Projeto B

Entrega até 5 de Junho

Movimento de um projétil com atrito (dissipativo) e Coriolis (não dissipativo)

$$\frac{du}{dt} = -fv + f'w - Du$$

$$\frac{dv}{dt} = fu - Dv$$

$$\frac{dw}{dt} = -g - f'u - Dw$$

$$\frac{dx}{dt} = u, \frac{dy}{dt} = v, \frac{dz}{dt} = w$$

$$D = \frac{c_D A \rho_F \frac{1}{2} |\vec{v}|}{\rho_R V}$$

Movimento de um projétil

Solução depende da posição inicial (x_0, y_0, z_0), da velocidade inicial (u_0, v_0, w_0) e de parâmetros $(\phi, c_D, g, \Omega, R)$.

Aula 18

Equações diferenciais independentes do tempo: problemas de condições fronteira (espacial)

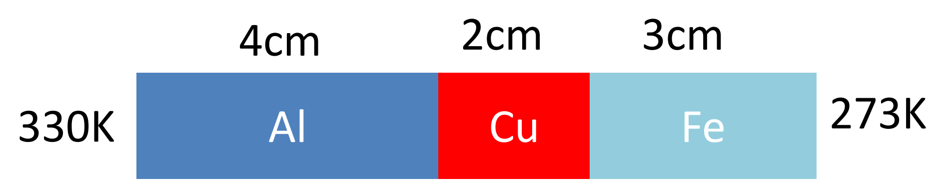
Calcular a distribuição de temperatura numa barra composta 1D

Metal	Condutividade $Wm^{-1}K^{-1}$
Aluminio	237
Cobre	401
Ferro	80

Admite-se que não existe fluxo lateral de calor.

Na direção longitudinal vale a lei de Fourier:

Fluxo de calor=$-k\,\frac{\partial T}{\partial x}$



Admite-se que a barra atingiu o equilíbrio térmico (T=const em cada ponto), logo Fluxo independente de x. Logo, em cada metal ($k = const$):

$$\frac{\partial T}{\partial x} = const$$

Isto é a temperatura varia linearmente, seguindo uma linha quebrada, com quebras nas transições entre materiais.

Discussão

A equação da condução de calor, de Fourier, é uma equação diferencial:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla.(-k\nabla T)$$

reduzindo-se, o caso estacionário, com condutividade constante, à Equação de Laplace:

$$\nabla^2 T = 0$$

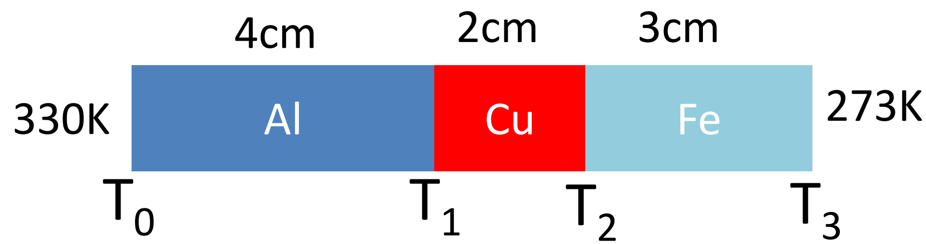
No caso unidimensional (com k variável):

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0$$

No caso em que k é constante por troços, obtém-se (de forma exata) um sistema de equações lineares algébricas.

O caso geral, em que é preciso resolver de forma aproximada, a equação diferencial, será tratado mais tarde.

Condução



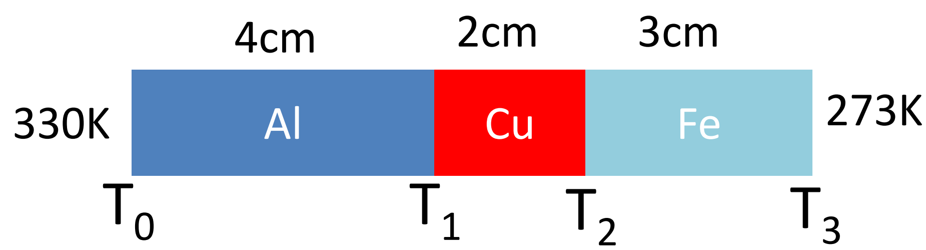
$$\color{red}{Fluxo\ de\ calor} = k_{Al}\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right) \equiv \color{blue}{k_{Al}\frac{T_0 - T_1}{x_1 - x_0}} = \color{red}{k_{Cu}\frac{T_1 - T_2}{x_2 - x_1}} = k_{Fe}\frac{T_2 - T_3}{x_3 - x_2}$$

