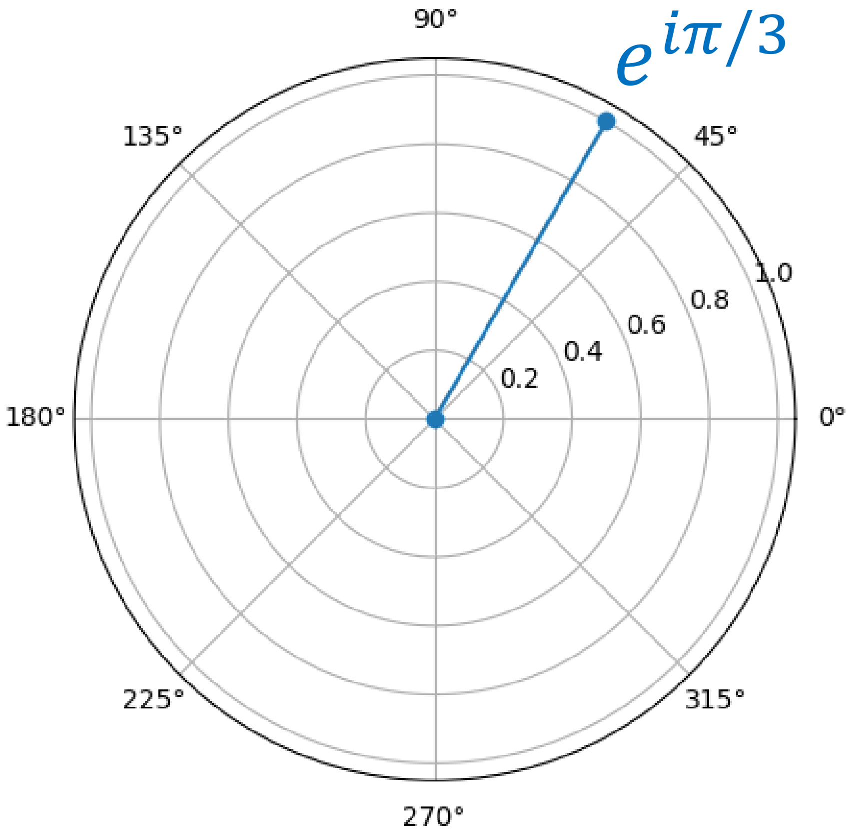
$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

e um número complexo pode ser escrito na forma POLAR ($A\ (amplitude), \theta(fase) \in \mathcal{R}$):

$$c = Ae^{i\theta} = A(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Circulo unitário no plano complexo

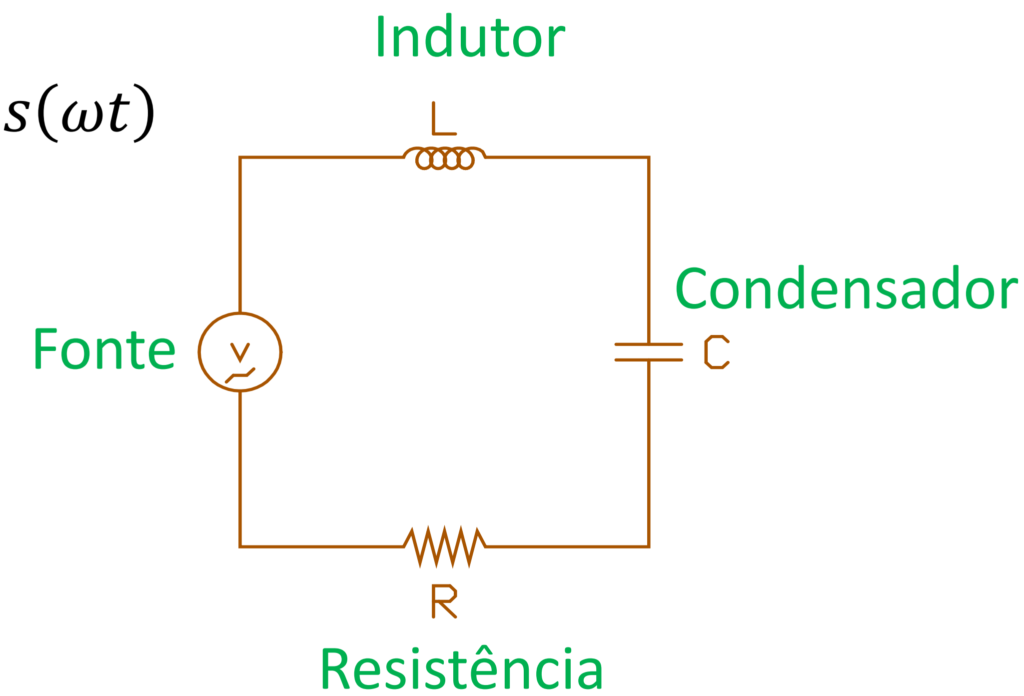
```
i=complex(0,1.)
x=np.exp(np.pi/3*i)
plt.polar([0,np.angle(x)],[0,np.abs(x)],marker='o')
#==plt.polar([0,np.pi/3],[0,1])
```



