Exercícios 22 a 27 – Resoluções

22. Seja X – v.a. que representa o peso, em Kg, de um indivíduo escolhido ao acaso na população;
Sabe-se que $X \cap \mathcal{N}(61, \sigma = 10)$.

a) Para um conjunto de 20 utilizadores, escolhidos ao acaso, sejam:
X_i – v.a. que representa o peso, em Kg, do indivíduo i, i = 1, ..., 20;
As v.a.'s X_i, i = 1, ..., 20, são independentes (i.) (já que os indivíduos são pessoas distintas) e têm todas a mesma distribuição (a mesma que tem a v.a. genérica X), o que dito de outro modo quer dizer que são identicamente distribuídas (i.d.); resumidamente diz-se que as v.a.'s X_i, i = 1, ..., 20, são i.i.d..
Em conclusão, as v.a.'s X_i são **i.i.d.** tendo-se $X_i \cap \mathcal{N}(61, \sigma = 10)$, i = 1, ..., 20.
O peso total dos 20 utilizadores é, também, uma v.a. que é a soma dos pesos de cada um; designe-se essa v.a. por S_{20}. Tem-se, então

$$S_{20} = \sum_{i=1}^{20} X_i$$

"O peso dos 20 utilizadores excede a carga máxima" $\Leftrightarrow \{S_{20} > 1300\}$
Como S_{20} é uma soma de v.a.'s independentes todas com distribuição Normal, então sabe-se que S_{20} tem também distribuição Normal. Como o valor esperado de uma soma de v.a.'s (quaisquer) é a soma dos valores esperados das parcelas, tem-se:

$$E(S_{20}) = \sum_{i=1}^{20} E(X_i) = \sum_{i=1}^{20} E(X) = 20 \times 61 = 1220.$$

Além disso, como a variância de uma soma de v.a.'s **independentes** é a soma das variâncias das parcelas, tem-se:

$$\sigma^2_S = Var(S_{20}) = \sum_{i=1}^{20} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{20} Var(X) = 20 \times 10^2 \Rightarrow \sigma_S = \sqrt{Var(S_{20})} = 10\sqrt{20}\,.$$

Em conclusão,

$$S_{20} \cap \mathcal{N}(1220, \sigma_S = 10\sqrt{20}).$$

$P(S_{20} > 1300) = 1 - P(S_{20} \leq 1300) = 1 - P[(S_{20} - 1220)/(10\sqrt{20}) \leq (1300 - 1220)/(10\sqrt{20})] =$
$\approx 1 - \Phi(1.79) = 1 - 0.9633 = \underline{0.0367}$

b) O peso total das 5 pessoas que vão entrar no elevador pode ser representado por $S_5 = \sum_{i=1}^{5} X_i$. Como o peso total das pessoas que já se encontram no elevador é igual a 950Kg, tem-se:
"O peso total dos 20 passageiros excede a carga máxima" $\Leftrightarrow \{950 + S_5 > 1300\} \Leftrightarrow \{S_5 > 350\}$
De forma análoga à descrita em a), deriva-se que

$$S_5 \cap \mathcal{N}(305, \sigma_S = 10\sqrt{5}).$$

$P(S_5 > 350) = 1 - P(S_5 \leq 350) \approx 1 - \Phi(2.01) = 1 - 0.9778 = \underline{0.0222}$

c)

i) Seja N_{85} – v.a. que representa o n.º de pessoas, em 20, com peso superior a 85Kg ("sucesso")
P("Uma pessoa tem peso superior a 85Kg") = $P(X > 85) = 1 - \Phi(2.4) = 1 - 0.9918 = 0.0082$
Como os pesos das pessoas são independentes uns dos outros, $N_{85} \cap Bi(20, 0.0082)$.
"Quanto muito 2 das 20 pessoas têm peso superior a 85Kg" $\Leftrightarrow \{N_{85} \leq 2\}$
$P(N_{85} \leq 2) = 0.9918^{20} + 20 \times 0.0082 \times 0.9918^{19} + C^{20}_2 \times 0.0082^2 \times 0.9918^{18} \approx \underline{0.9994}$

ii) Note-se que o acontecimento "Pelo menos 1 das 20 pessoas tem peso < 40Kg" é o complementar do acontecimento "Menos de 1 das 20 pessoas têm peso < 40Kg" que é, ainda, equivalente ao acontecimento "Todas as 20 pessoas têm peso ≥ 40Kg".
P("Uma pessoa tem peso ≥ 40Kg") = $P(X \geq 40) = 1 - P(X < 40) = 1 - \Phi(-2.1) = \Phi(2.1) = 0.9821$

