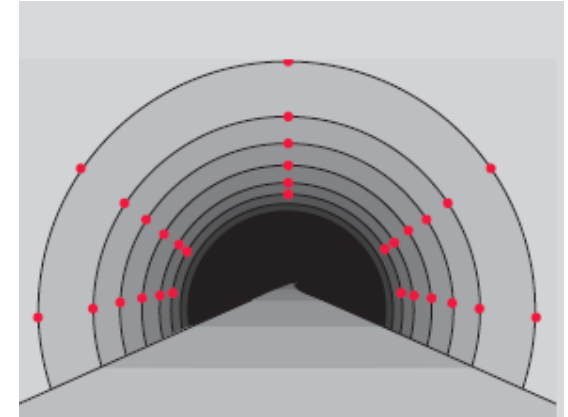
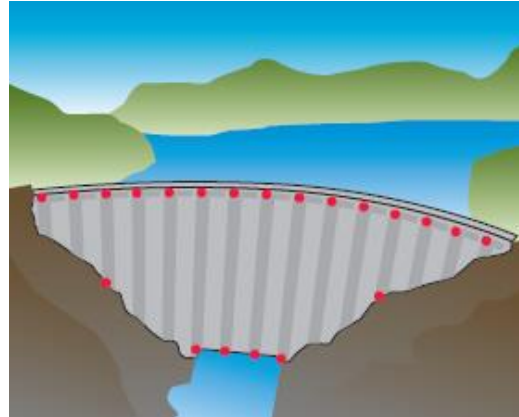
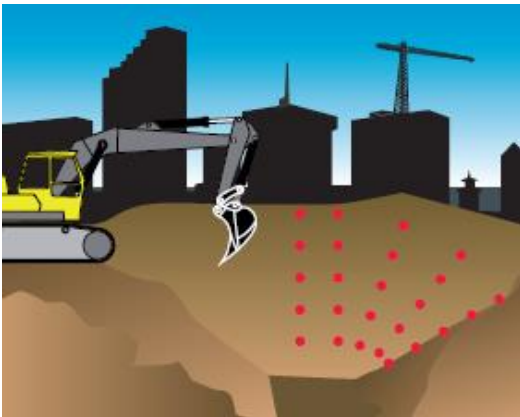
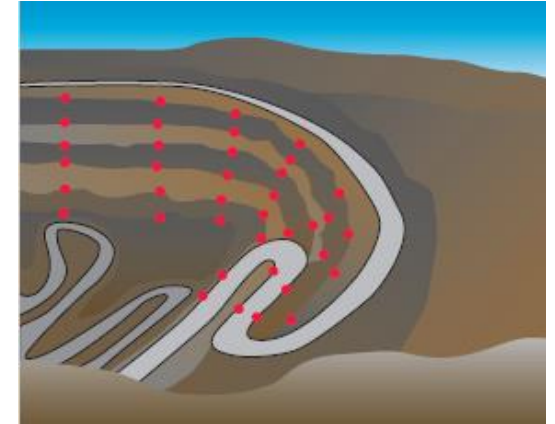


## Topografia Aplicada – monitorização

Designa-se por **estrutura** de uma construção a parte dessa construção cuja função é **assegurar**, ao longo do tempo de vida da obra, a sua **resistência** em boas condições de estabilidade **aos esforços** a que está submetida.



Estes **esforços** podem corresponder a solicitações **permanentes** (aquelas que actuam de forma ininterrupta, como o peso próprio das estruturas) ou **acidentais**, podendo estas últimas ser **habituais** (o peso das pessoas, veículos, equipamento não fixo, efeitos de frenagem, força centrífuga, acção do vento habitual, acção da neve, variações de temperatura, forças devidas à retracção, fluência e relaxação dos materiais, forças devidas a assentamento dos apoios, atritos e resistências em aparelhos de apoio, impulsos de terras ou de outros materiais e forças hidrostáticas e hidrodinâmicas) ou **excepcionais** (ventos excepcionais, sismos).

# Topografia Aplicada – monitorização



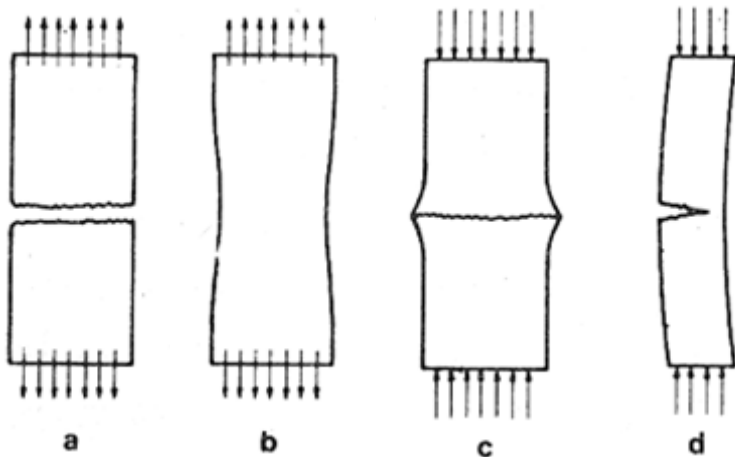
Para se compreender o modo de actuar das estruturas é conveniente considerar as diferentes formas como os seus elementos podem ser solicitados.

Considerando uma **peça paralelepédica** submetida a um conjunto de **cargas axiais de tracção e compressão**, **a rotura** da peça ocorre quando em qualquer secção for ultrapassada a **capacidade resistente do material**.

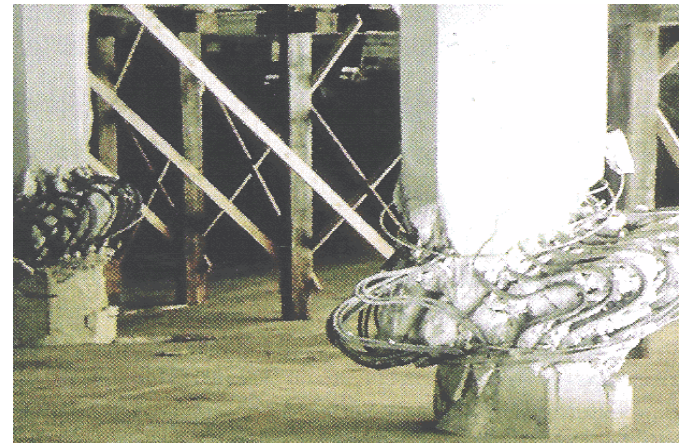
A capacidade resistente de um dado material pode corresponder a cargas semelhantes quando actuam forças de compressão ou de tracção (aço) ou a cargas diferentes (madeira, betão); por exemplo no caso do betão, a resistência à tracção é cerca de 1/10 da resistência à compressão, o que deu origem à criação de estruturas em betão armado.

A figura ilustra várias possibilidades de **rotura**:

- corresponde a uma forma de **rotura à tracção típica de materiais frágeis** como por exemplo o betão.
- corresponde à **rotura por tracção de materiais ductéis** como por exemplo o aço.
- exemplifica um caso de **rotura por compressão em consequência de esmagamento**
- representa um fenómeno de encurvadura ou deformação transversal



Formas de rotura à tracção e à compressão



Danos graves com encurvadura das armaduras dos pilares de um viaduto



Para cada material definem-se **tensões de rotura** à tracção,  $\sigma_t$ , e à compressão,  $\sigma_c$ , que representam o menor valor da força (de tracção ou compressão) por unidade de área da secção transversal (perpendicular à direcção da força) capaz de provocar a rotura.

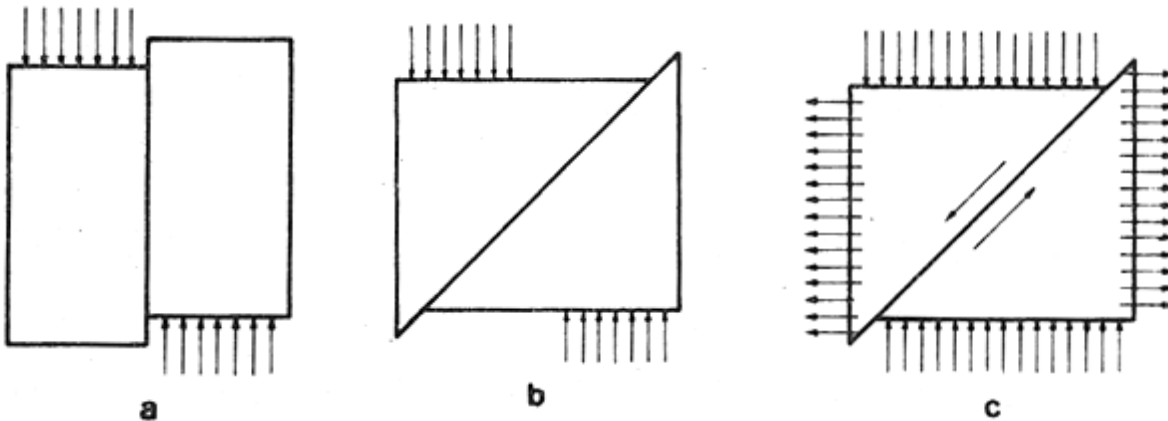
Se  $S$  for a área da secção transversal, as forças capazes de provocar a rotura por tracção ou compressão são  $F_t = \sigma_t S$  e  $F_c = \sigma_c S$ , respectivamente.

Para haver uma garantia que **não ocorra rotura** (e para impedir que os elementos da estrutura fiquem sujeitos a deformações plásticas, não recuperáveis quando cessa a actuação das forças), define-se um **coeficiente de segurança**  $n_t$  e  $n_c$ , em geral próximo de três, tal que  $n_t = \sigma_t / \sigma_{st}$  e  $n_c = \sigma_c / \sigma_{sc}$ , onde os índices  $st$  e  $sc$  representam a tensão de segurança à rotura por tracção ou tensão de segurança à rotura por compressão, respectivamente.

Assim, as forças máximas que a estrutura pode estar submetida quando solicitada à tracção ou à compressão são dadas por  $F_t = \sigma_{st} S$  e  $F_c = \sigma_{sc} S$ .

## Topografia Aplicada – monitorização

Considere-se agora um cubo solicitado da forma indicada na figura, correspondente à situação de  **corte**, que tende a provocar tensões máximas de tracção e compressão segundo facetas a  $45^\circ$  com a direcção das cargas.



Formas de rotura ao corte

a) se o material for homogéneo e com características resistentes semelhantes à tracção e à compressão, a linha de **rotura poderá ser paralela à direcção das forças**; sendo  $\tau$  e  $\tau_s$  a tensão de rotura e a tensão de segurança ao corte,  $n$  o coeficiente de segurança ao corte e  $S$  a área da secção do elemento paralela à direcção do esforço, tem-se  $F = \tau/n$ ,  $S = \tau_s S$ .

b) o mesmo tipo de solicitações actuando sobre um material que tenha fraca resistência à tracção provocará uma **rotura por fendilhação na direcção mais traccionada, a  $45^\circ$  com a direcção do esforço**;

c) verifica-se uma situação análoga para um material homogéneo solicitado na situação em que as forças de tracção são iguais às de compressão.



A **pedra** resiste bem à **compressão** e à **tracção** (quando utilizada em alvenaria apenas resiste bem à compressão).

As estruturas em **aço** são formadas por elementos metálicos (chapas ou perfis laminados com secção transversal em L ou I reduzida, o que é possível por as resistências do aço à **compressão**, à **tracção** e ao **corte** serem praticamente iguais) ligados entre si por rebites, parafusos ou soldadura.

O **betão**, um dos materiais mais utilizados em construção civil, é formado por uma mistura de cimento, pedra, areia e água em proporções adequadas.

Na altura em que é fabricado, o betão é fluído e pode ser lançado num molde; depois de compactado, endurece, adquirindo excelente capacidade de resistência à **compressão**, embora tenha uma capacidade à **tracção** reduzida.

Se no interior do molde existirem alguns varões de aço, os esforços de **tracção** são suportados pelos varões, enquanto que o betão resiste às compressões - **betão armado**, que beneficia das características próprias do aço e do betão.

Pode também utilizar-se o **betão pré-esforçado** que pretende tirar partido dos aços de alta resistência sem provocar a fissuração do betão: sujeita-se a armadura a uma tracção (pré-esforço) e depois torna-se a armadura solidária com o betão, tendendo a viga a flectir para cima; quando a viga for sujeita a uma carga, a deformação tende a anular a flecha introduzida pelo pré-esforço.

Existem alguns **elementos estruturais** comuns à maioria das estruturas; um dos mais importantes é o **pilar**, cuja missão é receber as cargas transmitidas pelos diferentes elementos da construção que sobre ele se apoiam e transmiti-las, por sua vez, a outros elementos da estrutura ou directamente ao terreno em que a construção assenta através das fundações.

## Topografia Aplicada – monitorização

Antigamente os pilares eram de madeira ou de pedra mas actualmente são correntes os **pilares de betão** de secção rectangular, quadrada ou circular e os **pilares metálicos**. Os pilares podem ser solicitados apenas à compressão por intermédio de forças verticais ou estar sujeitos a forças horizontais que os solicitam à flexão, quase sempre devido a sismos.



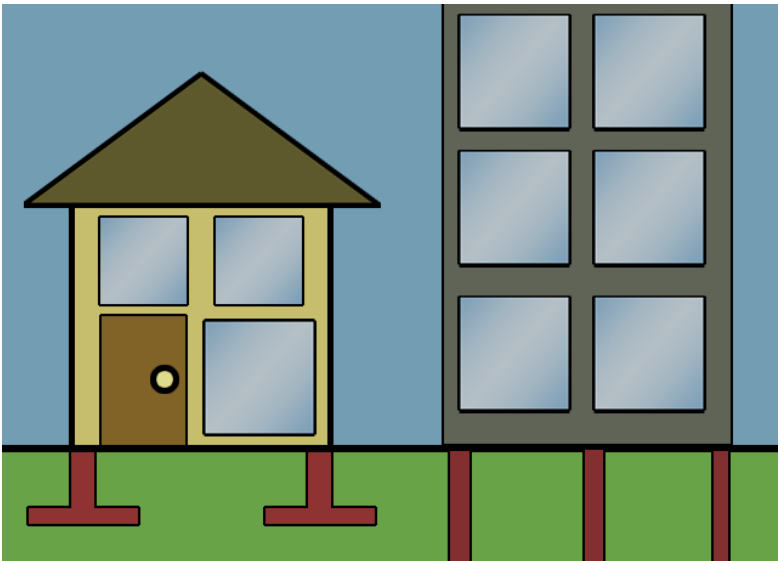
As **paredes** podem ter funções resistentes similares às dos pilares, embora modernamente as paredes não tenham funções resistentes aos esforços verticais, destinando-se a fechar espaços vazios das estruturas.