$$= \color{red}{const}$$

Sistema de equações lineares algébricas:

$$\begin{cases} -\dfrac{k_{Al}}{x_1 - x_0}T_1 - \dfrac{k_{Cu}}{x_2 - x_1}T_1 + \dfrac{k_{Cu}}{x_2 - x_1}T_2 = -\dfrac{k_{Al}}{x_1 - x_0}T_0 \\ \dfrac{k_{Cu}}{x_2 - x_1}T_1 - \dfrac{k_{Cu}}{x_2 - x_1}T_2 - \dfrac{k_{Fe}}{x_3 - x_2}T_2 = -\dfrac{k_{Fe}}{x_3 - x_2}T_3 \end{cases}$$

Forma matricial



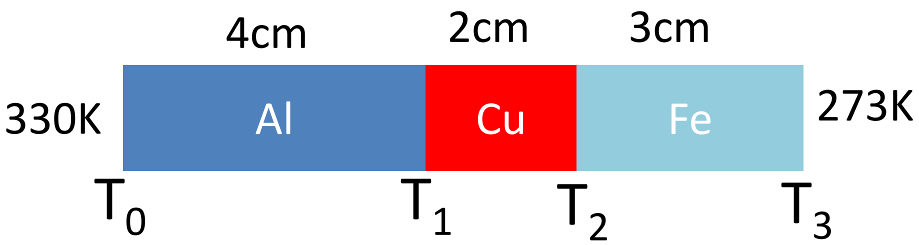
$$\begin{cases} -\dfrac{k_{Al}}{x_1 - x_0} T_1 - \dfrac{k_{Cu}}{x_2 - x_1} T_1 + \dfrac{k_{Cu}}{x_2 - x_1} T_2 = -\dfrac{k_{Al}}{x_1 - x_0} T_0 \\ \dfrac{k_{Cu}}{x_2 - x_1} T_1 - \dfrac{k_{Cu}}{x_2 - x_1} T_2 - \dfrac{k_{Fe}}{x_3 - x_2} T_2 = -\dfrac{k_{Fe}}{x_3 - x_2} T_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{k_{Al}}{x_1 - x_0} - \dfrac{k_{Cu}}{x_2 - x_1} & \dfrac{k_{Cu}}{x_2 - x_1} \\ \dfrac{k_{Cu}}{x_2 - x_1} & -\dfrac{k_{Cu}}{x_2 - x_1} - \dfrac{k_{Fe}}{x_3 - x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {\color{red}T_1} \\ {\color{red}T_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{k_{Al}}{x_1 - x_0} T_0 \\ -\dfrac{k_{Fe}}{x_3 - x_2} T_3 \end{bmatrix}$$