Circuito RLC (corrente alterna)

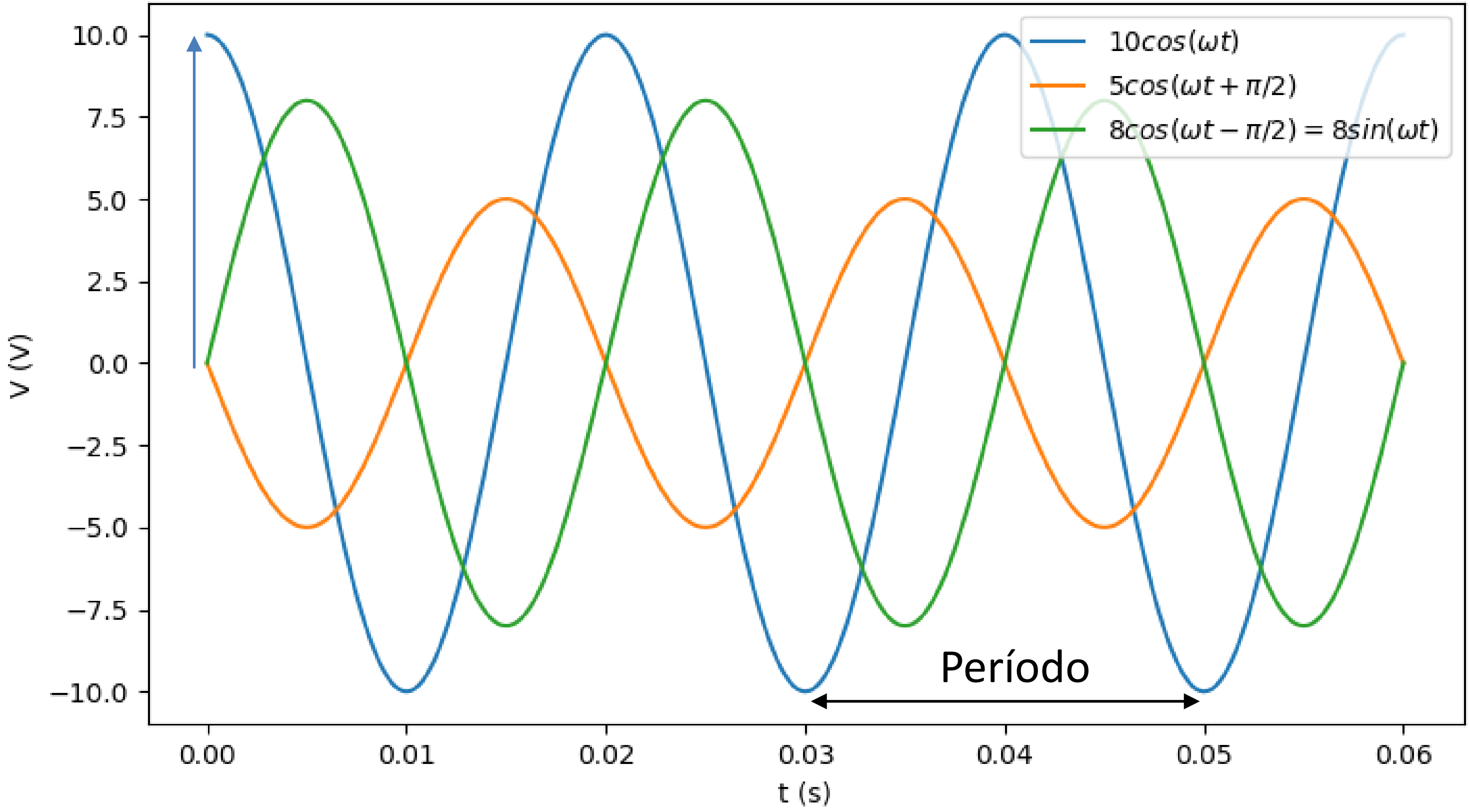
$$V = V_L + V_C + V_R = V_0\, cos(\omega t)$$