Um tipo diferente de paredes são os **muros de suporte** que se destinam, fundamentalmente, a suportar cargas horizontais perpendiculares aos muros, transmitidas nos casos mais correntes pela terra ou pela água que esses muros retêm.



## Topografia Aplicada – monitorização

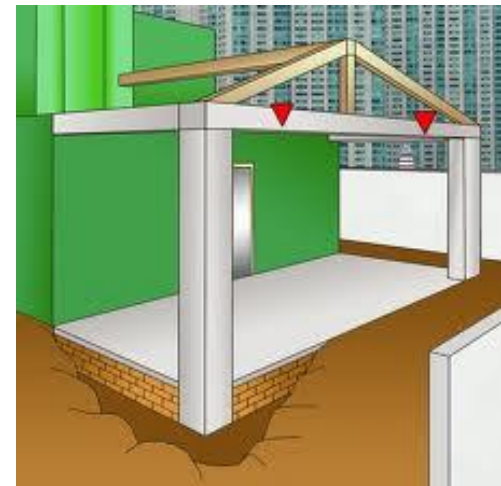
Estreitamente relacionadas com os pilares e as paredes estão as **fundações**, que são a parte da estrutura através das quais se transmitem ao terreno as forças que actuam sobre ela. Um exemplo é dado pelas sapatas, maciços destinados a transmitir ao terreno a carga recebida de um pilar.





## Topografia Aplicada – monitorização

Uma **viga** é um elemento normalmente horizontal em que as cargas actuam em regra perpendicularmente ao eixo longitudinal, provocando esforços de flexão, podendo ser construída em betão armado ou metal. As vigas, em vez de serem apenas apoiadas nas extremidades, podem ter diversos apoios intermédios, designando-se então por vigas contínuas. Podem também estar apenas fixas numa extremidade, designando-se assim vigas em consola. Uma estrutura do tipo da viga mas mais larga designa-se por **lage**, normalmente rectangular, apoiada em vigas, assentes por sua vez em pilares.



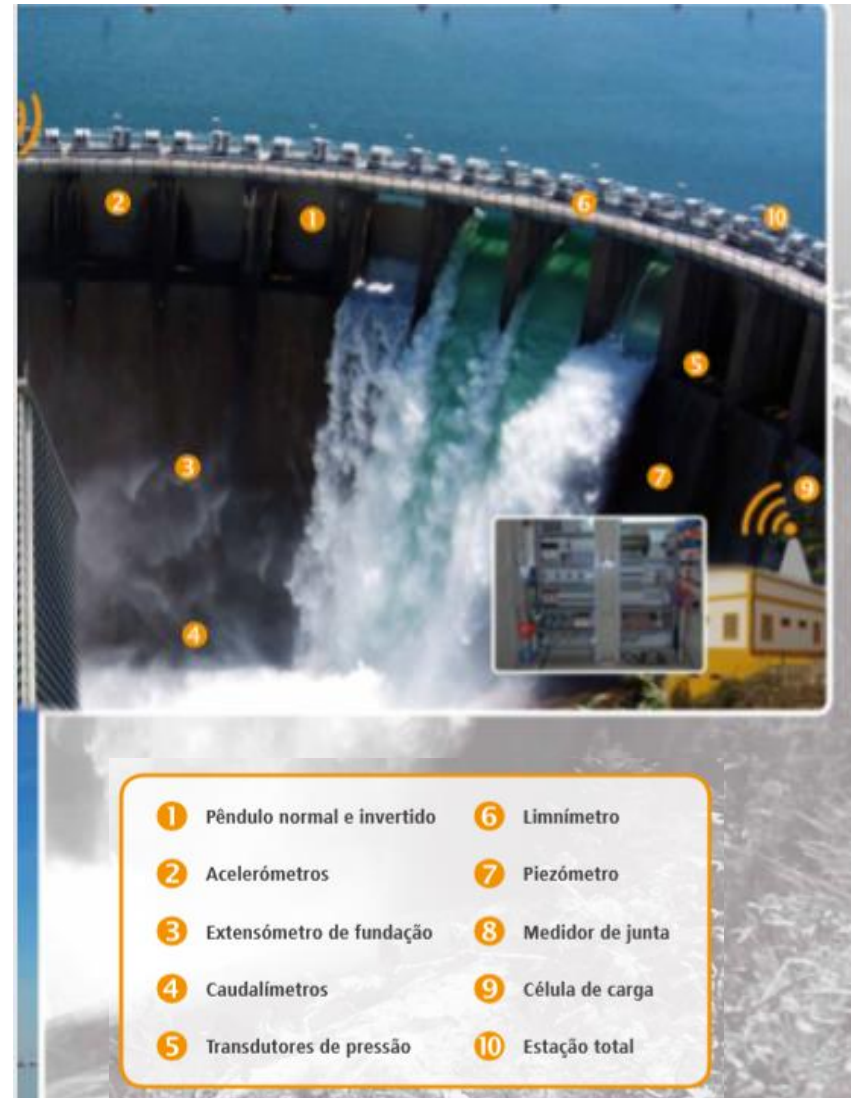
A teoria da **análise de deformações** tornou-se popular na década de 70 do século XX, embora as primeiras aplicações datem dos anos vinte do século passado, com a determinação de **deslocamentos no caso de grandes barragens na Suíça**.

Actualmente a análise de deformações é utilizada para o estudo de **movimentos da crosta, deslizamentos ou subsidência do terreno e monitorização de estruturas (barragens, pontes, torres, etc.)**, pretendendo-se com este procedimento o estabelecimento e verificação de hipóteses em ciências naturais (geofísica, geologia, etc.) e a avaliação da segurança e desempenho de estruturas em engenharia civil, tendo em vista a protecção das populações (prevenção) e a determinação de eventuais responsabilidades em caso de acidentes.

Este capítulo inclui métodos de monitorização de deformação baseados na **observação repetida de redes geodésicas/topográficas**.

**Outros métodos utilizam outro tipo de instrumentação como pêndulos, inclinómetros, extensómetros, termómetros, marégrafos, etc., cuja técnica de análise é similar.**

# Topografia Aplicada – monitorização



## Sistemas de monitorização de estruturas

# Topografia Aplicada – monitorização



## Assentamento e deformação



### Célula de medição de assentamento

- ❑ Transdutor de pressão de fibra ótica ou de corda vibrante, mede os assentamentos do solo.
- ❑ Robusto para aplicação de longo prazo, revestido a aço e resistente à corrosão.
- ❑ Fácil leitura, transmissão de sinal a longas distâncias.



### Extensómetro magnético

- ❑ Mede o assentamento e deformação de fundações, escavações, aterros e barragens.
- ❑ Ao longo de um furo encontram-se instaladas referências magnéticas, do tipo aranha ou do tipo anel, instalados em tubo liso ou inclinómetro.



### Extensómetro de fundação

- ❑ Para medição de deslocamentos da fundação precisos em rocha e em solo.
- ❑ Permite o uso de uma ancoragem única ou várias ancoragens na construção de túneis, aterros, fundações, escavações, etc.
- ❑ Possibilita várias configurações uma vez que pode ser instalado em todas as direções.



### Fita extensométrica

- ❑ Medição rápida e precisa entre dois pontos de referência.
- ❑ Usado principalmente em construção de túneis e em escavações,
- ❑ Pode também ser utilizado para monitorizar movimentos ou deformações em estruturas superficiais.



# Topografia Aplicada – monitorização



## Extensão e deformação



### Varão instrumentado

- Medição de extensões em armaduras ordinárias de betão armado.
- Robusto, impermeável, grande estabilidade e sensibilidade.
- Medições de extensões nas armaduras ou no interior do betão.
- Sensor de temperatura integrado.
- Sistema de medida através de extensómetros de resistência elétrica, corda vibrante, fibra ótica.



### Extensómetro

- Medição de extensões no interior do betão.
- Resistente ao impacto e à corrosão.
- Medidor de temperatura integrado.
- Sinal de leitura transmitido a longas distâncias.
- Vários tipos de leitura, corda vibrante, fibra ótica, resistência elétrica e Carlson.
- Podem ser instalados embebidos no betão antes de betonagem ou à superfície.
- Permitem medições estáticas e dinâmicas.



### Sensor de deformação SOFO / MUST

- Os sensores de deformação SOFO são transdutores em fibra ótica que transformam a variação de comprimento medindo a deformação usando duas fibras óticas (com compensação da temperatura).
- Os sensores de deformação MUST em fibra ótica que transformam uma variação de distância numa mudança num comprimento de onda específico "Bragg Grating".



### Sensor distribuído de deformação e temperatura

- Medem extensões e temperaturas médias ao longo do comprimento de cabo de fibra ótica.
- Estes sensores são compatíveis com unidades de leitura DiTeST.
- Monitorização em larga escala.





## Medidor de juntas / fissuras

- ❑ Sensores de deslocamento de vários tipos. Usados para monitorização de abertura e fecho de fissuras ou juntas de dilatação.
- ❑ Sistema de medida através de extensómetros de resistência elétrica, corda vibrante, fibra ótica. Usado para monitorização de deslocamentos entre juntas de contração em barragens de betão, medição de movimentos de falhas em rochas, determinação do movimento de juntas em betão e em alvenaria.



## Medição tridimensional de movimentos de juntas com transdutores digitais

- ❑ Sistema de medição de movimentos de juntas em rocha, betão e outros.
- ❑ O sistema consiste num suporte em aço inox que é fixo à estrutura nos diferentes pontos das juntas permitindo que um comparador ou um sensor de deslocamento leia qualquer movimento diferencial entre os pontos de fixação.
- ❑ Sistema de medida através de extensómetros de resistência elétrica, corda vibrante, fibra ótica.

## Juntas e fissuração



# Topografia Aplicada – monitorização



## Carga e pressão



### Célula de pressão total e intersticial

- Medição da pressão total no solo e pressão intersticial atuante no solo ou estrutura, como por exemplo, barragens de terra para determinação da magnitude e da direção da pressão existente.
- Compatíveis com vários tipos de transdutores.
- Construção robusta em aço inox, transmite o sinal de frequência a longa distância.
- Sistema de medida através de extensómetros de resistência elétrica, corda vibrante, fibra ótica.



### Célula de pressão

- Célula normalmente instalada em furos de sondagem verticais para medição da tensão total horizontal.
- Frequentemente instalados em argilas rijas, em muros ou paredes de contenção, barragens de aterro, etc.



### Célula de carga

- Medição direta de cargas em pregagens e ancoragens, ou cargas compressivas em estruturas.
- Construção robusta e impermeável.
- Grande estabilidade e sensibilidade.
- Versátil, aplicável a todo o tipo de ancoragens, pode monitorizar tração ou compressão.
- Sistema de medida através de extensómetros de resistência elétrica, corda vibrante, hidráulico, fibra ótica.



### Célula de carga hidráulica e elétrica

- Com gama de medição entre 200 e 10.000kN
- Líquido: Mistura de água e glicerina
- Pistão e invólucro em aço inox



## Deslocamentos



### Sistema inclinométrico

- ❑ O Inclinómetro com sistema bluetooth foi desenvolvido para monitorizar os movimentos e deformações do solo e rocha, incluindo manutenção de estruturas.
- ❑ A sonda está equipada com rodas guia e tem dois acelerómetros MEMS que medem as inclinações em dois planos perpendiculares. As leituras são enviadas via bluetooth para o PDA e são armazenadas.



### Telecordinómetro, para leitura dos deslocamentos horizontais e verticais

- ❑ Medição de deslocamentos horizontais radiais e tangenciais da estrutura, assim como deslocamentos verticais.
- ❑ O equipamento é instalado em uma caixa protetora anticorrosiva contra projeção de água.
- ❑ Os sensores de sombra e diodos são protegidos contra influências externas e condensações do meio.
- ❑ Possui saída analógica e digital.



### Sensor de barra electronivel

- ❑ Sensor usado para monitorar rotação em estruturas verticais.
- ❑ A montagem do sensor inclui um ajuste para zero e protege o sensor contra gradientes térmicos.
- ❑ É normalmente instalado numa barra com diversos tamanhos disponíveis (0,5 a 3,0 metros de comprimento).



### Clinómetro digital portátil

- ❑ O clinómetro digital é contido por acelerómetros MEMS que fazem medições nos planos X e Y, bateria, conversor analógico para digital, e transmissão por bluetooth.
- ❑ Os dados são enviados ao PDA e gravados cada vez que se faz uma leitura.
- ❑ Os acelerómetros medem a variação do ângulo entre o eixo dos sensores colocados no disco de leitura e os planos X e Y.
- ❑ Tempo de resposta: 0,3 Seg.

# Topografia Aplicada – monitorização



## Inclinação e rotação



### Clinómetro de superfície - tiltsensor

- Utilizado para monitorização de pontos específicos em edifícios e estruturas adjacentes a escavações profundas, construção de túneis e minas, estruturas sob intervenção das fundações, tanques, paredes de retenção, assentamentos e deslizamentos de terra.



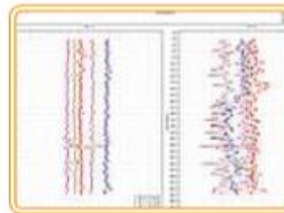
### Tubo inclinométrico

- Utilizados para passagem de sondas inclinométricas que medem deslocamentos laterais e deformações no solo, rocha ou estrutura em tubos instalados na vertical, ou medem assentamentos, em tubos colocados na horizontal.
- Montagem e desmontagem fácil e rápida.
- Resistentes ao colapso e ao torque, compatível com todos os inclinómetros e sondas.
- Indicado para medir movimentos em taludes, barragens, túneis, aterros, fundações, pontes, etc.