Como os pesos das pessoas são independentes uns dos outros:
P("Pelo menos 1 das 20 pessoas tem peso inferior a 40Kg") =
= 1 – P("Todas as 20 pessoas têm peso ≥ 40Kg") = $1 - 0.9821^{20} \approx \underline{0.3032}$

d) A carga máxima parece adequada, pois a probabilidade de o elevador cheio (20 passageiros) ultrapassar essa carga é pequena, conforme visto em a), e igual a 0.0367. Quer isto dizer que, em apenas 3.67% das vezes em que o elevador encha, os passageiros não poderão seguir todos, pelo facto da carga máxima ser ultrapassada.

23. Para um indivíduo escolhido ao acaso na população, seja *p* a probabilidade de o seu sangue ser do tipo Rh-negativo. É dado que *p* = 0.15. Sejas N – v.a. que representa o n.º de dadores, em 92, que têm sangue do tipo Rh-negativo. Admitindo que os tipos de sangue dos 92 dadores são independentes uns dos outros, tem-se que N ∩ Bi(92, 0.15).
Repare-se, desde já, que se está na presença de uma v.a. com distribuição Binomial associada a um <u>elevado n.º de provas de Bernoulli</u> (92) e com uma <u>probabilidade de sucesso relativamente reduzida</u> (0.15). Tendo em conta que

$$E(N) = 92\times0.15 = 13.8 \quad \text{e que} \quad Var(N) = 13.8\times0.85 = 11.73,$$

o <u>Teorema Limite Central</u> permite aproximar a f.d. de da v.a. N, depois de centrada e reduzida, pela f.d. da distribuição Normal padrão ($\mathcal{N}$(0, 1)), i.e.,

$$P(N\le x) \approx \Phi((x-13.8)/\sqrt{11.73}\,),$$

uma vez que N tem a mesma estrutura probabilística do que a soma de 92 v.a.'s i.i.d com distribuição Bi(1, 0.15) (Ber(0.15)).

a) "10 ou menos dos 92 dadores têm sangue do tipo Rh-negativo" ⇔ {N≤ 10}
$P(N\le 10) \approx_{TLC} \Phi((10-13.8)/\sqrt{11.73}\,) \approx \Phi(-1.11) = 1-\Phi(1.11) = 1-0.8665 = \underline{0.1335}$

b) "Entre 15 a 20 (inclusive) dos 92 dadores têm sangue do tipo Rh-negativo" ⇔ {15< N≤ 20}
$P(15< N\le 20) = P(N\le 20) - P(N\le 15) \approx_{TLC} \Phi((20-13.8)/\sqrt{11.73}\,) - \Phi((15-13.8)/\sqrt{11.73}\,) \approx$
$\approx \Phi(1.81) - \Phi(0.35) = 0.9649 - 0.6368 = \underline{0.3281}$

c) "Mais do que 80 dos 92 dadores têm sangue do tipo Rh-negativo" ⇔ {N> 80}
$P(N> 80) = 1 - P(N\le 80) \approx_{TLC} 1-\Phi((80-13.8)/\sqrt{11.73}\,) \approx 1-\Phi(19.33) \approx 1-1 = \underline{0}$