$$\begin{cases} V_R = RI & \text{Lei d Ohm} \\ V_C = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int I dt \\ V_L = L\dfrac{dI}{dt} \end{cases}$$



A corrente é a mesma em todos os componentes

sinais a 50 Hz, ≠ amplitude, ≠ fase



Indutor

$$V_L = L\frac{dI}{dt}$$

Se $I = I_0\cos(\omega t)$:

$$V_L = L\frac{d}{dt}(I_0\cos(\omega t)) = -LI_o\omega\sin(\omega t) = V_0\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Mesma frequência angular ω (componente linear)

Amplitude $V_0 = LI_0\omega$

Desfasamento entre tensão V e corrente I: $\phi = -\frac{\pi}{2}$

Em geral

A derivação ou integração de uma função sinusoidal dá uma função sinusoidal com a mesma frequência, com certas amplitude e fase.

Usando notação complexa…

$$V = V_L + V_C + V_R = V_0\, cos(\omega t) = Re\left(V_0 e^{i\omega t}\right)$$

e podemos usar as propriedades da função $\exp()$. Atenção: vamos omitir a função $Re(\quad)$, mas ela é usada!

Vamos definir a impedância (complexa) dos diferentes componentes:

$$Z_R = R$$

$$Z_C = -\frac{i}{\omega C}$$

$$Z_L = i\omega L$$

com $Z_L = i\omega L$, o indutor satisfaz uma lei de Ohm complexa

$$V_L = L\frac{dI}{dt} \Leftrightarrow V_L = Z_L I$$

$$V_L = L\frac{d}{dt}(I_0\cos(\omega t)) = -LI_o\omega\sin(\omega t) = V_0\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$V_L = (i\omega L)I_0 e^{i\omega t} = LI_0\omega\left(ie^{i\omega t}\right)$$

$$ie^{i\omega t} = \mathrm{i}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) = i\cos(\omega t) - \sin(\omega t)$$

Logo:

$$Re\left(ie^{i\omega t}\right) = -\sin(\omega t)$$

e portanto

$$V_L = LI_0\omega\left(ie^{i\omega t}\right) = -LI_o\omega\sin(\omega t) = Re(Z_L I)$$

Exercício

Verificar que no caso do condensador, com

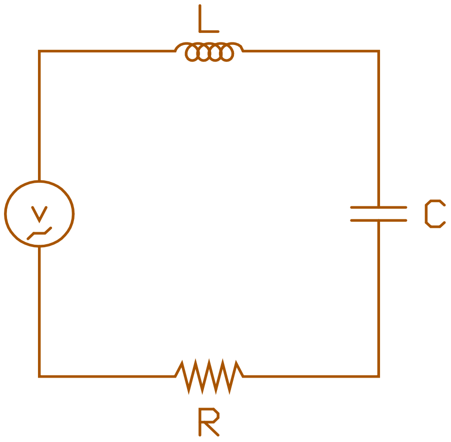
$$Z_C = -\frac{i}{\omega C}$$

Se tem igualmente

$$V_C = Z_C I \left(= Re(Z_C I)\right)$$

Logo, com a definição das impedâncias complexas todos os componentes (lineares) satisfazem a Lei de Ohm.