### Inclinómetro "in place"

- O "In Place Inclinometer" é adequado para leituras, monitorização de furos pouco profundos, estabilidade de taludes naturais e barragens, ferrovias, rodovias, áreas de deslizamento de terras, etc.
- O sistema utiliza uma sequência fixa de inclinómetros separados por tubos rígidos graduados. Aquisição automática de dados permitindo o acompanhamento em tempo real.



### Software de gestão das leituras de sondas inclinométricas

- Permite o traçado e visualização instantânea de gráficos com várias opções (posição absoluta, deslocamentos/tempo e diversas combinações de deslocamentos cumulativos e incrementais).



# Topografia Aplicada – monitorização



## Sensor combinado de corrosão e humidade para betão

- Medição de todos os parâmetros críticos para avaliação do estado de corrosão das estruturas de betão armado: início e corrente de corrosão, humidade e temperatura.
- Instalação em estruturas de betão armado já existentes.



## Sensor de humidade para betão

- Mede dois parâmetros de avaliação da humidade contida no betão: resistividade elétrica e temperatura.
- Quatro varões em aço são colocados no betão a 4 profundidades diferentes e medem os parâmetros entre pares de varões para determinar a resistividade ao longo da profundidade.
- Instalação em estruturas novas ou em remodelação.



## Sensor de corrosão

- Mede dois parâmetros críticos para avaliação das condições de corrosão de estruturas de betão armado: início da corrosão e corrente de corrosão.
- Os quatro varões de medida são colocados entre a superfície do recobrimento e as armaduras, de forma a prever quando a corrosão está demasiado próxima das armaduras e intervir de acordo com esta informação.

## Humidade e corrosão

# Topografia Aplicada – monitorização



## Sensor de temperatura

- ❑ Medição de temperatura em solo, rocha ou betão em estruturas como barragens, pontes, túneis, etc.
- ❑ Pode ser embestado no betão fresco ou betonado em furos de sondagem.
- ❑ Sistema de medida através de extensómetros de resistência elétrica, corda vibrante, fibra ótica.



## Sensor distribuído de temperatura

- ❑ Medição de temperaturas ao longo do comprimento de um cabo de fibra ótica.
- ❑ Aquisição automática de dados permitindo o acompanhamento em tempo real.
- ❑ Monitorização em larga escala.

## Temperatura



## Sonda PT 100

A termoresistência de platina é a mais utilizada na indústria devido a sua grande precisão e estabilidade.

- ❑ A termoresistência de platina que apresenta uma resistência ohmica de  $100 \Omega$  a  $0^\circ\text{C}$ .
- ❑ Faixa de utilização de  $-200$  a  $650^\circ\text{C}$ .



# Topografia Aplicada – monitorização



## Estação meteorológica

Estações meteorológicas à sua medida configurável com todas as opções de transdutores, registos e envio de dados.

- ☐ Temperatura;
- ☐ Humidade;
- ☐ Velocidade do vento;
- ☐ Direção do vento;
- ☐ Pluviosidade;
- ☐ Pressão atmosférica;
- ☐ Radiação solar;
- ☐ Entre outras.



## Estação meteorológica



# Topografia Aplicada – monitorização



## Indicador de nível da água

- ❑ Medição do nível de água em furos e poços.
- ❑ O indicador de nível possui um leitor rápido e preciso da profundidade a que se encontra a água, com indicador sonoro e luminoso.



## Piezómetro / Sonda de nível

- ❑ Concebido para medir pressões intersticiais ou nível de água.
- ❑ Construção robusta em aço inox, ou outro material.
- ❑ Sistema de medida através de extensómetros de resistência elétrica, corda vibrante, fibra ótica, outro.

## Pressão e nível da água



## Piezómetro hidráulico

- ❑ Com leitura através de manómetro ou por transdutor de pressão ligado a central de aquisição de dados.

# Topografia Aplicada – monitorização



## Unidades de leitura e registo de dados



### Unidade portátil de leitura

- Indicado para leitura de sensores de corda vibrante.
- Alta precisão e fiabilidade.
- Adequado a ambientes rigorosos.
- LCD com iluminação para uso noturno.
- Leitura de sensores de extensómetros de resistência elétrica, corda vibrante, outros.



### PDA robusto

- Pesa apenas 490g, mas o seu design robusto proporciona um desempenho confiável no campo.
- Cumprir rigorosos padrões de vibrações, humidade, altitude e temperaturas extremas.
- É impermeável à água e poeira.
- Possui um grande ecrã táctil melhorado.
- Adequado para leituras de inclinómetros MEMS via cabo USB RS-485.



### Datalogger 1 a 5 canais com autonomia

- Monitorização de sensores de fibra ótica ou corda vibrante e termistor integrado.
- Adequado a pequenos projetos com poucos sensores ou em locais onde não seja possível a utilização de cabos longos.
- Programável para aquisição contínua de dados ou em intervalos definidos.



### Datalogger

- Memória interna.
- Conversor analógico digital, porta série RS-232 e CS I/O.
- Micro controlador 16-bit.
- Possibilidade de acoplar módulos de expansão.
- Compensação de temperatura em tempo real.
- Completo com comunicação de dados, rádio frequência, modem GPRS ou GSM, satélite, etc.

# Topografia Aplicada – monitorização



## Unidades de leitura e registo de dados



### Unidade de leitura SOFO - (fibra ótica)

- Esta unidade permite a medição de sensores SOFO. Alta resolução, precisão e linearidade, não necessita de calibração.



### Unidade de leitura MuST (FBG) - (fibra ótica)

- Concebido para instalação em qualquer estrutura que exige um acompanhamento contínuo.
- A unidade permite simultaneamente medir até 4 sensores de corda com até 40 sensores por fibra ótica (algumas restrições aplicáveis, dependendo do tipo de sensor e gamas de medição).



### Unidade e leitura Fabry-Perot - (fibra ótica)

- O modelo BUS é um leitor multi-canal de sensores em fibra ótica, com taxas de amostragem rápida e compatibilidade com a maioria dos transdutores de fibra ótica Fabry-Perot.



### Rede wireless de aquisição automática

- Solução de monitorização de larga escala.
- Monitorização sem fio, Wifi de pontes, túneis, escavações, taludes, barragens, obras geotécnicas, etc.
- Rápida e flexível implementação e instalação.
- Sistema de monitorização robusto em ambientes agressivos.
- Compatível com sensores de corda vibrante, 4-20mA, voltagem, eletrônível e resistência elétrica.

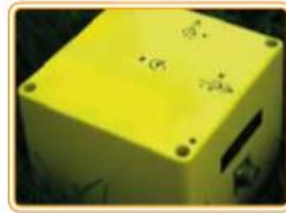


# Topografia Aplicada – monitorização



## Acelerómetro strong-motion

- ❑ Acelerómetro 3D, para baixos níveis de ruído e baixa gama de frequência.
- ❑ Não necessita de manutenção.
- ❑ Utilizado para monitorização de sismos, sismicidade ambiental em estruturas de engenharia civil tais como barragens, pontes, etc...



## Sismómetro de rotação em 3 eixos

- ❑ Apresenta a mais alta sensibilidade/resolução disponíveis num transdutor de rotação, para uma banda de frequência sem ressonância.
- ❑ Mede diretamente dados rotacionais e é insensível ao movimento linear.



## Unidade digitalizadora

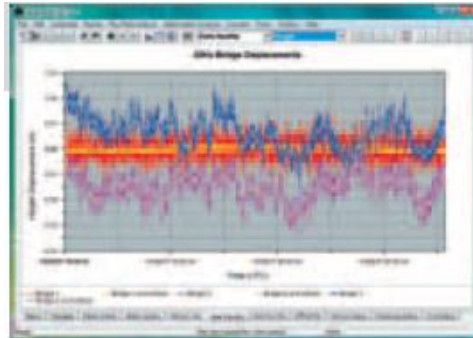
- ❑ Gravador sísmico robusto e versátil de resolução 24-bit, de potência ultra-baixa e de alta performance.
- ❑ Foi concebido para os requisitos mais exigentes de evento sísmico e observação sísmica.
- ❑ Capaz de medir em simultâneo até 4 sensores de aceleração 3D.

**Instrumentação de  
observação sísmica**

## Topografia Aplicada – monitorização

A complexidade, extensão e custos crescentes dos trabalhos de engenharia civil implicam uma **maior exigência nos trabalhos de implantação e monitorização de estruturas**, de forma a garantir que os projectos sejam cumpridos.

O desenvolvimento de **instrumentos de observação, registo e processamento automáticos** oferece a possibilidade de efectuar esta monitorização de forma precisa e económica.



Mas, para além da utilização destes instrumentos, é necessário dominar os **princípios da concepção, instalação, cálculo e avaliação da qualidade das observações** de redes (geodésicas) de controlo, para que sejam consistentes e fidedignas.

# Topografia Aplicada – monitorização

Um exemplo deste tipo de redes dinâmicas, onde as observações são efectuadas de forma automática e em tempo real é a rede instalada para apoio das obras na estação de metropolitano de Paddington, em Londres, que inclui 52 estações totais Leica TM 30 S e cerca de 1800 alvos, que são continuamente observados ao longo do tempo de acordo com um ciclo de observações pre-configurado, gerando um conjunto de observações muito extenso que é processado pelo software GeoMos (software muito flexível da Leica para monitorização automática de deformações). As estações totais são instaladas de forma permanente durante a duração da obra em locais estáveis de forma a assegurar que as coordenadas calculadas a partir desses pontos são obtidas num referencial consistente para simplificar a detecção de movimento dos alvos.



## LEICA TM30 TOTAL STATIONS

US\$10,100.00

Buildings and dams settle, bridges flex and vibrate, rock masses shift, mud slides, glaciers flow and volcanoes erupt. Whether by human activity such as mining and construction or by natural processes such as climate change and erosion, the world in which we live is continually changing.

### Complete Monitoring Integration

The Leica TM30 forms one component of a unique Monitoring solution which seamlessly integrates total stations, GNSS receivers and antennas, geotechnical sensors, software and IT communication infrastructures.

Leica GeoMoS software provides a highly flexible automatic deformation monitoring system that is able to combine geodetic, geotechnical and meteorological sensors to match the needs of your monitoring project, whether it is large or small, temporary or permanent.

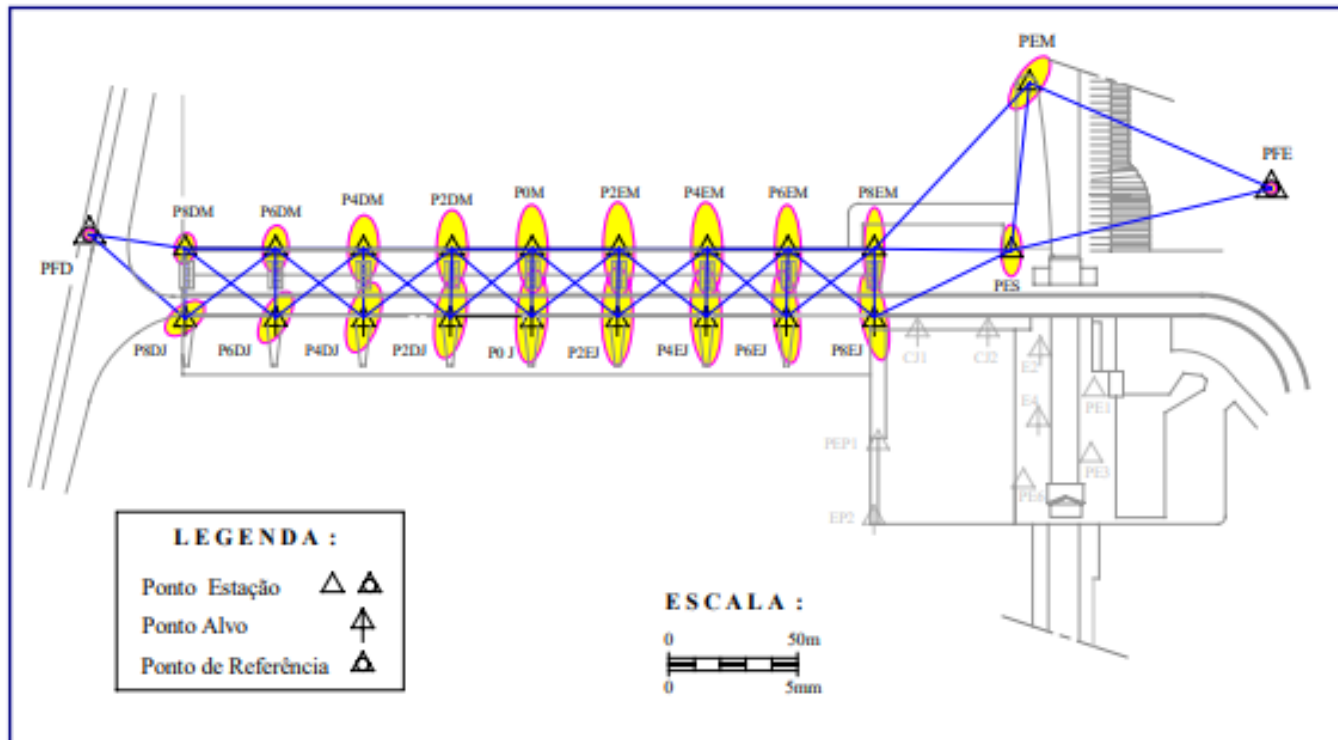
Leica GeoMoS Web is a web based service for the visualization and analysis of monitoring data collected by a Leica GeoMoS monitoring system. Access your monitoring project anywhere, anytime using your web browser, pocket pc or mobile phone.

### Accurate, Fast and Silent

The Leica TM30 is designed to meet the highest accuracy standards. High precision measurements, combined with automatic, fast and silent operation ensures that the TM30 detects the smallest movement in all monitoring applications. High accuracy angular measurement of 0.5" or 1"



# Topografia Aplicada – monitorização



É muito importante o reconhecimento prévio do local onde vão ser efectuadas as observações, até porque no caso de levantamentos associados a trabalhos de engenharia civil, a posição das estações depende não apenas das particularidades topográficas que podem limitar a **intervisibilidade** mas também da localização e dimensão das obras a implantar, da ordem pela qual as diversas fases da construção se desenrolam e da localização das áreas de serviço e dos caminhos de acesso à obra.

