

UNIVERSIDADE DE LISBOA - FCUL
FÍSICA DOS MEIOS CONTÍNUOS

Problemas - Série 4
Navier-Stokes

1. a) Mostre que para um fluido incompressível a equação de Navier-Stokes

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p^* - \eta \nabla \times \Omega$$

se pode escrever

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p^* + \eta \nabla^2 \mathbf{u}.$$

- b) Mostre que um tensor de ordem dois se pode escrever

$$T_{ij} = \frac{1}{3} \delta_{ij} T_{mm} + \frac{1}{2} \left(T_{ij} + T_{ji} - \frac{2}{3} \delta_{ij} T_{mm} \right) + \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji}),$$

onde o primeiro tensor é isotrópico, o segundo é simétrico e o terceiro anti-simétrico. Escreva os tensores das tensões e das taxas de deformação nesta forma e discuta o significado físico de cada um deles.

2. Considere um plano com inclinação α com a horizontal, onde temos uma camada de fluido de espessura d . O fluido, de viscosidade η , tem uma superfície livre e está sujeito a um campo gravitacional g .
- a) Calcule a velocidade em função da distância da placa e a taxa de escoamento para uma espessura constante e uniforme d .
- b) Discuta as aproximações necessárias para que se possa considerar o escoamento na vertical estacionário.
3. Considere um escoamento viscoso na vertical, num tubo de seção transversal circular com $r = a$, sob a ação da gravidade.
- a) Calcule o campo de velocidades.
- b) Calcule a taxa de escoamento no tubo.
- c) Calcule o raio necessário para o escoamento deixar de ser laminar, supondo que a viscosidade cinemática é $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.
4. Um filme de óleo flui, por ação da gravidade, na região anular entre dois cilindros concêntricos. Considere a espessura do canal de escoamento δ , o raio do cilindro interior a , a densidade do fluido ρ , a viscosidade do fluido η , e a aceleração da gravidade g .
- a) Escreva a equação de Navier-Stokes para o escoamento. Mostre que a equação de Navier-Stokes é equivalente ao balanço de forças num volume infinitesimal de fluido $dV = 2\pi r dr dx$.
- b) Considere o óleo newtoniano e use as condições de fronteira para obter o perfil de velocidades, no regime estacionário.
- c) Calcule e represente a tensão de corte, no domínio de escoamento, e determine as regiões do canal onde a tensão é máxima.

- d) Determine os perfis de velocidade na presença de gradientes de pressão não nulos, na direção de g , e o valor desse gradiente para o qual o escoamento cessa. Comente.
- e) Calcule o gradiente de pressão necessário para que a água escoe num canal com $\delta = 10\text{cm}$ (viscosidade $1\text{mPa}\cdot\text{s}$) com velocidade média igual a 1m/s , na presença e na ausência da gravidade. Suponha $a = 100\text{cm}$.
5. Considere um catéter de raio εR colocado concentricamente num vaso sanguíneo de raio R . Determine a redução na taxa de escoamento do sangue. Suponha o escoamento estacionário e a mesma queda de pressão com e sem catéter. Trate o sangue como um fluido Newtoniano.
6. Um filme de óleo flui, por ação da gravidade, num canal de placas paralelas. Considere a espessura do canal de escoamento δ , a densidade do fluido ρ , a viscosidade do fluido η , e a aceleração da gravidade g .
- a) Escreva a equação de Navier-Stokes e a partir daí, ou de outra forma, deduza a equação para o balanço das forças no canal.
- b) Considere o óleo newtoniano e use as condições de fronteira para obter o perfil de velocidades, no regime estacionário.
- c) Calcule e represente a tensão de corte, no domínio de escoamento, e determine as regiões do canal onde a tensão é máxima.
- d) Determine os perfis de velocidade na presença de gradientes de pressão não nulos, na direção de g , e o valor desse gradiente para o qual o escoamento cessa. Comente.
- e) Suponha agora que o óleo escoar por uma parede vertical plana. Considere a espessura da camada de óleo constante e igual a δ . Qual é a tensão de corte na extremidade livre da camada de óleo? Calcule o perfil de velocidades do óleo.
7. Considere um catéter de raio R_c numa artéria de raio R . O catéter move-se com velocidade constante V . O sangue escoar através da região anular entre R_c e R , sob um gradiente de pressão $\Delta p/L$, a qual varia apenas na direção do escoamento. Pretende-se determinar o efeito do catéter na tensão de corte em $r = R$. Suponha que o escoamento é estacionário e que o fluido é newtoniano.
- a) Escreva as condições para o balanço das forças a partir da equação de Navier-Stokes e as condições de fronteira.
- b) Desenhe o perfil de velocidades e dê uma justificação para a sua forma.
- c) Resolva as equações de balanço. Substitua a lei de Newton da viscosidade e resolva as equações resultantes. Aplique as condições de fronteira para determinar o perfil de velocidades.
- d) Calcule a tensão de corte.
- e) Use os dados $R = 0.17\text{ cm}$, $R_c = 0.15\text{ cm}$, $V = 10\text{cm/s}$, $\mu = 0.03\text{ g/cm}\cdot\text{s}$, $\Delta p/L = 100\text{ dyn/cm}^3$, para calcular a tensão de corte na superfície da artéria.
8. Um tipo de viscosímetro envolve a rotação de um cilindro de raio R e comprimento L com velocidade ω constante, num volume de líquido. O cilindro é comprido, $L \gg R$. Longe da superfície do cilindro o fluido está em repouso e a pressão é constante (fluido infinito).
- a) Escreva a equação de Navier-Stokes para o escoamento. Mostre que a equação de Navier-Stokes é equivalente ao balanço de forças num volume infinitesimal de fluido.
- b) Desenhe o perfil de velocidades para um fluido Newtoniano.
- c) Determine o perfil de velocidades $v_\theta(r)$. Explícite as condições de fronteira.
- d) Calcule o torque exercido no cilindro pelo fluido.