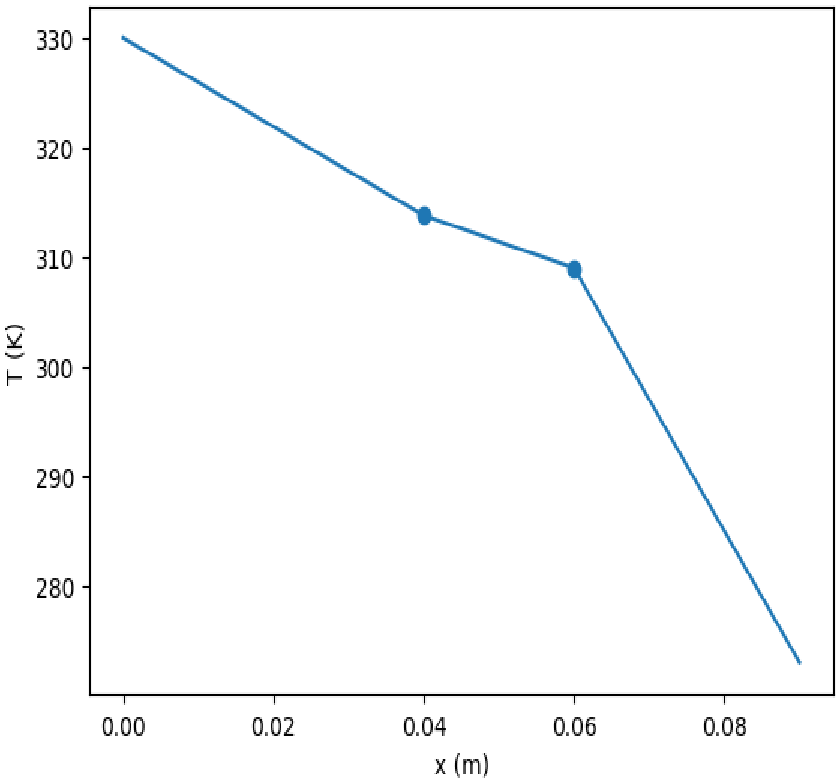
Equilíbrio térmico numa barra

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
kAl=237;kCu=401;kFe=80;T0=330;T3=273
x0=0;x1=0.04;x2=0.06;x3=0.09
A=np.array([[-kAl/(x1-x0)-kCu/(x2-x1),kCu/(x2-x1)],\
    [kCu/(x2-x1),-kCu/(x2-x1)-kFe/(x3-x2)]],dtype=float)
b=np.array([-kAl/(x1-x0)*T0,-kFe/\
    (x3-x2)*T3],dtype=float)
T=np.linalg.solve(A,b)
print('T=',T)
plt.plot([x0,x1,x2,x3],[T0,T[0],T[1],T3])
plt.scatter([x1,x2],T)
plt.xlabel('x (m)')
plt.ylabel('T (K)')
```

Solução

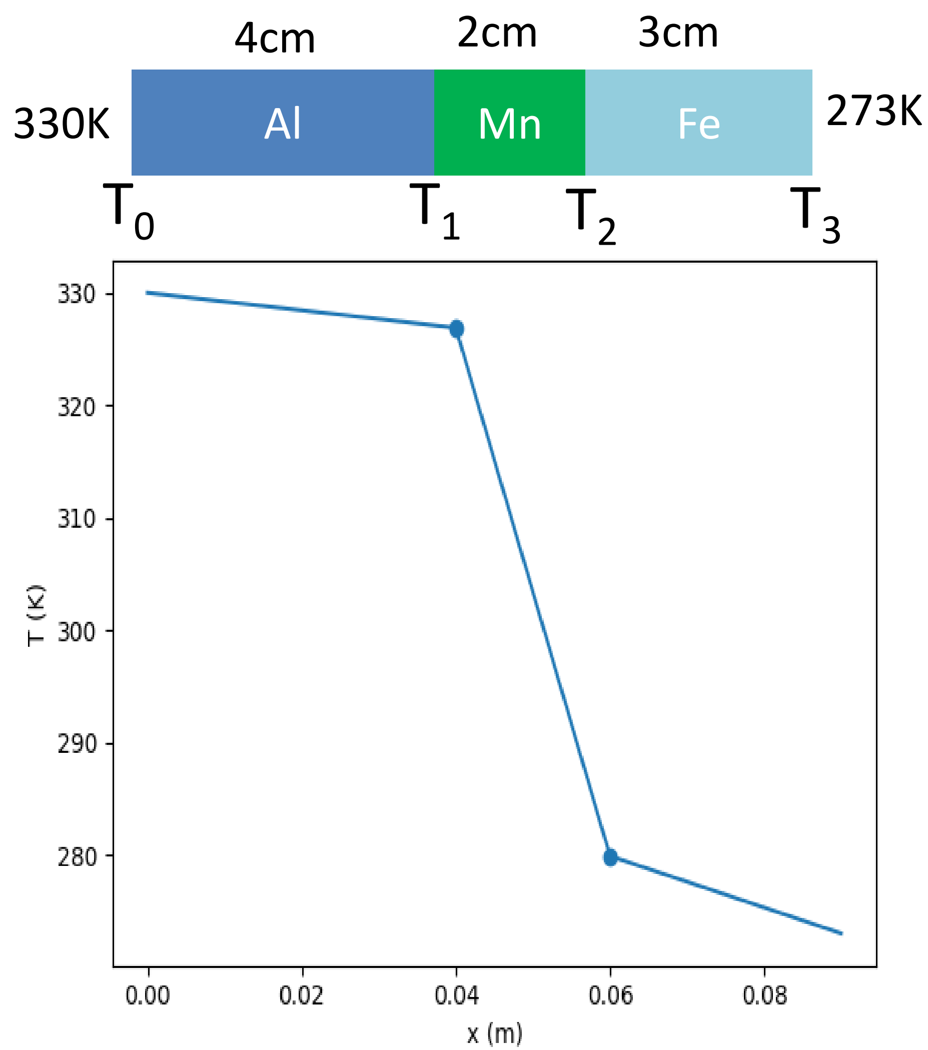


Metal	Condutividade $Wm^{-1}K^{-1}$
Aluminio	237
Cobre	401
Ferro	80



Solução 2

Metal	Condutividade $Wm^{-1}K^{-1}$
Aluminio	237
Manganésio	7.81
Ferro	80



Se a barra for constituída por n segmentos

$$\begin{bmatrix} -\frac{k_1}{\Delta x_1}-\frac{k_2}{\Delta x_2} & \frac{k_2}{\Delta x_2} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{\Delta x_2} & -\frac{k_2}{\Delta x_2}-\frac{k_3}{\Delta x_3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{k_{n-2}}{\Delta x_{n-2}}-\frac{k_{n-1}}{\Delta x_{n-1}} & \frac{k_{n-1}}{\Delta x_{n-1}} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{k_{n-1}}{\Delta x_{n-1}} & -\frac{k_{n-1}}{\Delta x_{n-1}}-\frac{k_n}{\Delta x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_{n-2} \\ T_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{\Delta x_1}T_0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -\frac{k_n}{\Delta x_n}T_n \end{bmatrix}$$

Trata-se de um sistema triadiagonal, cuja solução são as temperaturas nas interfaces $[T_1, \dots, T_{n-1}]$, dadas as temperaturas na fronteira $[T_0, T_n]$ e as condutividades $[k_1, \dots, k_n]$, com:

$$\Delta x_m = x_m - x_{m-1}$$

Lei de Fourier da condução em 3 dimensoões