A concepção e instalação de uma rede de controlo depende não só das **características do terreno e dos trabalhos em curso** mas também das propriedades de **exactidão**, **precisão**, **robustez** e **economia** que essa rede deve verificar.

Assim, o responsável pela instalação de rede de controlo deve assegurar que esses critérios são verificados **em simultâneo**: uma rede que verifique os critérios citados mas cujas estações sejam destruídas é inútil, da mesma forma que uma rede concebida de tal forma que as respectivas estações sejam preservadas mas que dê origem a coordenadas pouco exactas ou precisas é igualmente inútil.

O **reconhecimento** deve basear-se na aplicação correcta dos procedimentos geodésicos assim como numa compreensão dos processos que ocorrem durante a obra; uma visada que pareça isenta de erros de refacção anormalmente altos antes de os trabalhos de obra terem início pode acabar por ser perturbada durante a realização dessa obra, por exemplo devido à existência de condutas de ventilação ou aquecimento, torres de arrefecimento ou valas de água que introduzam erros de refacção nas observações.

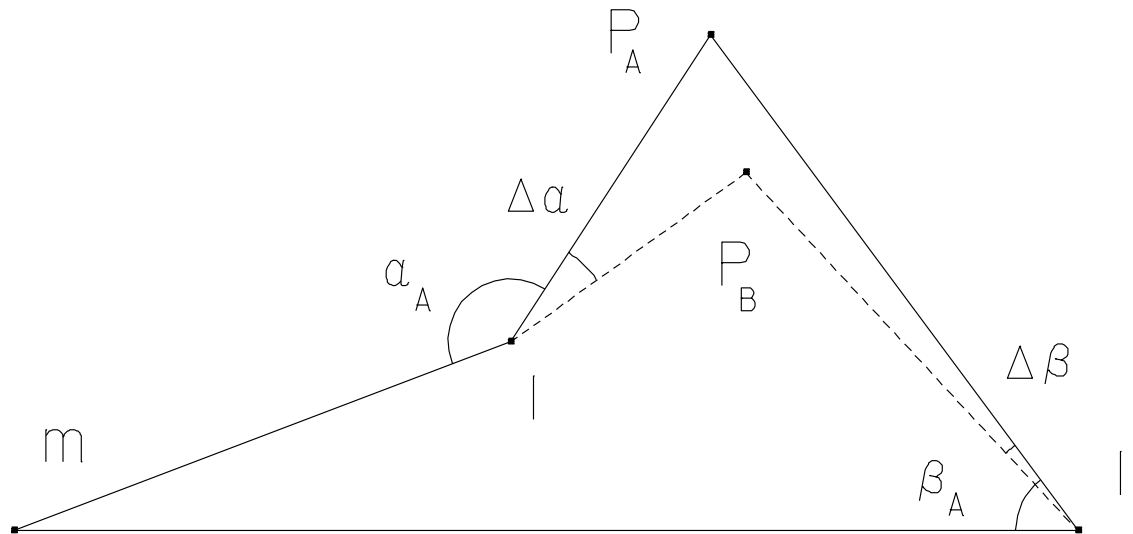


**O vapor de água resultante da descarga da barragem afecta o percurso óptico entre os pontos estação e visado**

Os critérios quantitativos relativos à exactidão e precisão da rede são definidos em função dos **requisitos de cada aplicação** particular de engenharia civil e, em princípio, não podem sofrer alterações durante a realização da obra.

No caso de serem definidos requisitos de exactidão e precisão **demasiado altos** para uma dada obra, os custos da implementação da rede de monitorização associada serão demasiado altos para o fim a que se destinam; no caso de serem definidos requisitos de exactidão e precisão **demasiado baixos** para uma dada obra, os resultados da rede de monitorização associada não poderão assegurar a correcta implantação do projecto.

Esquemáticamente, o problema consiste em determinar o **deslocamento** (horizontal, neste caso) **de um ponto P de uma estrutura relativamente aos pilares I e II considerados fixos**, a partir de observações azimutais  $\alpha$  e  $\beta$  em **épocas distintas** A e B (entre as quais se deseja obter o valor dos deslocamentos), sendo m uma marca de referência fixa; as diferenças angulares  $\Delta\alpha$  e  $\Delta\beta$  permitem determinar a nova posição  $P_B$  relativamente à posição  $P_A$ .





Embora sejam suficientes **dois** pilares, para se aumentar a precisão dos resultados e obter o valor dos erros cometidos na determinação do deslocamento, é conveniente utilizar um terceiro pilar fixo III.

A metodologia indicada baseia-se na hipótese de os pilares de observações serem efectivamente **fixos** pois de outro modo qualquer alteração na respectiva posição relativa vai contaminar o valor determinado para o movimento do ponto P.

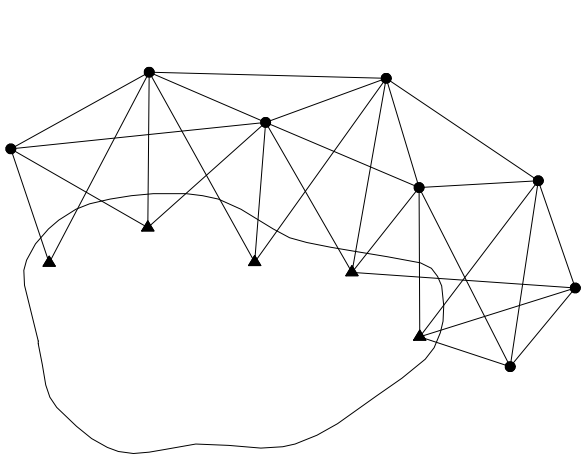
O **objecto** ou **área** em estudo é normalmente representado por um **conjunto discreto de pontos**, que são **monumentalizados** ou identificados de forma duradoura, sendo estes pontos transformados numa **rede** através da realização de **observações** que estabelecem, em diferentes épocas, relações de **posição** entre eles.

Se ocorrer **deformação** nesses intervalos, a **modificação da posição** relativa entre os pontos da rede resulta em **observações** (e portanto **coordenadas**) **diferentes** para cada ponto, sendo **estas diferenças tipicamente da mesma ordem de magnitude dos erros de observação.**

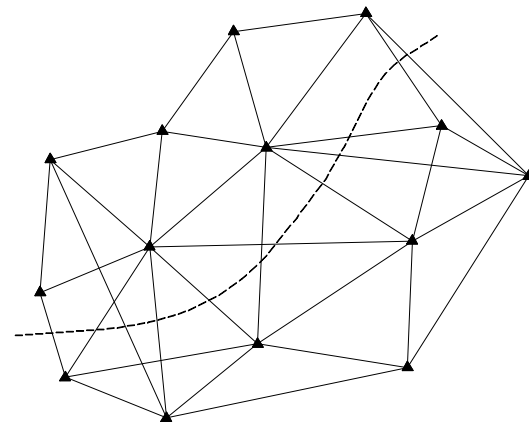
Normalmente consideram-se dois tipos de pontos numa rede de monitorização, os **pontos de referência** e os **pontos objecto** (ou pontos-alvo).

No caso da figura a), a rede instalada consiste em **pontos de referência** (pontos **estáveis**) e **pontos objecto**, sendo a determinação dos deslocamentos (e das velocidades) dos pontos objecto relativamente aos pontos de referência o objectivo da análise (observações absolutas);

no caso da figura b). existem apenas **pontos objecto**, separados em dois grupos por uma falha geológica, podendo aqui **apenas ser determinados os deslocamentos relativos entre os dois blocos** (é apenas possível detectar variações na geometria da rede e não se a rede como um todo sofreu um deslocamento ou uma rotação).



a)



b)

Em teoria, todas as observações de uma dada época devem ser efectuadas em **simultâneo**; uma vez que é impossível verificar esta condição, devem ser tidas em consideração as deformações que ocorram durante o período de observação, embora em geral a taxa de deformação seja suficientemente pequena de forma a que o respectivo efeito pode ser desprezado em comparação com o período de observação. Caso isto não se verifique, as observações correspondentes a uma **dada época** devem ser reduzidas a uma **mesma referência temporal**.

Para estudar as deformações que afectam um objecto ou uma área é necessário **repetir as observações geodésicas em diferentes épocas**, sendo **cada conjunto de observações ajustado de forma independente**. A partir das diferenças de coordenadas obtidas para os mesmos pontos da rede (**deslocamentos**), deduzem-se os parâmetros do modelo de deformação.

A **época inicial** define a **posição de referência dos pontos da rede** relativamente à qual serão determinados os **desvios acumulados** nas épocas de observação seguintes (para que um deslocamento seja considerado **significativo** em relação à época anterior, deve ser superior à precisão obtida, dentro da margem de erro considerada).

Após a primeira repetição das observações, existindo dois conjuntos de dados disponíveis, efectua-se uma análise entre essas duas épocas, podendo os modelos utilizados ser **estáticos** (adopta-se um ponto de vista estritamente geométrico, sendo os resultados apresentados na forma de **vectores deslocamento**) ou **dinâmicos** (relaciona-se os deslocamentos com as **forças** que lhes deram origem).

O resultado desta análise permite verificar a adequação da rede observada para a detecção da deformação e a selecção da frequência de futuras campanhas de observação. Para cada campanha adicional, é efectuada uma comparação com o conjunto inicial.



Como na generalidade dos casos o **quociente sinal/ruído** é pequeno, é necessário um **grande cuidado na avaliação da qualidade das observações geodésicas** e na **especificação do modelo matemático adoptado** (erros grosseiros ou sistemáticos não detectados nas observações ou variâncias *a priori* incorrectamente adoptadas traduzem-se em **deformações aparentes** que contaminam o resultado).

É assim da maior importância utilizar os métodos e a informação adequados para o desenvolvimento de um modelo matemático realista, que descreva de forma verosímil a realidade.

## Topografia Aplicada – monitorização

Sendo  $p$  o número de pontos da rede (3D), para a época  $k$  obtém-se após o processamento, o vector  $\hat{\mathbf{x}}_k$  de dimensão  $n=3p$  que contém as coordenadas estimadas dos pontos da rede, isto é,  $\hat{\mathbf{x}}_k^T = (\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{z}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2, \hat{z}_2, \dots, \hat{x}_p, \hat{y}_p, \hat{z}_p)_k$ , a matriz de variâncias-covariâncias  $\Sigma_{\hat{\mathbf{x}}_k}$  de dimensão  $n \times n$  associada à estimativa das coordenadas e a variância estimada por unidade de peso  $S_0^2$  que descreve o estado do objecto na época considerada. A diferença de coordenadas entre as épocas de observação  $k$  e  $\ell$  é dada pelo vector  $\bar{\Delta} = \hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_\ell = (\Delta_1^T, \Delta_2^T, \dots, \Delta_p^T)^T$ , com  $\Delta_i^T = (\hat{x}_k - \hat{x}_\ell, \hat{y}_k - \hat{y}_\ell, \hat{z}_k - \hat{z}_\ell)_i$ ,  $i=1, \dots, p$  representando os deslocamentos do ponto  $i$ .

A posição não é uma grandeza absoluta, isto é, a posição de um ponto no espaço requer não só a especificação de 3 parâmetros independentes (**coordenadas**) mas também dos elementos do datum (**referencial**), devendo este último ser sempre considerado na discussão da precisão e da exactidão das coordenadas.

Frequentemente é difícil decidir se os **deslocamentos detectados** numa rede são o resultado de **movimentos reais**, podendo dever-se a **erros nas observações** ou a **alterações no datum** adoptado em diferentes épocas.

É impossível obter **altitudes** se apenas se utilizarem no ajustamento **diferenças de altitudes**.

É impossível obter **coordenadas** se apenas se utilizarem no ajustamento **ângulos (ou direcções) e distâncias**.

Resulta assim que qualquer ajustamento de observações necessita do conhecimento das coordenadas (ou altitudes) de alguns pontos (que constituem o **datum**) e a não verificação desta condição resulta numa **solução impossível** (matriz normal singular).

Um ***datum*** usual no posicionamento espacial é constituído por um sistema de eixos ortogonais e directos (X,Y,Z), que tem que ser localizado no espaço. Associado à definição do *datum* está a unidade de comprimento utilizada no cálculo dos parâmetros (coordenadas). Uma forma de o realizar é seleccionar ou materializar uma origem na proximidade da zona de interesse (um dos pontos da rede); a orientação dos eixos pode fixar-se alinhando um deles (convencionalmente o eixo Z) segundo a direcção da força da gravidade na origem (utilizando nivelas) e alinhando outro eixo na direcção de um outro ponto da rede.

## Topografia Aplicada – monitorização

O número mínimo de variáveis independentes necessárias para resolver univocamente o modelo funcional designa-se por  $n_0$ ; caso sejam efectuadas  $n > n_0$  observações, existe uma redundância  $r = n - n_0$  de observações (ou  $r$  graus de liberdade). Após a redundância ter sido determinada, o ajustamento continua com a formulação das equações (de condição) que relacionam as variáveis do modelo, reflectindo a redundância existente. O número de equações de condição para um dado problema depende de estas equações apenas envolverem observações ou, adicionalmente, outras variáveis desconhecidas, designadas por parâmetros. Após o ajustamento, tanto as observações como os parâmetros terão estimativas por mínimos quadrados dos respectivos valores. Sendo  $u$  o número de parâmetros, há  $c = r + u$  equações de condição independentes que relacionam as  $n$  observações e os  $u$  parâmetros. Para que os parâmetros sejam independentes, deve verificar-se  $0 \leq u \leq n_0$  e, de forma similar, para que as equações de condição sejam independentes, deve verificar-se  $r \leq c \leq n$ .



A generalidade das variáveis observadas em topografia (direcções, distâncias, desníveis, etc.) são **variáveis aleatórias** que devido a flutuações probabilísticas (classicamente conhecidas como erros, actualmente como incertezas) tomariam valores diferentes se as observações fossem repetidas. No caso de existir uma única observação para cada variável com interesse para o problema em questão, obtêm-se estimativas para as incógnitas que são **consistentes** com o modelo utilizado, não se justificando o ajustamento das observações. Pelo contrário, **se existirem mais observações do que aquelas estritamente necessárias para resolver univocamente o problema, é necessário efectuar um ajustamento** de forma a garantir estimativas consistentes (neste último caso, combinações diferentes de observações conduzem a estimativas diferentes para as incógnitas, isto é, inconsistência nos resultados; **uma vez ajustadas, qualquer subconjunto de observações de dimensão  $n_0$  conduz à mesma solução**).