24. Para uma máquina, escolhida ao acaso na fábrica, considerem-se os seguintes acontecimentos:
T_i: "A máquina é do tipo i", i ∈ { I, II}; R: "A máquina vai para reparação".
Tem-se, então, que:
$P(R|T_I) = p1 = 0.2$; $P(R|T_{II}) = p2 = 0.4$;
$P(T_I) = n1/(n1+n2) = 1000/2500 = 0.4$ (probabilidade é o mesmo que proporção); $P(T_{II}) = 0.6$

i) $P(R) =_{TLC} P(R|T_I)\,P(T_I) + P(R|T_{II})\,P(T_{II}) = 0.2\times0.4 + 0.4\times0.6 = 0.4\times0.8 = \underline{0.32}$

ii) Seja N – v.a. que representa o n.º de máquinas, no total das 2500, que estão em reparação.
Admitindo que as máquinas vão para reparação independentemente umas das outras (que é o que faz sentido), tem-se que N ∩ Bi(2500, 0.32). O facto de se estar perante uma Binomial associada a um elevado n.º de provas (2500) permite utilizar o Teorema Limite Central para aproximar a sua f.d.. Uma vez que

$$E(N) = 2500\times0.32 = 800 \quad \text{e que} \quad Var(N) = 800\times0.68 = 544,$$

tem-se

$$P(N\le x) \approx \Phi((x-800)/\sqrt{544}\,)$$

$P(750< N\leq 850) = P(N\leq 850) - P(N\leq 750) \approx_{TLC} \Phi((850-800)/\sqrt{544}) - \Phi((750-800)/\sqrt{544}) \approx$

$= \Phi(50/\sqrt{544}) - \Phi(-50)/\sqrt{544}) = 2\,\Phi(50/\sqrt{544}) - 1 \approx 2\,\Phi(2.14) - 1 =$

$= 2\times 0.9838 - 1 = \underline{0.9676}$

iii) Seja k a capacidade do estaleiro.

P("O estaleiro satisfaz todos os pedidos de reparação") = 0.99 $\Leftrightarrow P(N\leq k) = 0.99$

$P(N\leq k)\ 0.99 <\approx>_{TLC} \Phi((k-800)/\sqrt{544}) = 0.99 \Leftrightarrow (k-800)/\sqrt{544} = \Phi^{-1}(0.99) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k \approx \sqrt{544}\,\Phi^{-1}(0.99) + 800 \Leftrightarrow k \approx \sqrt{544}\times 2.326 + 800 \Leftrightarrow k \approx 854.25$

A capacidade do estaleiro deve ser de <u>855 máquinas</u>.

25. Para um dia escolhido ao acaso, seja

X – v.a. que representa o n.º de pessoas que dão entrada na UCI; $X \cap \mathcal{P}(5)$

a) "Entram 2 pessoas na UCI" $\Leftrightarrow \{X= 2\}$

$P(X= 2) = e^{-5}\, 5^2/2! \approx \underline{0.0842}$;

"Entram no máximo 2 pessoas na UCI" $\Leftrightarrow \{X\leq 2\}$

$P(X\leq 2) = e^{-5}\,(1 + 5 + 5^2/2) \approx \underline{0.1247}$

b) Sabe-se que:

"Entram na UCI mais do que 2 pessoas" $\Leftrightarrow \{X> 2\}$

"Entram no máximo 4 pessoas na UCI" $\Leftrightarrow \{X\leq 4\}$

$P(X\leq 4\,|\,X> 2) = P(2< X\leq 4)/P(X> 2) = [P(X= 3) + P(X= 4)]/(1 - P(X\leq 2)) = e^{-5}\,(5^3/6+ 5^4/24)/(1 - 0.1247) \approx$

$\approx \underline{0.3608}$

c) Uma vez que o n.º de entradas num dia tem distribuição de Poisson então, <u>admitindo que o n.º de entradas num dia é independente do n.º de entradas noutro dia qualquer</u>, o n.º de entradas em qualquer outro intervalo de tempo tem ainda distribuição de Poisson. Deste modo, sendo N_{365} a v.a. que representa o n.º de entradas em 2003 (365 dias), N_{365} tem distribuição de Poisson. Como o n.º esperado de entradas num dia é 5, o n.º esperado de entradas em 365 dias será 5×365 = 1825. Assim,

$$N_{365} \cap \mathcal{P}(1825).$$

"Em 2003 dão entrada na UCI entre 1800 e 1900 pessoas" $\Leftrightarrow \{1800< N_{365}\leq 1900\}$

