32. Para um indivíduo do prédio, seleccionado ao acaso, sejam:
A – "o indivíduo é adulto"; C – "o indivíduo é criança"
(Não é necessário definir os dois acontecimentos, já que $A^C = C$; no entanto, é mais simples por uma questão de escrita); sabe-se que $P(A) = 40/60 = 2/3 \Leftrightarrow P(C) = 1/3$
Seja X – v.a. que representa o peso, em Kg, do indivíduo;
A distribuição de X depende de se verificar A ou C; mais concretamente:
$X|A \cap \mathcal{N}(75, \sigma = 10)$ e $X|C \cap \mathcal{N}(35, \sigma = 10)$.
a) "O indivíduo tem peso inferior a 60Kg" $\Leftrightarrow \{X < 60\}$
$P(X < 60) = P(X < 60|A)P(A) + P(X < 60|C)P(C) =$ (escrevendo de outra forma)
$= P(X|A < 60)P(A) + P(X|C < 60)P(C) = \Phi((60 - 75)/10)\times 2/3 + \Phi((60 - 35)/10)\times 1/3 =$
$= \Phi(-1.5)\times 2/3 + \Phi(2.5)\times 1/3 = [1 - \Phi(1.5)]\times 2/3 + \Phi(2.5)\times 1/3 =$
$= (1 - 0.93319)\times 2/3 + 0.99379\times 1/3 \approx \underline{0.3758}$
b) "Sabe-se que o peso do indivíduo é superior a 60Kg" $\Leftrightarrow \{|X > 60\}$
$P(A|X > 60) = P(X > 60|A)P(A)/P(X > 60) = P(X|A > 60)P(A)/P(X > 60) = [1 - P(X|A \le 60)]P(A)/P(X > 60) =$
$= (1 - \Phi(-1.5))\times(2/3)/(1 - 0.3758) = \Phi(1.5)\times(2/3)/0.6242 =$
$= 0.93319\times(2/3)/0.6242 \approx \underline{0.99668}$
c) Sejam:
XC_i – v.a. que representa o peso da criança i, $i = 1, 2, 3$; XC_i tem a mesma distribuição que $X|C$
XA_i – v.a. que representa o peso do adulto i, $i = 1, 2$; XA_i tem a mesma distribuição que $X|A$
T – v.a. que representa o peso total das 3 crianças e dos 2 adultos; $T = XC_1 + XC_2 + XC_3 + XA_1 + XA_2$
T é uma soma de v.a.'s Normais $\Rightarrow$ T tem distribuição Normal
$E(T) = E(XC_1 + XC_2 + XC_3 + XA_1 + XA_2) = E(XC_1) + E(XC_2) + E(XC_3) + E(XA_1) + E(XA_2) =$
$= 3\times E(X|C) + 2\times E(X|A) = 255$
Naturalmente, os pesos das crianças e dos adultos são todos independentes, pelo que:
$Var(T) =_{\text{v.a.'s indep.s}} 3\times Var(X|C) + 2\times Var(X|A) = 3\times 100 + 2\times 100 = 5\times 100 \Rightarrow \sigma_T = 10\sqrt{5}$
Assim, $T \cap \mathcal{N}(255, \sigma_T = 10\sqrt{5})$
As 3 crianças e os 2 adultos podem seguir juntos se o peso total dos 5 não ultrapassar a carga máxima do elevador, ou seja se $\{T \le 250\}$.
$P(T \le 250) = \Phi((250 - 255)/(10\sqrt{5})) = \Phi(-\sqrt{5}/10) = 1 - \Phi(\sqrt{5}/10) \approx 1 - \Phi(0.22) = \underline{0.41294}$

33. Para uma porção de rocha escolhida ao acaso na região, seja:
Seja C – v.a. que representa a quantidade de cobalto, em ppm, na porção de rocha; $C \cap \mathcal{N}(35, \sigma = 8)$
a) "A porção de rocha contém pelo menos 40ppm de cobalto" $\Leftrightarrow \{C \ge 40\}$
$P(C \ge 40) = 1 - P(C \le 40) = 1 - \Phi((40 - 35)/8) \approx 1 - \Phi(0.63) = 1 - 0.73565 = \underline{0.26435}$
b) Uma vez que as 10 porções de rocha são escolhidas ao acaso, vamos admitir que as quantidades de cobalto existentes nelas são independentes umas das outras (?!!...). Deste modo, considerando:
N_{10} – v.a. que representa o n.º de porções de rocha, em 10 escolhidas ao acaso, que contêm pelo menos 40ppm de cobalto,
N_{10} representa o n.º de vezes que ocorre "sucesso" (a porção de rocha contém pelo menos 40ppm de cobalto), cuja probabilidade é a determinada na alínea a), em 10 provas de Bernoulli, pelo que $N_{10} \cap Bi(10, 0.26435)$.
"Mais de 2 das 10 porções de rocha contêm pelo menos 40ppm de cobalto" $\Leftrightarrow \{N_{10} > 2\}$
$P(N_{10} > 2) = 1 - P(N_{10} \le 2) = 1 - 0.73565^{10} - 10\times 0.26435\times 0.73565^9 - C^{10}_2\, 0.26435^2\times 0.73565^8 \approx \underline{0.517}$
c) Seja N_{100} – v.a. que representa o número de porções de rocha, em 100 escolhidas ao acaso, que contêm pelo menos 40 ppm de cobalto;
Admitindo os mesmos pressupostos da alínea b), tem-se que $N_{100} \cap Bi(100, 0.26435)$.
Repare-se, desde já, que se está na presença de uma v.a. com distribuição Binomial associada a um <u>elevado n.º de provas de Bernoulli</u> (100) e com uma <u>probabilidade de sucesso relativamente reduzida</u> (0.26435). Tendo em conta que
$E(N_{100}) = 100\times 0.26435 = 26.435$ e que $Var(N_{100}) = 26.435\times 0.73565 \approx 19.4469$,