Antes da realização do trabalho de campo, é necessário definir o **modelo matemático** a utilizar, determinado através de um dado número de **variáveis** e da **relação entre essas variáveis**. O modelo matemático, por sua vez, tem duas componentes: o modelo funcional e o modelo estocástico. O **modelo funcional** é a componente mais óbvia, pois descreve as **características geométricas do problema**, enquanto que o **modelo estocástico** descreve as **propriedades estatísticas** dos elementos envolvidos no modelo funcional.

O modelo funcional exprime uma simplificação da realidade física existente, estabelecendo relações matemáticas entre as observações e, eventualmente, com outras quantidades desconhecidas designadas por **parâmetros**, que normalmente **não podem ser medidos directamente** (como é o caso de coordenadas planimétricas, altitudes, coeficientes de refacção, etc.).

**Deve existir uma relação estreita entre os modelos funcional e estocástico de forma a serem obtidos os resultados pretendidos, o que pode ser previsto através de uma **simulação**.**

**Pode acontecer o modelo funcional ser apropriado mas o(s) aparelho(s) utilizado(s) para efectuar as observações não garantir(em) precisão suficiente, assim como também pode acontecer o(s) aparelho(s) utilizado(s) ser(em) adequado(s) mas a geometria seleccionada não ser suficientemente sólida ou nem sequer relacionar todas as observações entre si. Pode ainda acontecer o modelo funcional estar incompleto: por exemplo, o factor de escala para alguma ou para a totalidade das observações de distância pode ter sido erradamente omitido, como pode acontecer quando um novo levantamento é ajustado às estações de um levantamento antigo dando origem a uma discrepância nas coordenadas obtidas.**

Por forma a determinar os  $u$  parâmetros desconhecidos são realizadas  $n$  observações  $L_i$ , obtendo-se o vector  $\tilde{L}_{n \times 1}$ . Supõe-se que  $n > u$ , de tal forma que o sistema de equações que relaciona as observações e os parâmetros é inconsistente (isto é, qualquer conjunto mínimo de observações determina valores diferentes dos parâmetros). Devido à natureza estocástica das observações, estas são afectadas por erros aleatórios, tendo-se  $E(\tilde{L}_{n \times 1}) = \tilde{L}_{n \times 1}$ , representando este último vector as observações ajustadas. A partir do modelo funcional  $\tilde{F}_{n \times u}$ , as observações vão produzir estimativas  $\hat{X}_{u \times 1}$  dos parâmetros tal que  $E(\hat{X}_{u \times 1}) = \tilde{X}_{u \times 1}$ , em que  $\tilde{X}_{u \times 1}$  é o vector dos parâmetros ajustados, tal que

$$\tilde{L}_{n \times 1} = \tilde{F}_{n \times u}(\tilde{X}_{u \times 1}),$$

sendo este modelo em geral não linear.

## Topografia Aplicada – monitorização

Substituindo  $\tilde{L}_{n \times 1}$  pelo vector das observações efectuadas,  $\bar{L}_{n \times 1}$  e incluindo o vector dos resíduos  $\bar{v}_{n \times 1}$ , obtem-se o sistema de equações  $\hat{L}_{n \times 1} = \bar{L}_{n \times 1} + \bar{v}_{n \times 1} = \bar{F}_{n \times u}(\hat{X}_{u \times 1})$ . Para ser possível o tratamento matemático do problema do ajustamento, é necessário linearizar o modelo funcional anterior, na forma

$$\hat{L}_{n \times 1} = \bar{F}_{n \times u}(\bar{X}_{u \times 1}^0) + \left( \frac{\partial \bar{F}_{n \times u}(\bar{X}_{u \times 1})}{\partial \bar{X}_{u \times 1}} \right)_0 (\hat{X}_{u \times 1} - \bar{X}_{u \times 1}^0)$$

em que  $\hat{X}_{u \times 1} = \bar{X}_{u \times 1}^0 + \hat{x}_{u \times 1}$ , sendo  $\bar{X}_{u \times 1}^0$  a aproximação inicial do valor dos parâmetros, necessário para inicializar o processo iterativo de cálculo dos parâmetros e  $\hat{x}_{u \times 1}$  sendo a actualização em cada iteração do valor dos parâmetros. De forma idêntica tem-se

$$\hat{L}_{n \times 1} = \bar{L}_{n \times 1}^0 + \hat{\ell}_{n \times 1} = \bar{L}_{n \times 1}^0 + \bar{\ell}_{n \times 1} + \bar{v}_{n \times 1}.$$

Assim, o modelo funcional linearizado é da forma

$$\hat{L}_{n \times 1} - \bar{L}_{n \times 1}^0 = \hat{\ell}_{n \times 1} = \bar{\ell}_{n \times 1} + \bar{v}_{n \times 1} = A \hat{x}_{u \times 1},$$

onde A é a matriz dos coeficientes dos parâmetros.

## Topografia Aplicada – monitorização

O modelo estocástico descreve as características estatísticas das observações, de tal forma que

$E(\bar{\ell}_{n \times 1}) = A\bar{x}_{u \times 1}$ . A matriz  $\Sigma_{\bar{\ell}\bar{\ell}}$  das variâncias-covariâncias das observações, cujos elementos são, na diagonal principal as variâncias  $\sigma_i^2$  das observações  $\ell_i$ ,  $i=1, \dots, n$  e nas restantes posições as covariâncias  $\rho_{ik}$  entre as observações  $\ell_i$  e  $\ell_k$ , relaciona-se com a matriz cofactor  $Q_{\bar{\ell}\bar{\ell}}$  através de  $\Sigma_{\bar{\ell}\bar{\ell}} = \sigma_0^2 Q_{\bar{\ell}\bar{\ell}}$ , sendo  $\sigma_0^2$  a variância *a priori* por unidade de peso, que funciona como um factor de escala, pois na maior parte dos casos apenas é conhecida informação relativa quanto às propriedades estocásticas das observações. Tem-se que  $Q_{n \times n}^{-1} = P_{n \times n}$ , sendo  $P_{n \times n}$  a matriz dos pesos das observações, tal que  $P_{i,j} = \sigma_0^2 \Sigma_{i,j}^{-1}$  representa o peso de uma dada observação; uma observação tem o peso igual à unidade se  $\sigma_i^2 = \sigma_0^2$ , razão pela qual se designa  $\sigma_0^2$  variância *a priori* por unidade de peso. A quantidade  $\sigma_0^2$  é originalmente desconhecida, sendo a respectiva estimativa obtida por  $s_0^2 = v_{1 \times n}^T P_{n \times n} \bar{v}_{n \times 1} / (n - u)$ , designada por variância por unidade de peso *a posteriori*, tal que  $E(s_0^2) = \sigma_0^2$ .



## Topografia Aplicada – monitorização

O ajustamento é efectuado acrescentando ao modelo matemático definido pelo sistema de

equações  $\hat{\ell}_{n \times 1} = \bar{\ell}_{n \times 1} + \bar{v}_{n \times 1} = A_{n \times u} \hat{x}_{u \times 1}$  (modelo funcional) e  $\Sigma_{n \times n} = \sigma_0^2 Q_{n \times n}, P_{n \times n} = Q_{n \times n}^{-1}$

(modelo estocástico) o critério dos mínimos quadrados  $\bar{v}_{n \times 1}^T P_{n \times n} \bar{v}_{n \times 1} = \text{mínimo}$ , obtendo-se:

$$N_{u \times u} \hat{x}_{u \times 1} = W_{u \times 1}, \quad N_{u \times u} = A_{u \times n}^T P_{n \times n} A_{n \times u}, \quad W_{u \times 1} = A_{u \times n}^T P_{n \times n} \bar{\ell}_{n \times 1}$$

$$\hat{x}_{u \times 1} = N_{u \times u}^{-1} W_{u \times 1}$$

$$\bar{v}_{n \times 1} = A_{n \times u} \hat{x}_{u \times 1} - \bar{\ell}_{n \times 1}$$

$$\hat{\ell} = \bar{\ell} + \bar{v}$$

$$\hat{L} = \bar{L} + \bar{v}$$

$$\hat{X} = \bar{X}_0 + \hat{x}$$

$$\hat{L} = F(\hat{X})$$

## Topografia Aplicada – monitorização

A solução do problema do ajustamento é obtida através de multiplicações, adições e subtrações de matrizes, operações que são efectuadas sem problemas de maior. Apenas duas excepções podem acontecer:

1) A inversão da matriz cofactor de forma a obter a matriz peso  $P_{n \times n} = Q_{n \times n}^{-1}$  implica que a matriz  $Q_{n \times n}$  (ou a matriz  $\Sigma_{n \times n}$ ) seja definida positiva (seja  $M$  uma matriz hermítica  $n \times n$ ;  $M$  diz-se definida positiva se verificar alguma das condições seguintes: a) para todos os vectores não nulos  $\vec{z} \in C$  tem-se  $\vec{z}^* M \vec{z} > 0$ , onde  $\vec{z}^*$  representa o conjugado transposto de  $\vec{z}$  b) todos os valores próprios  $\lambda_i$  de  $M$  são positivos; uma matriz hermítica é uma matriz quadrada de elementos complexos que tem a propriedade de ser igual à respectiva transposta conjugada que, no caso particular de os elementos dessa matriz terem apenas parte real, se reduz a uma matriz simétrica tal que  $M = M^T$ ).

2) A inversão da matriz normal  $N_{u \times u} = A_{u \times n}^T P_{n \times n} A_{n \times u}$  só é possível se  $C(A_{n \times u}) = C =$  característica da matriz  $A$  for igual a  $u$  (nesse caso  $N$  é uma matriz regular); caso contrário, isto é, se a característica da matriz  $A_{n \times u}$  for inferior a  $u$ , a matriz  $N_{n \times n}$  é singular, não tendo inversa.

## Topografia Aplicada – monitorização

Num ajustamento clássico de uma rede geodésica tem-se  $C = u$ , donde  $d = 0$  e portanto a inversão pode efectuar-se sem dificuldade. Em geral, passa despercebido que a condição  $C = u$  é forçada por imposições mais ou menos arbitrárias, que permitem remover o *deficit* de característica  $d = u - C$  da matriz  $A_{n \times u}$ , o que constitui o problema do *datum* geodésico. Nestas condições  $N_{u \times u}^{-1}$  é única e a estimativa dos parâmetros

$$\hat{\tilde{x}}_{u \times 1} = (A_{u \times n}^T P_{n \times n} A_{n \times u})^{-1} (A_{u \times n}^T P_{n \times n} \tilde{\ell}_{n \times 1})$$

é não enviesada pois

$$E(\hat{\tilde{x}}) = (A^T P A)^{-1} (A^T P E(\tilde{\ell})) = (A^T P A)^{-1} (A^T P A \tilde{x}) = (A^T P A)^{-1} (A^T P A) \tilde{x} = I \tilde{x} = \tilde{x}.$$

Tem-se ainda

$$Q_{u \times u}^{\text{parâmetros}} = (A^T P A)^{-1}, \quad Q_{n \times n}^{\text{resíduos}} = Q_{n \times n}^{\text{obs}} - A (A^T P A)^{-1} A^T, \quad Q_{n \times n}^{\text{obs ajustadas}} = Q_{n \times n}^{\text{obs}} - Q_{n \times n}^{\text{resíduos}}.$$

Quando numa rede se tem  $C < u$  (situação mais geral), ou seja,  $d > 0$ , a rede diz-se **livre**, no sentido em que qualquer alteração de posição dos pontos da rede que mantenha as observações, através de translações, rotações ou escalamentos, não é detectada; neste caso  $N_{u \times u}$  é singular e  $N_{u \times u}^{-1}$  não existe. Toma-se então útil a definição de inversa generalizada,  $N_{u \times u}^-$  da matriz  $N_{u \times u}$  tal que  $N_{u \times u} N_{u \times u}^- N_{u \times u} = N_{u \times u}$ : no caso em que  $N_{u \times u}$  é singular,  $N_{u \times u}^-$  não é única e portanto  $N_{u \times u}^- N_{u \times u} \neq I_u$ . Os parâmetros são obtidos de

$$\hat{\tilde{x}}_{u \times 1} = N_{u \times u}^- A_{u \times n}^T P_{n \times n} \tilde{\ell}_{n \times 1},$$

cujo valor esperado é

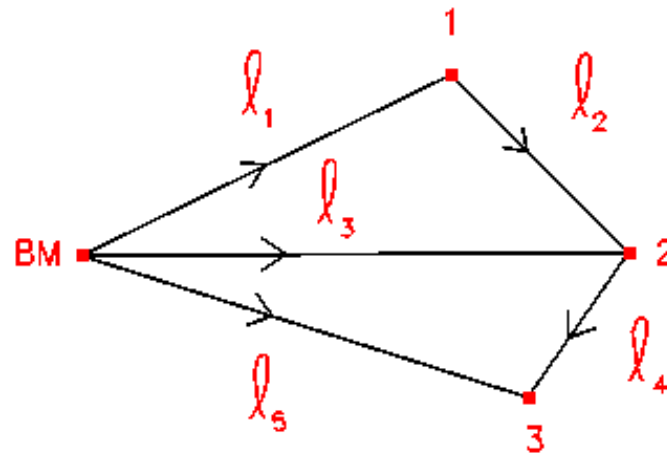
$$E(\hat{\tilde{x}}_{u \times 1}) = N_{u \times u}^- A_{u \times n}^T E(\tilde{\ell}_{n \times 1}) = N_{u \times u}^- N_{u \times u} \tilde{x}_{u \times 1} \neq \tilde{x}_{u \times 1},$$

o que mostra que a estimativa dos parâmetros no caso de um sistema singular é enviesada e portanto os parâmetros não são quantidades estimáveis.