Num meio conductor, o fluxo de calor $\left(Wm^{-2}\right)$ é proporcional ao gradiente de temperatura, transportando calor em direção às regiões mais frias:

$$\vec{q} = -\chi \nabla T = -\chi \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \right)$$

χ $\left(Wm^{-1}K^{-1}\right)$ é a condutividade térmica do meio, depende da sua composição e da temperatura.

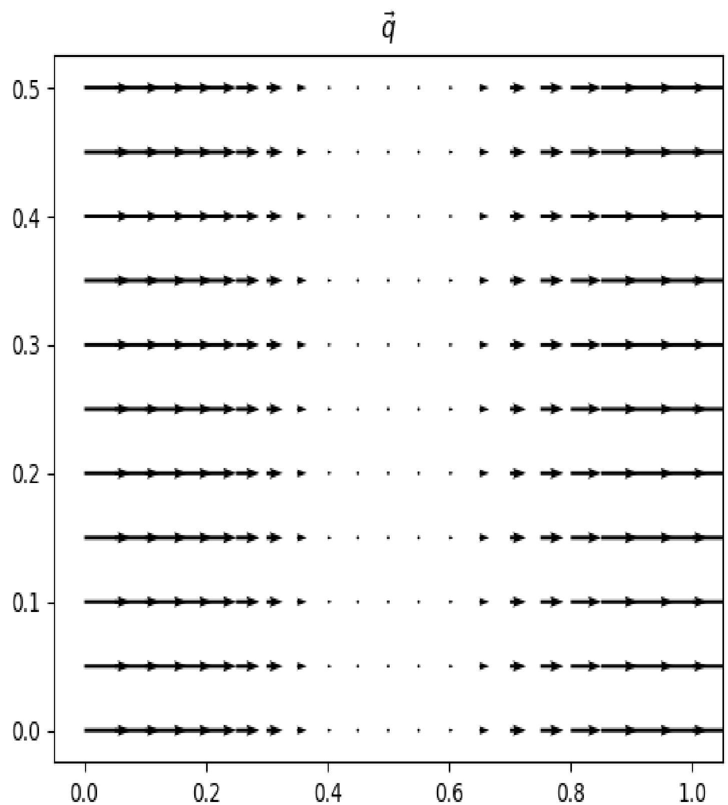
A taxa de variação da temperatura num ponto depende da distribuição do fluxo de calor:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (-\chi \nabla T)$$

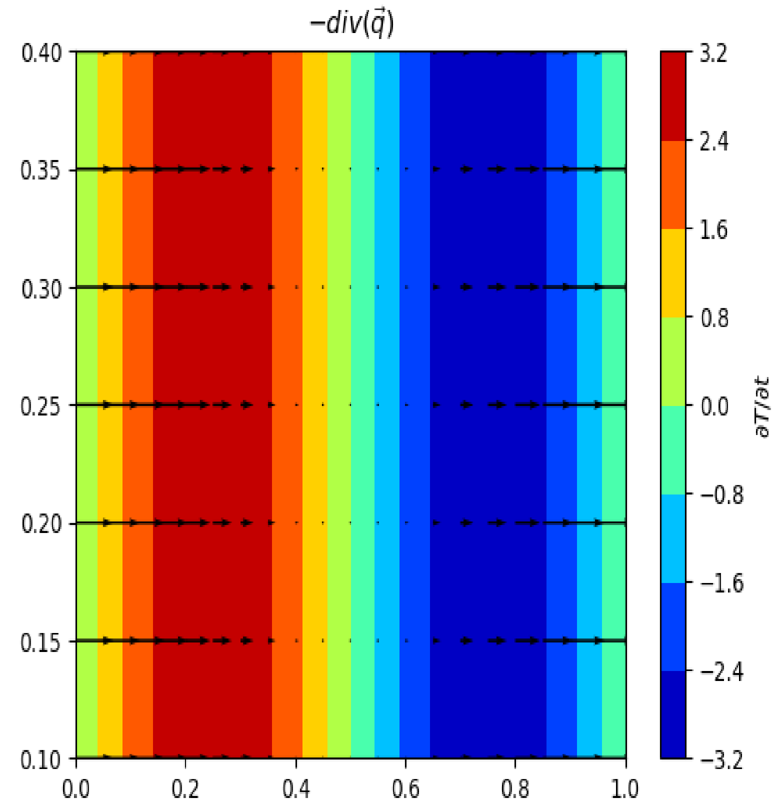
ρ é a densidade, c_p é o calor específico do meio.

$$-\nabla \cdot (-\chi \nabla T) = -\nabla \cdot (\vec{q}) = -\text{div}\,\vec{q}$$

Fluxo de calor



Taxa de aquecimento



Zona de convergência

Zona de divergência

Na presença de fontes internas de calor…

Incluindo fontes internas de calor (reações químicas, decaimento radioativo, ou outras) dadas por $\dot{q}_V$ $\left(Wm^{-3}\right)$, obtém-se a forma mais geral da lei de Fourier:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (-\chi \nabla T) + \dot{q}_V$$

Em equilíbrio $T = const$, tem-se:

$$-\nabla \cdot (-\chi \nabla T) + \dot{q}_V = 0$$

No caso $\chi = const$ (material homogéneo, com pouco gradiente de temperatura), fica a equação de Poisson:

$$\nabla^2 T = -\frac{1}{\chi}\,\dot{q}_V$$

Na ausência de fontes internas, temos a equação de Laplace:

$$\nabla^2 T = 0$$

Equação de Poisson da electrostática

o potencial gerado por uma distribuição contínua de carga elétrica numa placa satisfaz à equação:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

em que V é o potencial elétrico, $\rho(x, y)$ a densidade volúmica de carga e ε_0 a permitividade elétrica do meio.