Circuito RLC



Leis de Kirchoff:

Só existe uma malha:

logo a corrente é a mesma em todos os componentes

A tensão no gerador é imposta:

$$\begin{cases} V = V_0 e^{i\omega t} \\ I = I_0 e^{i\omega t + \phi} \end{cases}$$

Lei das malhas:

$$V = V_L + V_C + V_R$$

Lei de Ohm:

$$V = Z_L I + Z_C I + Z_R I = (Z_L + Z_C + Z_R) I$$

Lei de Ohm complexa

$$V = (Z_L + Z_C + Z_R)I$$

$$V_0 e^{i\omega t} = \left[R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}\right] I_0 e^{i(\omega t + \phi)}$$

A frequência angular ω vai ter impacto na amplitude (I_0) e na fase (ϕ) da corrente.

A tensão em cada componente vai ter diferentes amplitudes e fase.

$$V_0 e^{i\omega t} = \left[R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}\right] I_0 e^{i(\omega t+\phi)}$$

Eliminando o termo comum $e^{i\omega t}$ e usando representação polar dos números complexos:

$$R + i\omega L - \frac{i}{\omega C} = a e^{\theta} = \left[R^2 + \omega^{-2} C^{-2} + \omega^2 L^2\right]^{\frac{1}{2}} e^{tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{R\omega C}\right)}$$

Podemos calcular a amplitude e fase da corrente

$$\begin{cases} I_0 = \dfrac{V_0}{[R^2 + \omega^{-2} C^{-2} + \omega^2 L^2]^{\frac{1}{2}}} \\ \phi = tan^{-1}\left[\dfrac{1}{R\omega C} - \dfrac{\omega L}{R}\right] \end{cases}$$

Sabendo I

Podemos calcular

$$V_R = RI$$

$$V_C = Z_C\, I = -\frac{i}{\omega C} I$$

$$V_L = Z_L I = i\omega L\, I$$

Como o numpy sabe aritmética complexa, estas operações são triviais…

Circuito RLC (1)