O problema de ordem zero ou problema do *datum* pode ser considerado como o resultado de uma modelação imperfeita que resulta num problema impossível: quando se utiliza o modelo  $\bar{l}_{a,1} + \bar{U}_{a,1} = A_{a,n} \delta \bar{x}_{n,1}$ , é necessário seleccionar parâmetros que possam ser obtidos das observações, em geral ângulos, distâncias ou desniveis. No caso das redes geodésicas, os parâmetros (desconhecidos) são normalmente altitudes e/ou coordenadas dos pontos da rede não só porque as equações de observação que relacionam observações e parâmetros são simples, mas também porque a matriz de variâncias-covariâncias dos parâmetros é obtida durante o cálculo dos próprios parâmetros e porque o resultado é facilmente visualizado. Considerem-se os seguintes dois exemplos que ilustram o problema do *datum*, o primeiro numa rede a uma dimensão e o segundo numa rede a duas dimensões. Em ambos os casos, as observações determinam a geometria da rede mas se se pretenderem as coordenadas ou altitudes dos pontos da rede, é necessário fornecer informação adicional, de forma a obter-se uma rede com constrangimento mínimo, através da fixação do *datum*.

## Topografia Aplicada – monitorização

Exemplo: considere a rede de nivelamento representada na figura 4.13., que contém a marca de nivelamento BM, de cota conhecida (102.251 m) e os pontos 1, 2, 3 cujas cotas  $x_1, x_2, x_3$  se pretende determinar, observando-se para o efeito os desníveis não correlacionados de igual precisão  $\ell_1 = 5.011$  m,  $\ell_2 = 2.989$  m,  $\ell_3 = 8.018$  m,  $\ell_4 = 1.009$  m,  $\ell_5 = 8.992$  m.



Rede de nivelamento

Neste caso o modelo é linear, pelo que não é necessário utilizar um processo iterativo para a determinação da solução a partir de aproximações iniciais dos parâmetros, tendo-se  $n_0 = 3$ ,  $n = 5$ ,  $r = 2$ ,  $u = 3$ ,  $c = r + u$ ,  $P = I$ . O *datum* (altimétrico) ficou estabelecido quando se atribuiu ao ponto BM a cota 102.251 m, tratando-se portanto de uma rede de constrangimento mínimo:



# Topografia Aplicada – monitorização

Modelo geral: é possível estabelecer  $c = 2 + 3 = 5$  equações independentes entre os 3 parâmetros e as 5 observações:

$$\begin{cases} BM + l_1 + v_1 + l_2 + v_2 - x_2 = 0 \\ BM + l_3 + v_3 + l_4 + v_4 - x_3 = 0 \\ BM + l_5 + v_5 - l_4 - v_4 - x_2 = 0 \\ BM + l_3 + v_3 - l_2 - v_2 - x_1 = 0 \\ BM + l_5 + v_5 - l_4 - v_4 - l_2 - v_2 - x_1 = 0 \end{cases}$$

ou, na forma matricial  $B\bar{v} + A\bar{X} + \bar{W} = 0$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 110.251 \\ 111.278 \\ 110.234 \\ 107.280 \\ 107.245 \end{bmatrix} = 0$$

cuja solução é dada por:

$$M = B P^{-1} B^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -4 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$N = A^T M^{-1} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -4 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 0.625 & 0.250 & 0.125 \\ 0.250 & 0.500 & 0.250 \\ 0.125 & 0.250 & 0.625 \end{bmatrix}, \quad U = A^T M^{-1} \bar{W} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 110.251 \\ 111.278 \\ 110.234 \\ 107.280 \\ 107.245 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -104.273 \\ -112.249 \\ -112.252 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X} = -N^{-1}U = \begin{bmatrix} 0.625 & 0.250 & 0.125 \\ 0.250 & 0.500 & 0.250 \\ 0.125 & 0.250 & 0.625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 104.273 \\ 112.249 \\ 112.252 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107.264375 \\ 110.255750 \\ 111.253875 \end{bmatrix} \rightarrow \text{cotas dos pontos 1, 2 e 3}$$

# Topografia Aplicada – monitorização

Modelo paramétrico: é possível estabelecer  $c = 2 + 3 = 5$  equações independentes entre os 3 parâmetros e as 5 observações, contendo cada equação uma única observação, como por exemplo:

$$\begin{cases} \text{BM} + \ell_1 + v_1 - x_1 = 0 \\ x_1 - x_2 + \ell_2 + v_2 = 0 \\ \text{BM} - x_2 + \ell_3 + v_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + \ell_4 + v_4 = 0 \\ \text{BM} - x_3 + \ell_5 + v_5 = 0 \end{cases}$$

ou, na forma matricial,  $\bar{v} + A\bar{X} + \bar{W} = 0$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 107.262 \\ 2.989 \\ 110.269 \\ 1.009 \\ 111.243 \end{bmatrix} = 0$$

cuja solução é dada por:

$$N = A^T P A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 0.625 & 0.250 & 0.125 \\ 0.250 & 0.500 & 0.250 \\ 0.125 & 0.250 & 0.625 \end{bmatrix}$$

$$U = A^T P \bar{W} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 107.262 \\ 2.989 \\ 110.269 \\ 1.009 \\ 111.243 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -104.273 \\ -112.249 \\ -112.252 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X} = -N^{-1}U = \begin{bmatrix} 0.625 & 0.250 & 0.125 \\ 0.250 & 0.500 & 0.250 \\ 0.125 & 0.250 & 0.625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -104.273 \\ -112.249 \\ -112.252 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107.264375 \\ 110.255750 \\ 111.253875 \end{bmatrix} \rightarrow \text{cotas dos pontos 1, 2 e 3}$$

# Topografia Aplicada – monitorização

Modelo condicional: é possível estabelecer  $c = 2 + 0 = 2$  equações independentes entre as 5 observações, como por exemplo:

$$\begin{cases} \ell_1 + v_1 + \ell_2 + v_2 - \ell_3 - v_3 = 0 \\ \ell_3 + v_3 + \ell_4 + v_4 - \ell_5 - v_5 = 0 \end{cases}$$

ou, na forma matricial,  $B\bar{v} + \bar{W} = 0$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.018 \\ 0.035 \end{bmatrix} = 0$$

cuja solução é dada por:

$$M = BP^{-1}B^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{v} P \bar{v} - \bar{W}^T M^{-1} \bar{W} = [-0.018 \quad 0.035] \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.018 \\ 0.035 \end{bmatrix} = 0.000423375$$

$$\bar{k} = -M^{-1}\bar{W} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.018 \\ 0.035 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.002375 \\ -0.010875 \end{bmatrix} \quad \bar{v} = P^{-1}B^T\bar{k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.002375 \\ 0.002375 \\ -0.013250 \\ -0.010875 \\ 0.010875 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\ell}_2 = \bar{\ell}_b + \bar{v} = \begin{bmatrix} 5.013375 \\ 2.991375 \\ 8.004750 \\ 0.998125 \\ 9.002875 \end{bmatrix} \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} 102.251 + 5.013375 \\ 102.251 + 8.004750 \\ 102.251 + 9.002875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107.264375 \\ 110.255750 \\ 111.253875 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{cotas dos pontos 1, 2 e 3}$$

# Topografia Aplicada – monitorização

Método sequencial: considerem-se os dois conjuntos de observações  $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4\}$  e  $\{\ell_5\}$ , com os quais se podem definir os seguintes dois modelos, respectivamente com  $n_1 = 4$ ,  $r_1 = 4 - 3 = 1$ ,  $c_1 = r_1 + u = 1 + 3 = 4$  (com o qual se pode obter uma solução) e  $n_2 = 1$ ,  $r_2 = 1 - 3 = -2$ ,  $c_2 = r_2 + u = -2 + 3 = 1$ :

$$\begin{cases} \text{BM} + \ell_1 + v_1 + \ell_2 + v_2 - x_2 = 0 \\ \text{BM} + \ell_3 + v_3 + \ell_4 + v_4 - x_3 = 0 \\ \text{BM} + \ell_3 + v_3 - x_2 = 0 \\ \text{BM} + \ell_3 + v_3 - \ell_2 - v_2 - x_1 = 0 \end{cases} \quad \text{ou, na forma matricial,}$$

$$\begin{cases} B_1 \bar{v}_1 + A_1 \bar{x} + \bar{W}_1 = 0 \\ B_2 \bar{v}_2 + A_2 \bar{x} + \bar{W}_2 = 0 \end{cases} \quad \text{em que}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{W}_1 = \begin{bmatrix} \text{BM} + \ell_1 + \ell_2 \\ \text{BM} + \ell_3 + \ell_4 \\ \text{BM} + \ell_3 \\ \text{BM} - \ell_2 + \ell_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110.251 \\ 111.278 \\ 110.269 \\ 107.280 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = [1], \quad \bar{v}_2 = [v_5], \quad A_2 = [0 \quad 0 \quad -1], \quad \bar{W}_2 = [\text{BM} + \ell_5] = [111.243] = 111.243.$$

O primeiro conjunto de observações pode ser utilizado para obter uma solução para os parâmetros:

$$M_1 = B_1 B_1^{-1} B_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = A_1^T M_1^{-1} A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \quad U_1 = A_1^T M_1^{-1} \bar{W}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 110.251 \\ 111.278 \\ 110.269 \\ 107.280 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -104.273 \\ -112.249 \\ -1.009 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = -N_1^{-1} U_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -104.273 \\ -112.249 \\ -1.009 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107.268 \\ 110.263 \\ 111.272 \end{bmatrix} \rightarrow \text{cotas dos pontos 1, 2 e 3}$$

# Topografia Aplicada – monitorização

O resultado é naturalmente diferente do exemplo anterior pois agora não se utilizou a totalidade da informação então disponível (os 5 desniveis); incluindo nesta solução a informação correspondente ao segundo conjunto de dados, recorrendo a

$$\begin{bmatrix} A_1^T M_1^{-1} A_1 & A_2^T \\ A_2 & -M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ -\bar{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1^T M_1^{-1} \bar{w}_1 \\ -\bar{w}_2 \end{bmatrix}$$

com  $M_2 = B_2 P_2^{-1} B_2^T = [1] = 1$ , tem-se:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ -\bar{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T M_1^{-1} A_1 & A_2^T \\ A_2 & -M_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -A_1^T M_1^{-1} \bar{w}_1 \\ -\bar{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 104.273 \\ 112.249 \\ 1.009 \\ -111.243 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.625 & 0.250 & 0.125 & -0.125 \\ 0.250 & 0.500 & 0.250 & -0.250 \\ 0.125 & 0.250 & 0.625 & -0.625 \\ -0.125 & -0.250 & -0.625 & -0.375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 104.273 \\ 112.249 \\ 1.009 \\ -111.243 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107.264375 \\ 110.255750 \\ 111.253875 \\ -0.010875 \end{bmatrix} \rightarrow \text{cotas dos pontos 1, 2 e 3}$$

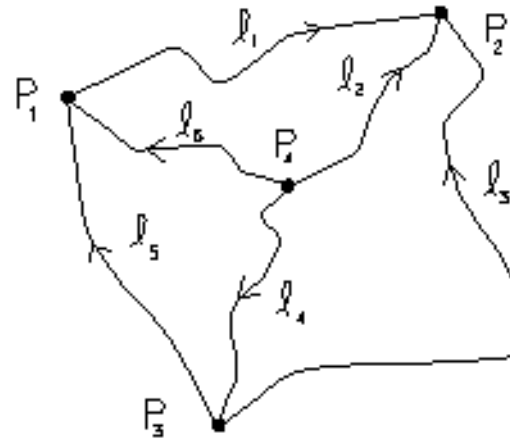
e  $k_2$ ,

obtendo-se a mesma solução que no caso anterior.

# Topografia Aplicada – monitorização

Exemplo: foram observados os 6 desníveis  $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$  com  $P_{6,6} = I_{6,6}$ , sendo os parâmetros as altitudes  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$  dos 4 pontos  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$ . Podem estabelecer-se as seguintes 6 equações entre as 6 observações e os 4 parâmetros ( $n_0=4, n=6, r=n-n_0=2, u=4, c=r+u=6$ ):

$$\begin{cases} l_1 + v_1 = -C_1 + C_2 \\ l_2 + v_2 = C_2 - C_4 \\ l_3 + v_3 = C_2 - C_3 \\ l_4 + v_4 = C_3 - C_4 \\ l_5 + v_5 = C_1 - C_3 \\ l_6 + v_6 = C_1 - C_4 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} l_1 &= 1.2 \text{ mm} \\ l_2 &= 1.6 \text{ mm} \\ l_3 &= 1.7 \text{ mm} \\ l_4 &= 1.2 \text{ mm} \\ l_5 &= 2.1 \text{ mm} \\ l_6 &= 1.3 \text{ mm} \end{aligned}$$

figura 4.16.: Problema do datum geodésico a 1-d

ou, na forma matricial,  $\bar{l}_{6,1} + \bar{v}_{6,1} = A_{6,4} \bar{x}_{4,1}$ , com

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \text{matriz dos coeficientes dos parâmetros, } \bar{x} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \text{vector dos parâmetros}$$



## Topografia Aplicada – monitorização

A característica  $C(A)$  da matriz  $A$  é igual ao número máximo de linhas ou colunas linearmente independentes, sendo igual a 3 (por exemplo, a 1ª coluna é igual à soma dos simétricos das 3 restantes colunas), isto é, existe um vector  $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)^T$  em que pelo menos um dos  $\lambda_i \neq 0$  e tal que  $A\vec{\lambda} = 0$

Designa-se por **núcleo** da aplicação  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  definida pela matriz  $A$  ao subespaço  $N(A) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 : A\vec{x} = \vec{0} \}$ , cuja dimensão  $d$  tem o nome de nulidade ou *deficit* de característica de  $A$ , de tal forma que  $d = \dim(A) - C(A) = 4 - 3 = 1$ .

A matriz 4x4 das equações normais  $N = (A^T P A)$ , dada por

$$N = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

tem característica igual a 3 e portanto é **singular**, não tendo inversa, pelo que é impossível estimar as altitudes a partir da equação  $\vec{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P \vec{\ell}$ , o que traduz o facto de qualquer translação em altitude dos 4 pontos manter os desníveis observados, não sendo no entanto possível calcular as cotas dos pontos de forma unívoca. O *deficit* de característica é eliminado definindo um *datum*, isto é, introduzindo uma quantidade independente fixando a altitude de (qualquer) um dos pontos, o que permite a inversão da matriz normal (impõe-se portanto um constrangimento mínimo para a rede).