Em três dimensões, seria:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Equação de Poisson

Eq. Poisson da electrostática:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Eq. de Fourier da condução de calor em meio homogéneo:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{1}{\chi}\ \dot{q}_V$$

Forma geral:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = f(x, y, z)$$

Caso particular (equação de Laplace): $f(x, y, z)$=0

Problemas de condição fronteira

A equação de Poisson não pode ser resolvida progressivamente a partir de um ponto, como fizemos com as trajetórias. A solução é sempre global.

Vamos considerar o caso 2D. Na forma discreta, a equação pode escrever-se, usando diferenças finitas centradas:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \approx \dfrac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{\Delta x^2} \\ \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \approx \dfrac{\phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1}}{\Delta y^2} \end{cases}$$

Onde:

$$\begin{cases} \phi_{i,j} = \phi(x_i, y_j) \\ x_i = (i-1)\Delta x; i = 0, \dots, M-1 \\ y_j = (j-1)\Delta y; j = 0, \dots, N-1 \end{cases}$$

Diferenças centradas

A diferença finita centrada, constitui uma aproximação de segunda ordem, i.e.:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \approx \frac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{\Delta x^2} + E\left(\Delta x^2\right)$$

Resultando da soma das duas séries de Taylor:

$$\phi(x + \Delta x) = \phi(x) + \frac{d\phi}{dx}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2\phi}{dx^2}\Delta x^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3\phi}{dx^3}\Delta x^3 + \cdots$$