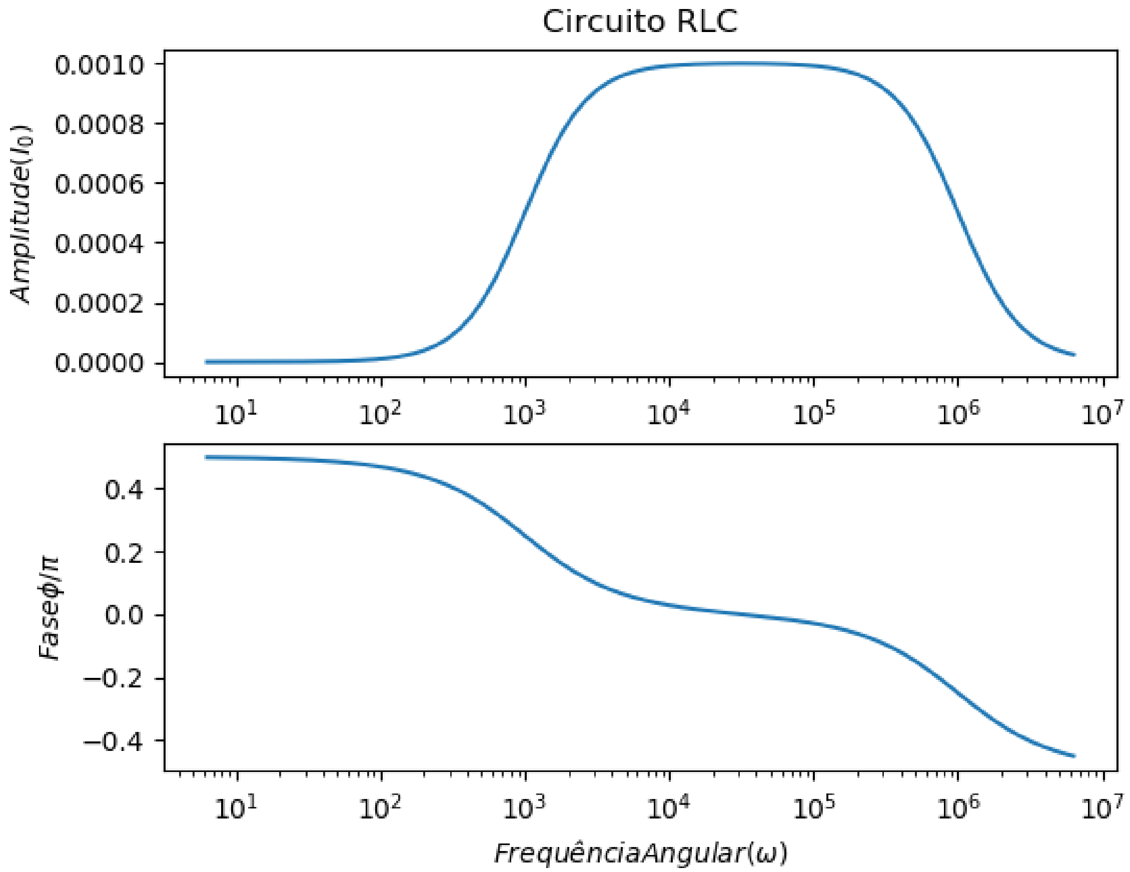
```
#Circuito RLC
#Calculo da relação Tensão-Corrente (amplitude e fase)
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
R=1000.   # Resistencia
L=1.0e-3 # Impedância da Bobine
C=1.0e-6 # Capacidade do condensador
V0=1.0    # Fonte de tensão
i=complex(0.,1.) #unidade imaginária
pi=np.pi
```

(2) Tudo depende de ω

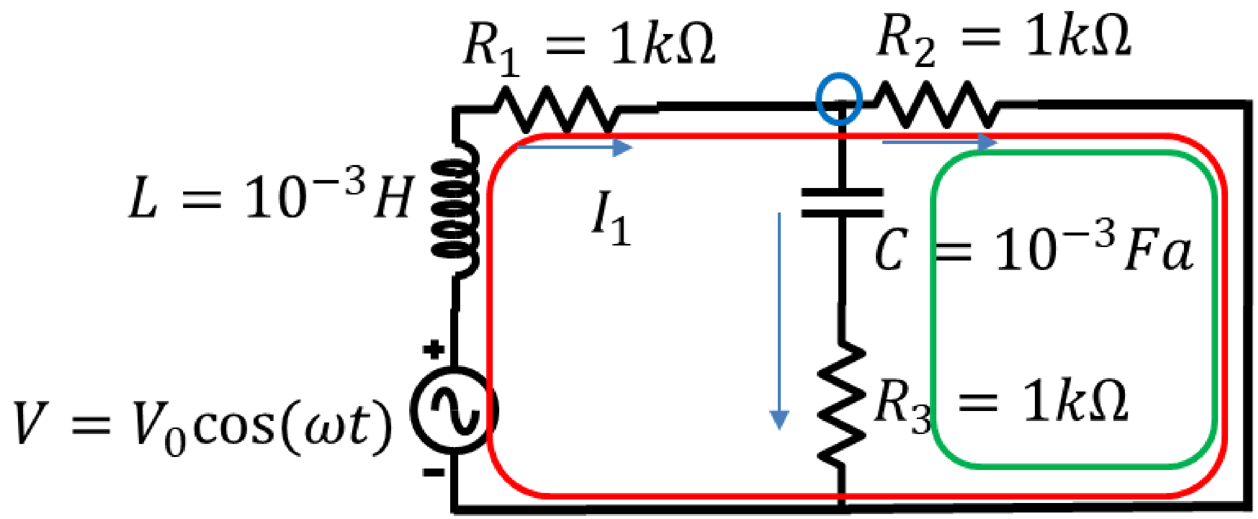
A solução é só isto

```
omega=np.arange(2*pi,2e6*pi,1) #define vector de frequências
Z=R+omega*i*L-i/(omega*C) #Impedância em função da frequência
I=V0/Z #Corrente
phi=np.angle(I) #Diferença de fase
#Graficos:
plt.close('all')
plt.subplot(2,1,1)
plt.semilogx(omega,np.real(I))
plt.title('Circuito RLC')
plt.ylabel(r'$Amplitude (I_0)$')
plt.subplot(2,1,2)
plt.semilogx(omega,phi/pi)
plt.xlabel('Frequência Angular (\omega)')
plt.ylabel(r'$Fase \phi/\pi$')%Circuito RLC
```