o Teorema Limite Central permite aproximar a f.d. da v.a. N_{100}, depois de centrada e reduzida, pela f.d. da distribuição Normal padrão ($\mathcal{N}(0, 1)$), i.e.,

$$P(N_{100} \leq x) \approx \Phi((x - 26.435)/\sqrt{19.4469}),$$

uma vez que N_{100} tem a mesma estrutura probabilística do que a soma de 100 v.a.'s i.i.d. (**i**ndependentes e **i**denticamente **d**istribuídas) com distribuição Bi(1, 0.15) (Ber(0.15)).

"No máximo 30 das 100 porções de rocha contêm pelo menos 40ppm de cobalto" $\Leftrightarrow$ $\{N_{100} \leq 30\}$

$P(N_{100} \leq 30) \approx_{TLC} \Phi((30 - 26.435)/\sqrt{19.4469}) \approx \Phi(0.81) = \underline{0.79103}$ (Probabilidade exacta: 0.82244)

34. Para um dia escolhido ao acaso, seja:

M – v.a. que representa o montante de depósitos à ordem efectuados no dia; $M \cap \mathcal{N}(120, \sigma = 8)$

a) Uma vez que a percentagem de dias em que ocorre um certo acontecimento é igual à probabilidade de, num dia escolhido ao acaso, o acontecimento ocorrer, pretende-se calcular a probabilidade de

"O montante de depósitos à ordem no dia situa-se entre 105u.m. e 135u.m." $\Leftrightarrow$ $\{105 < CM < 135\}$

$P(105 < M < 135) = \Phi((135 - 120)/8) - \Phi((105 - 120)/8) \approx \Phi(1.88) - \Phi(-1.88) = 2\,\Phi(1.88) - 1 =$
$= 2\times 0.96995 - 1 = 0.9399 \Rightarrow$ <u>94% dos dias</u>.

b) "O montante de depósitos à ordem é superior ao seu valor médio num dia em que esse montante é inferior a 125u.m." $\Leftrightarrow$ $\{M > 120 | M < 125\}$

$P(M > 120 | M < 125) = P(120 < M < 125)/P(M < 125) \approx [\Phi(0.63) - \Phi(0)]/\Phi(0.63) = 1 - 0.5/0.73565 \approx$
$\approx \underline{0.32033}$

c) Seja N_5 – v.a. que representa o n. de dias, em 5, em que o montante de depósitos à ordem é inferior a 125u.m..

Admitindo que os montantes depositados em dias distintos são independentes uns dos outros, N_5 representa o n.º de vezes que ocorre "sucesso" (o montante de depósitos à ordem num dia é inferior a 125u.m.) em 5 provas de Bernoulli.

P("sucesso") = $P(M < 125) \approx \Phi(0.63) = 0.73565$

Deste modo, $N_{10} \cap$ Bi(10, 0.73565).

"Em 2 dos 5 dias o montante de depósitos à ordem é inferior a 125u.m." $\Leftrightarrow$ $\{N_{10} = 2\}$

$P(N_{10} = 2) = C^5_2\, 0.73565^2 \times 0.26435^3 \approx \underline{0.1}$

d) Sejam:

M_i – v.a. que representa o montante de depósitos à ordem efectuados no dia i, $i = 1, \ldots, 60$;

T – v.a. que representa o montante de depósitos à ordem efectuados no total de 60 dias;

$T = \sum_{i=1}^{60} M_i$ é soma de v.a.'s Normais $\Rightarrow$ T tem distribuição Normal

$E(T) = 60\times E(M) = 60\times 120 = 7200$

Admitindo que os montantes de depósitos efectuados em dias distintos são independentes:

$Var(T) =_{\text{v.a.'s indep.s}} 60\times Var(M) = 60\times 64 \Rightarrow \sigma_T = 16\sqrt{15}$

Assim, $T \cap \mathcal{N}(7200, \sigma_T = 16\sqrt{15})$

"O montante de depósitos à ordem efectuados em 60 dias é superior a 7150" $\Leftrightarrow$ $\{T > 7150\}$

$P(T > 7150) = 1 - P(T \leq 7150) = 1 - \Phi((7150 - 7200)/(16\sqrt{15})) \approx 1 - \Phi(-0.81) = \Phi(0.81) = \underline{0.79103}$