$$\phi(x - \Delta x) = \phi(x) - \frac{d\phi}{dx}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2\phi}{dx^2}\Delta x^2 - \frac{1}{3!}\frac{d^3\phi}{dx^3}\Delta x^3 + \cdots$$

$$\phi(x + \Delta x) + \phi(x - \Delta x) = 2\phi(x) + \frac{d^2\phi}{dx^2}\Delta x^2 + \frac{2}{4!}\frac{d^4\phi}{dx^4}\Delta x^4 + \cdots$$

etc.

Equação de Poisson discreta, em diferenças centradas

Se for $\Delta x = \Delta y = \Delta$, fica

$$\phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i.j+1} - 4\phi_{i,j} = \Delta^2 f_{i,j}$$

$$\{i = 1, \dots, M-2; j = 1, \dots, N-2\}$$

onde se notou que as diferenças centradas só se podem calcular nos pontos interiores do domínio. Na fronteira, os valores $(i = 0, M-1; j = 0, N-1)$, têm que ser impostos.

A solução depende da fronteira!

Método da relaxação

A solução satisfaz:

$$\phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i.j+1} - 4\phi_{i,j} = \Delta^2 f_{i,j}$$

Começamos por aribtrar uma distribuição para ϕ, por exemplo $\phi = 0$, e vamos melhorar essa estimativa, de forma iterativa:

Dada uma estimativa do campo ϕ, na iteração n existe um erro (resíduo R):

$$\phi^n_{i-1,j} + \phi^n_{i+1,j} + \phi^n_{i,j-1} + \phi^n_{i,j+1} - 4\phi^n_{i,j} - \Delta^2 f_{i,j} = R_{i,j}$$

Se se corrigir:

$$\phi^{n+1}_{i,j} = \phi^n_{i,j} + \frac{R_{i,j}}{4}$$

O erro será anulado (mas só nesse ponto!)

Sobre-relaxação simultânea

Só se mantém um array de ϕ. Faz-se:

$$\phi_{i,j} = \phi_{i,j} + \beta \frac{R_{i,j}}{4}$$

i.e., à medida que se altera um ponto de grelha o novo valor já é utilizado no cálculo do resíduo dos pontos adjacentes.

$$1 \leq \beta < 2$$

β é o parâmetro de sobre-relaxação. Pode mostrar-se que o método converge mais rapidamente com:

$$\beta_{opt} = 2 - \pi\sqrt{2}\left(\frac{1}{M^2} + \frac{1}{N^2}\right)^{1/2}$$