Função de transferência do RLC



Um circuito com várias malhas



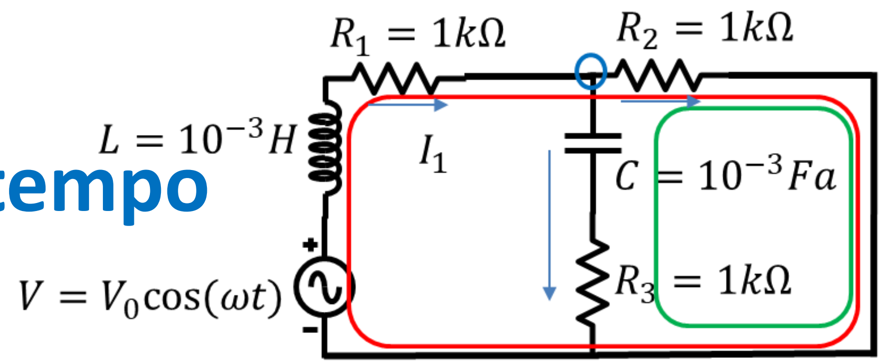
2 malhas, 1 nó

$$\begin{cases} V = (i\omega L + R_1)I_1 + R_2 I_2 \\ R_2 I_2 - \left(R_3 - \dfrac{i}{\omega C}\right) I_3 = 0 \\ I_1 - I_2 - I_3 = 0 \end{cases}$$

Sistema de equações complexas

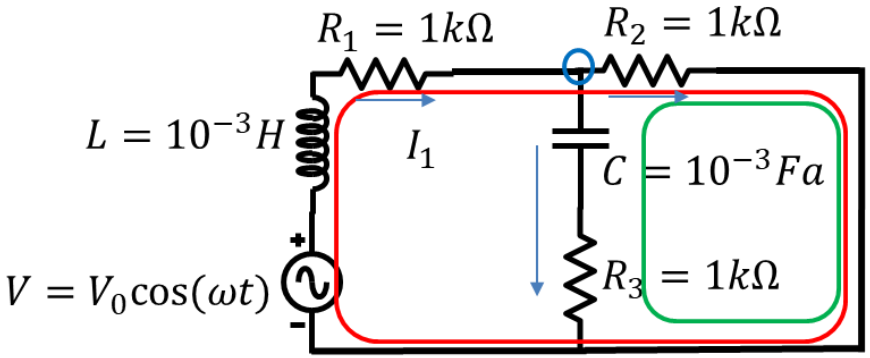
$$\begin{bmatrix} (i\omega L + R_1) & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -\left(R_3 - \frac{i}{\omega C}\right) \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