N_{365} tem a mesma estrutura probabilística do que a soma de 365 v.a.'s i.i.d com distribuição $\mathcal{P}(1825)$ (ou a soma de 1825 v.a.'s i.i.d com distribuição $\mathcal{P}(1)$, ou a soma de outro n.º qualquer de v.a.'s i.i.d.: basta pensar que uma $\mathcal{P}(\lambda)$ pode ser vista como a soma de m v.a.'s i.i.d $\mathcal{P}(\lambda/m)$), pelo que o <u>Teorema Limite Central</u> permite aproximar a f.d. de N_{365}, depois de centrada e reduzida, pela f.d. da distribuição Normal padrão. Tendo em conta que

$$E(N_{365}) = Var(N_{365}) = 1825,$$

tem-se então:

$$P(N_{365}\leq x) \approx \Phi((x - 1825)/\sqrt{1825}).$$

$P(1800< N_{365}\leq 1900) = P(N_{365}\leq 1900) - P(N_{365}\leq 1800) \approx_{TLC}$

$\approx_{TLC} \Phi((1900 - 1825)/\sqrt{1825}) - \Phi((1800 - 1825)/\sqrt{1825}) \approx$

$\approx \Phi(1.76) - \Phi(-0.59) = \Phi(1.76) + \Phi(0.59) - 1 = 0.9608 + 0.7224 - 1 = \underline{0.6832}$

26. <u>Cov(X, Y) = E(X Y) – E(X) E(Y)</u>

$E(X\,Y) = \sum_{i,j} x_i \times y_j \times P(X = x_i, Y = y_j)$

De acordo com a expressão anterior, para o cálculo de E(X Y) podem eliminar-se de imediato as linhas onde $x_i = 0$ e as colunas onde $y_j = 0$ (pois tornam de imediato as correspondentes parcelas do somatório duplo iguais a zero, independentemente das probabilidades conjuntas). Tem-se então:

$E(X\,Y) = (-1)(-1)\times 0 + (-1)\times 1\times 0 + 1\times(-1)\times 0 + 1\times 1\times 0 = 0$

Para os cálculos de E(X) e E(Y) pode começar-se por determinar as suas f.m.p., a que se chamam as distribuições marginais. Como

$$P(X= x_i) = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) \quad \text{e} \quad P(Y= y_j) = \sum_i P(X = x_i, Y = y_j),$$

tem-se: f.m.p. de X:

x_i	-1	0	1
$P(X= x_i)$	1/4	1/2	1/4

f.m.p. de Y:

y_j	-1	0	1
$P(Y= y_j)$	1/4	1/2	1/4

Ou seja, X e Y são identicamente distribuídas. Além disso a distribuição que é comum a ambas é simétrica em torno de 0, pelo que se tem E(X) = E(Y) = 0. Finalmente:

$Cov(X, Y) = E(X\,Y) - E(X)\,E(Y) = 0 - 0\times 0 = \underline{0}$

<u>X e Y são independentes sse $P(X= x_i, Y= y_j) = P(X= x_i)\times P(Y= y_j)$, para todo o par (x_i, y_j)</u>.

Repare-se que, por exemplo, para o par (0, 0) tem-se,

$$P(X= 0, Y= 0) = 0 \quad \text{e} \quad P(X= 0)\times P(Y= 0) = (1/2)\times(1/2) = 1/4,$$

pelo que, $P(X= 0, Y= 0) \neq P(X= 0)\times P(Y= 0)$.

Deste modo existe pelo menos um par (x_i, y_j) tal que $P(X= x_i, Y= y_j) \neq P(X= x_i)\times P(Y= y_j)$ e, portanto, as v.a.'s não são independentes, ainda que a Cov(X, Y) seja nula.

27. Para um período de 10 segundos escolhido ao acaso, tem-se

X – v.a. que representa o n.º de partículas emitidas; $X \cap \mathcal{P}(\lambda)$: $E(X^2) = 6$

Comecemos por determinar λ, que é simultaneamente o valor esperado e a variância da distribuição de Poisson:

$$\begin{cases} E(X)=\lambda \\ Var(X)=\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E(X)=\lambda \\ E(X^2)-E^2(X)=\lambda \end{cases} \underset{E(X^2)=6}{\Leftrightarrow} \begin{cases} E(X)=\lambda \\ 6-\lambda^2=\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ (pois } \lambda > 0)$$