O método clássico de ajustamento de uma rede livre bidimensional consiste em estabelecer o *datum* fixando, no caso de se medirem direcções e distâncias, um ponto e uma direcção para um segundo ponto e no caso de se medirem apenas direcções, dois pontos, deixando desta forma a rede de ser livre para translações, rotações e escalamentos, ou seja, fixam-se, no máximo quatro parâmetros. Numa rede tridimensional estabelece-se o *datum* fixando, no máximo, sete parâmetros e numa rede a uma dimensão (rede de nivelamento) fixam-se, no máximo, dois parâmetros.

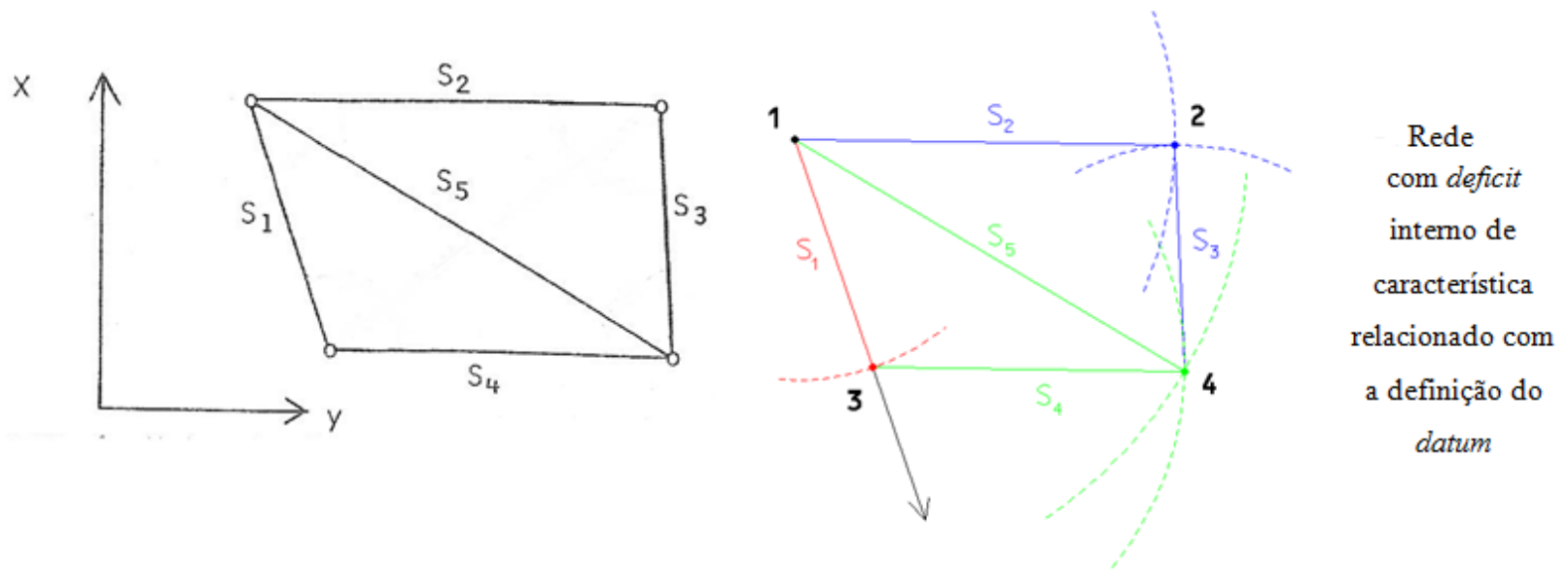
## Topografia Aplicada – monitorização

Analizando o eventual *deficit*  $d$  de característica da matriz  $A_{n \times u}$ , podem ser distinguidas causas externas, relacionadas com o estabelecimento do *datum* e internas, relacionadas com deficiências de configuração da rede. O *deficit* de característica relacionado com o datum é identificado através do *deficit* de característica  $C_{\text{datum}}$  da matriz  $A_{n \times u}$ , isto é, da diferença entre o número de parâmetros e o número de colunas linearmente independentes de  $A_{n \times u}$ :  $d_{\text{datum}} = u - C_{\text{datum}}$ .

O *deficit* de característica relacionado com a configuração tem como consequência que nem todos os pontos da rede podem ser determinados: designando por  $C_{\text{configuração}}$  a característica de configuração, definida como o número  $n^\ell$  de linhas linearmente independentes da matriz  $A_{n \times u}$ , tem-se  $n^\ell = u - d_{\text{datum}}$ , o que significa que são necessárias e suficientes  $n^\ell$  observações independentes entre si para determinar a rede. Se existirem  $n$  observações independentes com  $n \leq n^\ell$ , há um *deficit* de característica  $d_{\text{configuração}} = n^\ell - n$ , com  $C_{\text{configuração}} = n^\ell - d_{\text{configuração}}$ .

# Topografia Aplicada – monitorização

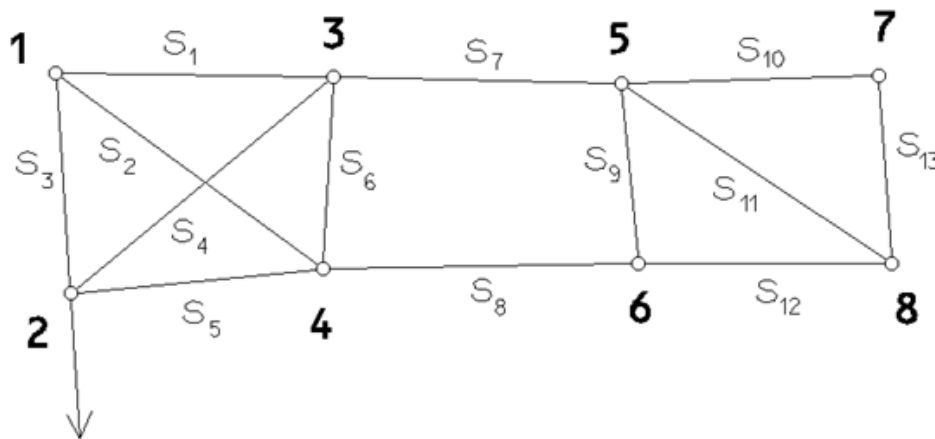
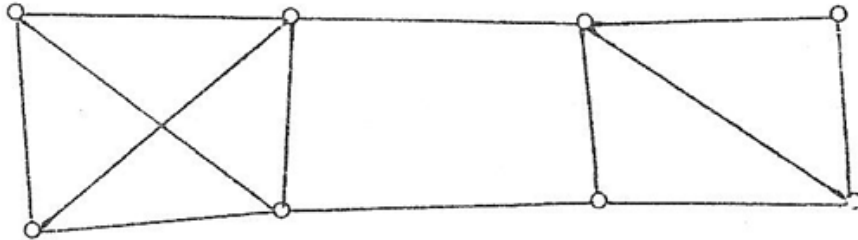
1) Rede com *deficit* externo de característica relacionado com a definição do *datum*:



Pretende-se obter as coordenadas planas dos quatro pontos que constituem a rede, pelo que  $u = 8$ ; tendo sido efectuadas 5 observações de distância  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$ , ou seja,  $n=5$ , tem-se  $d_{\text{datum}} = 8 - 5 = 3$ , pelo que a rede é livre, sendo necessário fixar as coordenadas de um ponto (2 parâmetros correspondentes a uma translação no plano) e uma direcção (1 parâmetro correspondente a uma rotação no plano), o suficiente para que  $d = 0$ , pois a escala da rede é fixada pelas próprias observações de distância.

# Topografia Aplicada – monitorização

2) Rede com *deficit* interno de característica relacionado com a configuração da rede:



Rede com *deficit* interno de característica relacionado com a configuração da rede

$$u=8*2=16; n=13; d=16-13=3$$

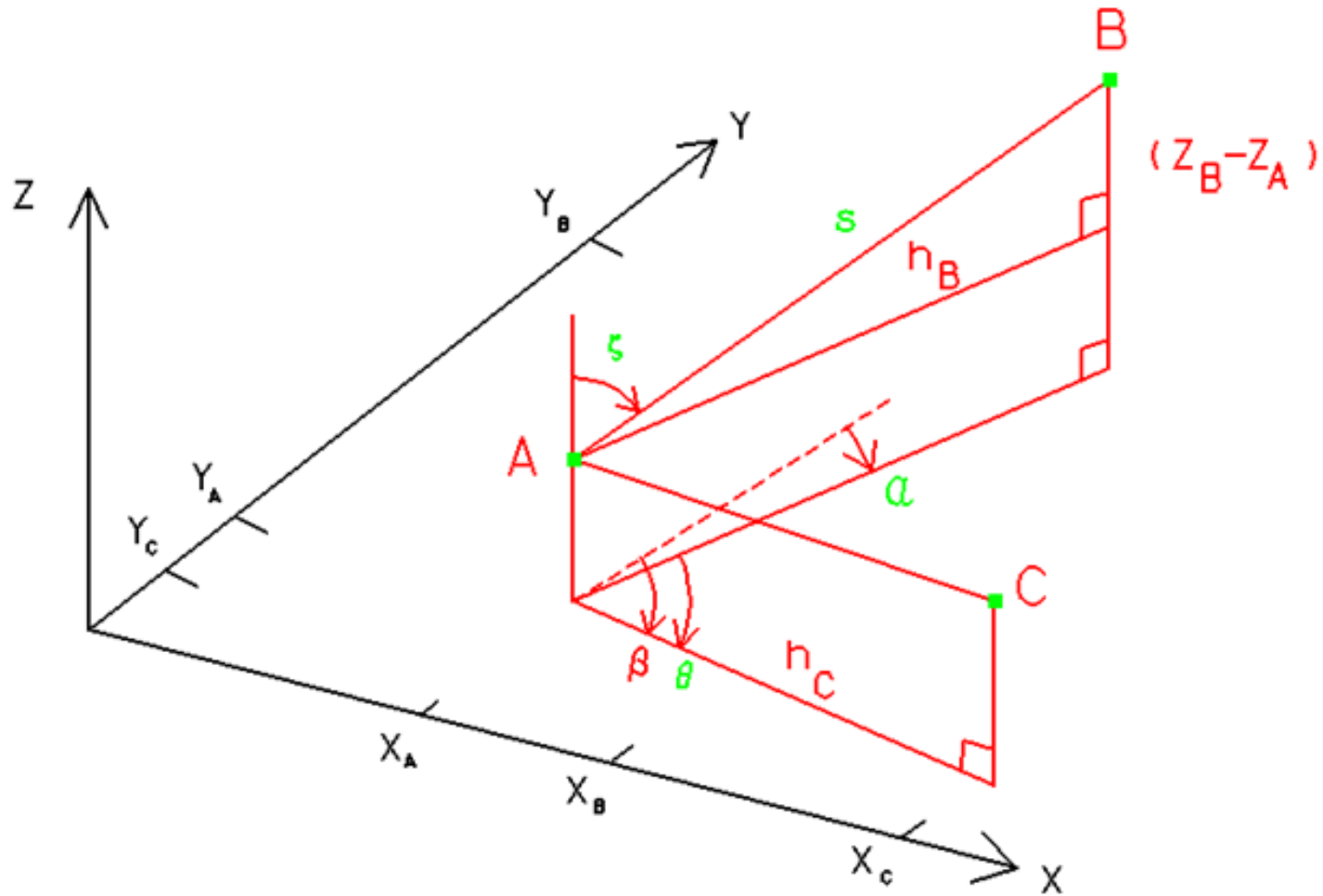
Tendo sido efectuadas as **13 observações de distância** indicadas na figura, para se obter as coordenadas dos **8 pontos** da rede é necessário definir um *datum*; supondo que se fixam arbitrariamente as coordenadas do ponto 1 e que se fixa a direcção do ponto 1 para o ponto 2 (3 parâmetros no total), obtêm-se em primeiro lugar as coordenadas do ponto 2 (com S<sub>3</sub>) e em seguida as coordenadas dos pontos 3 e 4, podendo ser utilizadas diversas combinações de S<sub>1</sub>, S<sub>2</sub>, S<sub>4</sub>, S<sub>5</sub> e S<sub>6</sub> (com redundância, portanto). Para passar das coordenadas dos pontos 3 e 4 para os pontos 5 e 6 verifica-se que falta uma observação (de 3 para 6 ou de 4 para 5), pelo que a figura não pode ser completamente calculada.

## Topografia Aplicada – monitorização

Pretende-se obter as coordenadas planas dos oito pontos que constituem a rede, pelo que  $u = 16$ ; tendo sido efectuadas 13 observações de distância ou seja,  $n = 13$ , tem-se  $d = 16 - 13 = 3$ , pelo que a rede é livre, sendo necessário fixar as coordenadas de um ponto (2 parâmetros correspondentes a uma translação no plano) e uma direcção (1 parâmetro correspondente a uma rotação no plano), o suficiente para que  $d = 0$ , pois a escala da rede é fixada pelas próprias observações de distância. Tem-se, no entanto, que nem todas as 13 observações são independentes, pelo que, mesmo fixando o *datum*, o *deficit* de característica é igual a 1.