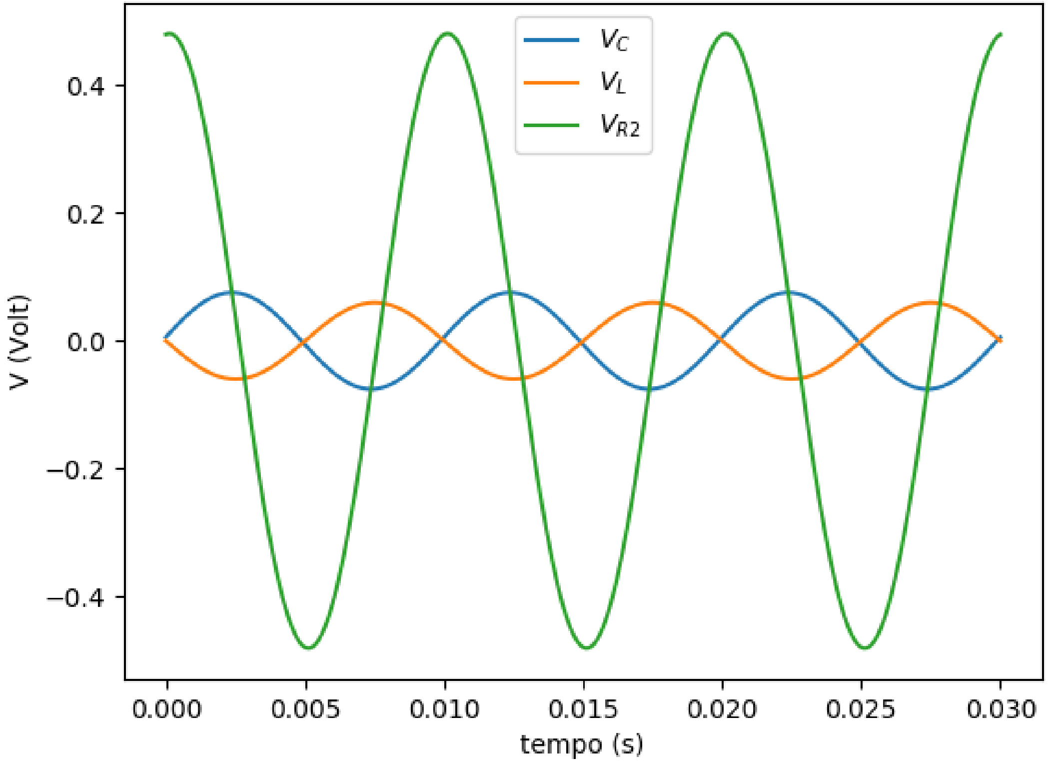
Só 1 frequência
soluções em função do tempo




```
import numpy as np;
import matplotlib.pyplot as plt
i=complex(0.,1.)
V0=10;R1=100;R2=10;R3=10;C=1e-3;L=1e-3;
freq=100;omega=2*np.pi*freq
t=np.linspace(0,3./freq,301)
V=V0*np.exp(i*omega*t)
M=np.array([[i*omega*L+R1,R2,0],[0,R2,-(R3-i/(omega*C))],[1,-1,-1]])
b=np.array([V0,0,0])
I=np.linalg.solve(M,b) #M é complexo
VC=-i/(omega*C)*I[2]*np.exp(i*omega*t)
VL=i*omega*L*I[0]*np.exp(i*omega*t)
VR2=R2*I[1]*np.exp(i*omega*t)
plt.plot(t,np.real(VC),label=r'$V_C$')
plt.plot(t,np.real(VL),label=r'$V_L$')
plt.plot(t,np.real(VR2),label=r'$V_{R2}$')
plt.legend()
plt.ylabel('V (Volt)');plt.xlabel('tempo (s)')
```