Assim, $X \cap \mathcal{P}(2)$.

a) P(A) = P("Em pelo menos 1, de 7 períodos de 10 segundos, são emitidas 4 ou mais partículas") =
= 1 – P("Em nenhum dos 7 períodos de 10 segundos são emitidas 4 ou mais partículas") =
= 1 – P("Em todos os 7 períodos de 10 segundos são emitidas 3 ou menos partículas")

Sendo p = P("Num período de 7 segundos são emitidas 3 ou menos partículas"),

$p = P(X\leq 3) = e^{-2}\,(1 + 2 + 2^2/2 + 2^3/6) \approx 0.8571$

Admitindo que em cada período de 10 segundos o n.º de partículas emitidas é independente do n.º de partículas emitidas noutro período qualquer, vem:

$P(A) = 1 - p^7 \approx 1 - 0.8571^7 \approx \underline{0.6602}$

b) Para um período de 10 segundos escolhido ao acaso, seja:

Y – v.a. que representa o n.º de partículas registadas; $Y \in \{0, 1, 2, ...\}$

i) Para serem registadas k partículas é necessário que tenham sido emitidas pelo menos k. Assim, o acontecimento $\{Y= k\}$ só é possível se $\{X= k\}$, ou $\{X= k+1\}$, ou $\{X= k+2\}$, etc., i.e.

$$\{Y= k\} = \{X= k \wedge Y= k\} \vee \{X= k+1 \wedge Y= k\} \vee \{X= k+2 \wedge Y= k\} \vee \ldots = \bigcup_{x\geq k}\{X= x \wedge Y= k\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(Y= k) = P\left(\bigcup_{x\geq k}\{X= x \wedge Y= k\}\right) = \sum_{x\geq k} P(X= x \wedge Y= k),$$

pois os acontecimentos $\{X= x \wedge Y= k\}$ e $\{X= x' \wedge Y= k\}$ são incompatíveis para todo o $x \neq x'$.

Como o n.º de partículas registadas é que depende do n.º de partículas emitidas, é natural introduzir essa dependência no cálculo da probabilidade conjunta $P(X=x \wedge Y=k)$, condicionando Y por X e obtendo-se, deste modo, $P(X=x \wedge Y=k) = P(Y=k|X=x) \times P(X=x)$.

$P(Y=k|X=x)$ é a probabilidade de em, x partículas emitidas, k serem registadas; sabe-se que esta probabilidade é dada pela Binomial com probabilidade de sucesso 0.9, pelo que:

$$P(Y=k|X=x) = C^x_k\, 0.9^k\, 0.1^{x-k}.$$

Substituindo na expressão de $P(Y=k)$, vem:

$$P(Y=k) = \sum_{x\geq k} P(X=x \wedge Y=k) = \sum_{x\geq k} P(Y=k|X=x)P(X=x) = \sum_{x\geq k} C^x_k\ 0.9^k\ 0.1^{x-k}\ e^{-2}\ 2^x / x! =$$

$$= \sum_{x\geq k} \frac{\cancel{x}!}{k!(x-k)!}\ 0.9^k\ 0.1^{x-k}\ e^{-2}\ \frac{2^x}{\cancel{x}!} = e^{-2}\ 0.9^k\ 2^k\ \frac{1}{k!}\sum_{x\geq k}\frac{1}{(x-k)!}\ 0.1^{x-k}\ 2^{x-k} =$$

$$= e^{-2}\ \frac{(0.9\times 2)^k}{k!}\sum_{x\geq 0}\frac{1}{x!}\ (2\times 0.1)^x = e^{-2}\ \frac{1.8^k}{k!}\ e^{0.2} = e^{-1.8}\ \frac{1.8^k}{k!}\ .$$

Em conclusão,

$$P(Y=k) = e^{-1.8}\ \frac{1.8^k}{k!}\ , k \geq 0$$

ou seja,

$$\underline{Y \cap \mathcal{P}(1.8)}.$$

(Nota: diz-se que Y é o resultado de aplicar um filtro binomial a X)

ii) O valor esperado do n.º de partículas registadas por período é o valor esperado de Y:
E(Y) = <u>1.8 partículas</u>