e) Descreva como este aparelho pode ser usado para determinar a viscosidade de um fluido Newtoniano.

9. Um fluido de Bingham flui por acção da gravidade, entre duas placas paralelas (infinitas) separadas por uma distância $2b$. Suponha que o escoamento é laminar e estacionário. Considere um fluido com densidade ρ , viscosidade η , e tensão de cedência τ_0 , num campo gravítico com aceleração g . O módulo da tensão aumenta linearmente com o módulo da taxa de deformação, i.e. a equação constitutiva é $|\tau| = \tau_0 + \eta \left| \frac{du}{dy} \right|$. Note que para tensões inferiores à tensão de cedência, o fluido comporta-se como um corpo rígido e flui com velocidade constante.

a) Escreva a equação para o balanço das forças na região onde o escoamento é não newtoniano.

b) Calcule a distância a , medida a partir do centro do canal, que delimita a zona de escoamento com velocidade constante.

c) Escreva a equação para o balanço de forças na região $a \leq y \leq b$.

d) Mostre que a mesma equação de balanço se pode obter a partir da equação de Navier-Stokes.

e) Obtenha o perfil de velocidades, usando a condição de fronteira para a velocidade em $y = b$, e a de continuidade para a tensão de corte em $y = a$.

f) Calcule e represente a tensão de corte, no domínio de escoamento $0 \leq y \leq b$, e determine a região onde a tensão é máxima.

10. a) Calcule a velocidade $u(y)$ num escoamento viscoso, entre duas placas paralelas estacionárias em $y = 0$ e $y = L$, onde o fluido, de viscosidade cinemática $\nu = \eta/\rho$, escoa na direção x devido a uma força (e.g., gravidade) $\mathbf{f} = f\hat{\mathbf{x}}$. b) Compare a solução analítica com a obtida numericamente usando o código fornecido (code3-Poiseuille.py) para os mesmos parâmetros.

11. Considere um conjunto de vórtices de Taylor-Green em 2D cujos campos de velocidades e pressão são dados inicialmente por:

$$u(x, y, t = 0) = -\cos(kx) \sin(ky)$$

$$v(x, y, t = 0) = \sin(kx) \cos(ky)$$

a) Use a equação de Navier-Stokes para mostrar que a evolução temporal dos campos é

$$u(x, y, t) = -\cos(kx) \sin(ky) e^{-2\nu k^2 t}$$

$$v(x, y, t) = \sin(kx) \cos(ky) e^{-2\nu k^2 t}$$

As variações de pressão podem ser ignoradas e as forças inerciais são desprezáveis comparadas com as forças viscosas.

b) Calcule a energia cinética média por unidade de área. Como podemos esta quantidade para medir a viscosidade de um fluido?

c) Introduza estas condições iniciais num dos códigos fornecidos e verifique que a viscosidade medida através da energia cinética média corresponde à viscosidade do fluido.

12. a) Verifique que no caso de um escoamento $\mathbf{u} = [u(y), 0, 0]$, a tensão se reduz a

$$\mathbf{t} = \left[\eta \frac{du}{dy}, -p, 0 \right]$$

no plano $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$. b) Mostre que os termos $\eta(\partial u_j / \partial x_i + \partial u_i / \partial x_j)$ do tensor das tensões são nulos para um escoamento uniformemente circular $\mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}$, onde $\boldsymbol{\Omega}$ é um vetor constante.

13. a) Usando $t_i = T_{ij}n_j$ e $T_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$, obtemos $t_i = -pn_i + \eta n_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, onde t_i é a componente i da tensão no elemento de superfície com normal n_i . Mostre que

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{n} + \eta[2(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u})].$$

- b) Use o resultado da alínea “a” e as identidades matemáticas necessárias para mostrar que a força resultante exercida num volume de fluido, pelo fluido circundante é

$$\int_S \mathbf{t} dS = \int_V (-\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u}) dV,$$

onde S é a superfície do volume de fluido. Deduza que se o volume for pequeno, a força resultante, excluindo a gravidade é $-\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u}$ por unidade de volume, de acordo com a equação de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis.

14. Mostre que a dissipação viscosa num fluido Newtoniano em escoamento se escreve (ver Sec. 6.5 do Faber):

$$\frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2.$$

Os códigos necessários para resolver os exercícios estão disponíveis em: <https://github.com/rcvcoelho/lbm-python.git>.