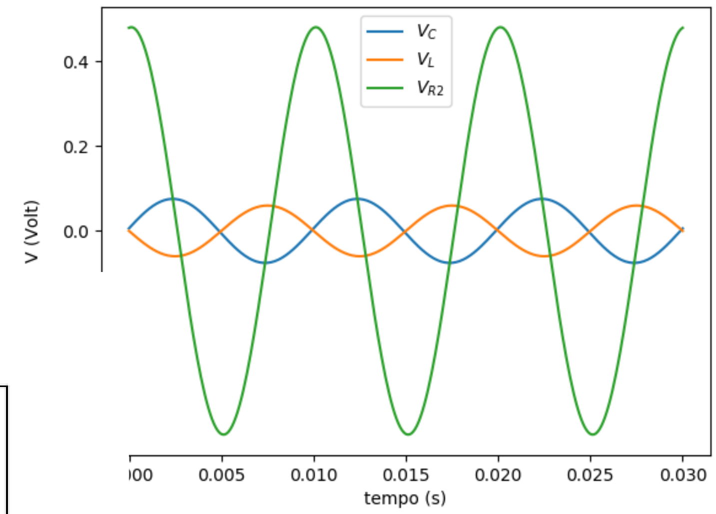
Só 1 frequência 100Hz

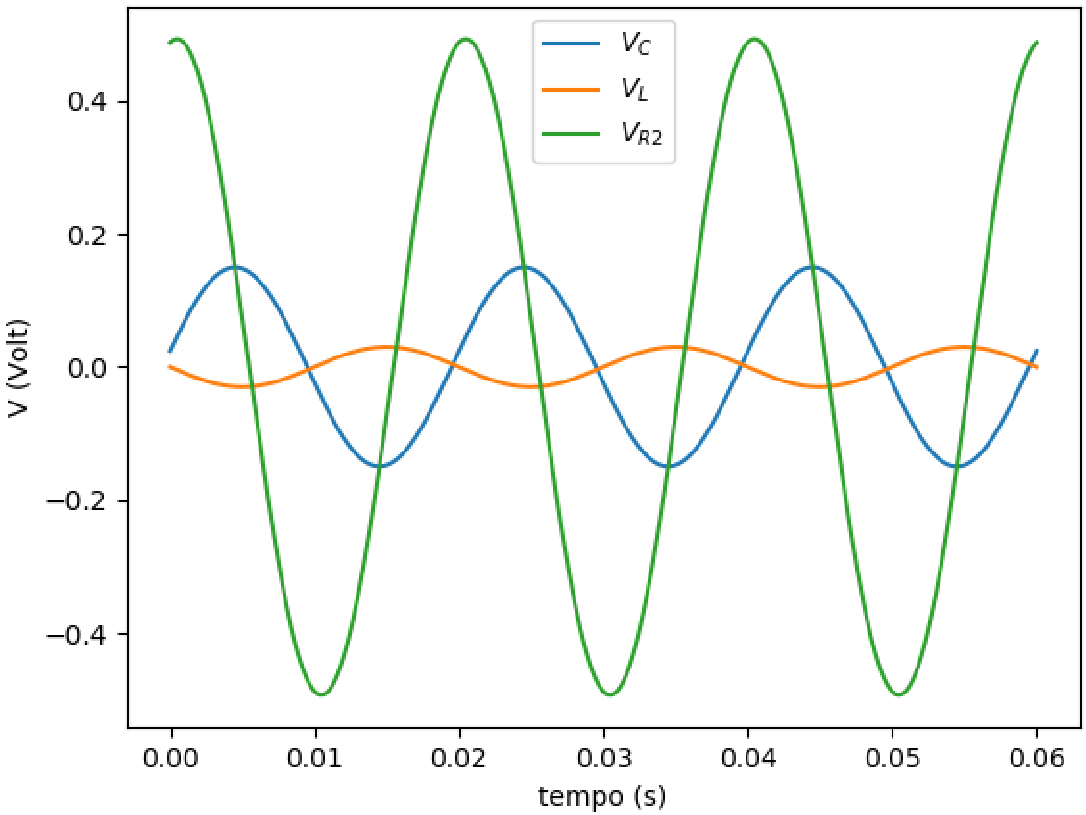




Isto seria o que veríamos no osciloscópio aos terminais de cada componente

Só 1 frequência= 50Hz





As amplitudes e fases dependem da frequência