# Topografia Aplicada – monitorização



· Representação gráfica das medições de distância inclinada  $s$ , rumo  $\alpha$ , ângulo azimutal  $\theta$  e ângulo zenital  $\zeta$

# Topografia Aplicada – monitorização

1. Equação de observação para a distância inclinada s: se a distância inclinada  $s$  entre os pontos  $A(X_A, Y_A, Z_A)$  e  $B(X_B, Y_B, Z_B)$  for medida, o modelo funcional é  $F(\bar{x}, \bar{l}) = [(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2]^{1/2} - s = 0$ , onde  $\bar{x} = [X_A \ Y_A \ Z_A \ X_B \ Y_B \ Z_B]^T$  e  $\bar{l} = [-s]$ . Sendo  $[X_0^A \ Y_0^A \ Z_0^A \ X_0^B \ Y_0^B \ Z_0^B]^T$  valores aproximados para as coordenadas dos 2 pontos,  $\Delta \bar{x}_{s-1} = [\delta X_A \ \delta Y_A \ \delta Z_A \ \delta X_B \ \delta Y_B \ \delta Z_B]^T$  as correcções introduzidas nas coordenadas durante as sucessivas iterações do ajustamento, então

$$A_{1 \times 6} \delta \bar{x} = B \left[ \frac{\partial F}{\partial s} \right] = [-1]$$

$$A_{1 \times 6} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial X_A} \\ \frac{\partial F}{\partial Y_A} \\ \frac{\partial F}{\partial Z_A} \\ \frac{\partial F}{\partial X_B} \\ \frac{\partial F}{\partial Y_B} \\ \frac{\partial F}{\partial Z_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_A - X_B}{[(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2]^{1/2}} \\ \frac{Y_A - Y_B}{[(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2]^{1/2}} \\ \frac{Z_A - Z_B}{[(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2]^{1/2}} \\ \frac{X_B - X_A}{[(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2]^{1/2}} \\ \frac{Y_B - Y_A}{[(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2]^{1/2}} \\ \frac{Z_B - Z_A}{[(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2]^{1/2}} \end{bmatrix}$$

e a equação linearizada tem a forma  $A \Delta \bar{x} + B \bar{v} - s + s_0 = 0$  ou

$$\frac{X_A^0 - X_B^0}{s_0} \delta X_A + \frac{Y_A^0 - Y_B^0}{s_0} \delta Y_A + \frac{Z_A^0 - Z_B^0}{s_0} \delta Z_A + \frac{X_B^0 - X_A^0}{s_0} \delta X_B + \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{s_0} \delta Y_B + \frac{Z_B^0 - Z_A^0}{s_0} \delta Z_B - s - s_0 + v$$

com  $s_0 = [(X_0^A - X_0^B)^2 + (Y_0^A - Y_0^B)^2 + (Z_0^A - Z_0^B)^2]^{1/2}$  sendo a distância espacial calculada entre os dois pontos a partir dos valores aproximados das coordenadas.

# Topografia Aplicada – monitorização

## 2. Equação da observação para o rumo $\alpha$ :

Se o rumo  $\alpha$  entre os pontos  $A(X_A, Y_A, Z_A)$  e  $B(X_B, Y_B, Z_B)$  for medido, o modelo funcional é

$$F(\bar{x}, \bar{\ell}) = \alpha - \tan^{-1} \frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A} - \alpha = 0$$

onde  $\bar{x} = [X_A \ Y_A \ X_B \ Y_B]^T$  e  $\bar{\ell} = [-\alpha]$ . Sendo  $[X_A^0 \ Y_A^0 \ X_B^0 \ Y_B^0]^T$  valores aproximados para as coordenadas dos 2 pontos e  $\bar{\Delta}_{4,1} = [\delta X_A \ \delta Y_A \ \delta X_B \ \delta Y_B]^T$  as correcções introduzidas nas coordenadas durante as sucessivas iterações do ajustamento e, lembrando que  $\frac{\partial}{\partial x} \alpha \tan u = \frac{1}{1+u^2} \frac{\partial u}{\partial x}$ , tem-se

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial X_A} \\ \frac{\partial F}{\partial Y_A} \\ \frac{\partial F}{\partial X_B} \\ \frac{\partial F}{\partial Y_B} \end{bmatrix}^{-T} = \begin{bmatrix} -\frac{Y_B - Y_A}{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \\ \frac{X_B - X_A}{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \\ \frac{Y_B - Y_A}{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \\ -\frac{X_B - X_A}{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \end{bmatrix}^{-T} \quad B = \left[ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right] = [-1]$$

□

e a equação linearizada tem a forma  $A\bar{\Delta} + Bv = \alpha - \alpha_0 = 0$

ou

$$-\frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}} \delta X_A + \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}} \delta Y_A + \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}} \delta X_B - \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}} \delta Y_B = (\alpha - \alpha_0) + v$$

com  $h_{0AB}^2 = (X_A^0 - X_B^0)^2 + (Y_A^0 - Y_B^0)^2$  sendo a distância horizontal entre os dois pontos A e B calculada a partir dos valores aproximados das coordenadas.

# Topografia Aplicada – monitorização

3. Equação de observação para o ângulo azimutal  $\theta$ : se o ângulo azimutal  $\theta$  for medido no ponto A, no sentido retrógrado, de B para C, então  $\theta = \beta - \alpha$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são os rumos de AC e AB, respectivamente. O modelo funcional é:

$$F(\bar{x}, \bar{\ell}) = \alpha \tan \frac{X_C - X_A}{Y_C - Y_A} - \alpha \tan \frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A} - \theta = 0$$

onde  $\bar{x} = [X_A \ Y_A \ X_B \ Y_B \ X_C \ Y_C]^T$ ,  $\bar{\ell} = [-\theta]$ . Sendo  $[X_A^0 \ Y_A^0 \ X_B^0 \ Y_B^0 \ X_C^0 \ Y_C^0]^T$  valores aproximados para as coordenadas dos 3 pontos e  $\bar{\Delta}_{\delta-1} = [\delta X_A \ \delta Y_A \ \delta X_B \ \delta Y_B \ \delta X_C \ \delta Y_C]^T$  as correcções introduzidas nas coordenadas durante as sucessivas iterações do ajustamento:

$$A_{1 \times 6} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial X_A} \\ \frac{\partial F}{\partial Y_A} \\ \frac{\partial F}{\partial X_B} \\ \frac{\partial F}{\partial Y_B} \\ \frac{\partial F}{\partial X_C} \\ \frac{\partial F}{\partial Y_C} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\frac{Y_C - Y_A}{(X_C - X_A)^2 + (Y_C - Y_A)^2} + \frac{Y_B - Y_A}{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \\ \frac{X_C - X_A}{(X_C - X_A)^2 + (Y_C - Y_A)^2} - \frac{X_B - X_A}{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \\ -\frac{Y_B - Y_A}{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \\ \frac{X_B - X_A}{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \\ \frac{Y_C - Y_A}{(X_C - X_A)^2 + (Y_C - Y_A)^2} \\ -\frac{X_C - X_A}{(X_C - X_A)^2 + (Y_C - Y_A)^2} \end{bmatrix} B = \left[ \frac{\partial F}{\partial \theta} \right] = [-1]$$

a equação linearizada tem a forma  $A\bar{\Delta} + Bv - \theta + \theta_0 = 0$  ou

$$\left( \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{\delta AB}^0} - \frac{Y_C^0 - Y_A^0}{h_{\delta AC}^0} \right) \delta X_A + \left( \frac{X_C^0 - X_A^0}{h_{\delta AC}^0} - \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{\delta AB}^0} \right) \delta Y_A - \frac{(Y_B^0 - Y_A^0)}{h_{\delta AB}^0} \delta X_B + \frac{(X_B^0 - X_A^0)}{h_{\delta AB}^0} \delta Y_B + \frac{(Y_C^0 - Y_A^0)}{h_{\delta AC}^0} \delta X_C - \frac{(X_C^0 - X_A^0)}{h_{\delta AC}^0} \delta Y_C -$$

$$\theta - \theta_0 + v$$

com  $h_{\delta AB}^0 = (X_B^0 - X_A^0)^2 + (Y_B^0 - Y_A^0)^2$  e  $h_{\delta AC}^0 = (X_C^0 - X_A^0)^2 + (Y_C^0 - Y_A^0)^2$  sendo a distância horizontal entre os dois pontos A e B e entre os pontos A e C calculada a partir dos valores aproximados das coordenadas.

# Topografia Aplicada – monitorização

4. Equação de observação para o ângulo zenital  $\zeta$ : sendo  $\zeta$  o ângulo zenital medido entre A e B, o modelo funcional é:

$$F(\bar{x}, \bar{l}) = s \cos \left[ \frac{Z_B - Z_A}{\sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2}} \right] - \zeta = 0$$

onde  $\bar{x} = [X_A \ Y_A \ Z_A \ X_B \ Y_B \ Z_B]^T$  e  $\bar{l} = [-\zeta]$ ; sendo  $(X_A^0, Y_A^0, Z_A^0, X_B^0, Y_B^0, Z_B^0)$  valores aproximados para as coordenadas dos 2 pontos e  $\bar{\Delta}_{s-1} = [\delta X_A \ \delta Y_A \ \delta Z_A \ \delta X_B \ \delta Y_B \ \delta Z_B]^T$  as correcções introduzidas nas coordenadas

durante as sucessivas iterações do ajustamento, tem-se, lembrando que  $\frac{\partial}{\partial x} s \cos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{\partial u}{\partial x}$ :

$$A_{1 \times 6} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial X_A} \\ \frac{\partial F}{\partial Y_A} \\ \frac{\partial F}{\partial Z_A} \\ \frac{\partial F}{\partial X_B} \\ \frac{\partial F}{\partial Y_B} \\ \frac{\partial F}{\partial Z_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_B - Z_A}{\sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}} \frac{X_A - X_B}{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2} \\ \frac{Z_B - Z_A}{\sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}} \frac{Y_A - Y_B}{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2} \\ -\frac{\sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}}{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2} \\ \frac{Z_B - Z_A}{\sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}} \frac{X_A - X_B}{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2} \\ \frac{Z_B - Z_A}{\sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}} \frac{Y_A - Y_B}{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2} \\ \frac{\sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}}{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2} \end{bmatrix} \quad B = \left[ \frac{\partial F}{\partial \zeta} \right] =$$

a equação linearizada tem a forma  $A\bar{\Delta} + Bv - \zeta + \zeta_0 = 0$  ou

$$-\frac{X_B^0 - X_A^0}{s_0^0 \tan \zeta_0} \delta X_A - \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{s_0^0 \tan \zeta_0} \delta Y_A + \frac{h_0}{s_0^0} \delta Z_A + \frac{X_B^0 - X_A^0}{s_0^0 \tan \zeta_0} \delta X_B + \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{s_0^0 \tan \zeta_0} \delta Y_B - \frac{h_0}{s_0^0} \delta Z_B - \zeta - \zeta_0 + v$$

# Topografia Aplicada – monitorização

## 5. Equação de observação para a direcção azimutal $\ell$ :

Se  $\ell$  for a direcção azimutal observada no ponto A para o ponto B, tem-se:

$$R_{AB}^{\text{ajustado}} = R_{AB}^{\text{calculado}} - \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} \delta X_A + \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \delta Y_A + \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} \delta X_B - \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \delta Y_B,$$

correspondendo estes últimos termos à variação do rumo de A para B para pequenos deslocamentos de A e B. Tem-se, por outro lado:

$$R_{AB}^{\text{ajustado}} = \ell + R_A^0$$

onde  $R_A^0$  é o rumo do zero da graduação azimutal na estação A. Assim:

$$R_{AB}^{\text{calculado}} - \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} \delta X_A + \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \delta Y_A + \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} \delta X_B - \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \delta Y_B = \ell + R_A^0.$$

Pondo  $R_A^0 = \bar{R}_A^0 + \delta R_A^0$ , tem-se:

$$-\delta R_A^0 - \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} \delta X_A + \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \delta Y_A + \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} \delta X_B - \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \delta Y_B = \ell + \bar{R}_A^0 - R_{AB}^{\text{calculado}}$$

em que a incógnita  $\delta R_A^0$  é a mesma para todas as direcções definidas a partir da estação A.

# Topografia Aplicada – monitorização

Observáveis	$t_x$	$t_y$	$r_z$	$s$
Distâncias	---	---	---	<b>x</b>
Ângulos azimutais	---	---	---	---
Azimutes	---	---	<b>x</b>	---
Posições	<b>x</b>	<b>x</b>	<b>x</b>	<b>x</b>
Diferenças de posições	---	---	<b>x</b>	<b>x</b>

Informação contida nas observações geodésicas úteis para a definição dos parâmetros do *datum* 2D:  $t_x$  e  $t_y$  definem a translação em relação ao referencial (x,y) adoptado,  $r_z$  define a rotação em relação ao eixo z e  $s$  define a escala

redes { sem constrangimento mínimo (livres) :  $d > 0$   
 com constrangimento mínimo  $d = 0, s = 0$  { com pontos fixos  
 sem pontos fixos  
 com constrangimentos (redes constrangidas) :  $d = 0, s > 0$



# Topografia Aplicada – monitorização

## Definição de um datum através de uma base com variância nula

Considerando uma rede geodésica representada pelo modelo  $\bar{l}^{n \times 1} + \bar{v}^{n \times 1} = A^{n \times n} \bar{x}^{n \times 1}$ , onde a matriz A tem *deficit* de característica igual a d, a forma convencional de definir o datum consiste em eliminar a(s) coluna(s) da matriz A dos coeficientes dos parâmetros que se refere(m) ao(s) parâmetro(s) considerado(s) fixo(s) e portanto cuja variância é nula, isto é, no decorrer do processo iterativo não há alteração do valor desse(s) parâmetro(s).

Se o modelo anterior sofrer uma partição segundo este conceito, ou seja,  $[\bar{x}]^T = [\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2]^T$ , em que se supõe para simplificar a escrita que os parâmetros que se fixam ocupam as últimas d posições do vector dos parâmetros, (o que significa que as coordenadas aproximadas de  $\bar{x}_2$  permanecem inalteradas durante o processo iterativo) :

$$\bar{l}^{n \times 1} + \bar{v}^{n \times 1} = A^{n \times n} \bar{x}^{n \times 1} = \begin{bmatrix} A_1^{n \times (n-d)} & A_2^{n \times d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1^{(n-d) \times 1} \\ \bar{x}_2^{d \times 1} \end{bmatrix} = A_1^{n \times (n-d)} \bar{x}_1^{(n-d) \times 1} + A_2^{n \times d} \bar{x}_2^{d \times 1}$$

onde as d componentes de  $\bar{x}_2$  definem o datum. As colunas da matriz  $A_2$ , em número d, são uma combinação linear das colunas da matriz  $A_1$ , ou seja, existe uma matriz L tal que

$$A_1^{n \times (n-d)} L^{(n-d) \times d} = A_2^{n \times d} \quad \text{isto é,} \quad A_1^{n \times (n-d)} L^{(n-d) \times d} - A_2^{n \times d} = \begin{bmatrix} A_1^{n \times (n-d)} & A_2^{n \times d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^{(n-d) \times d} \\ -I_{d \times d} \end{bmatrix} = 0,$$

com  $I_d$  sendo a matriz identidade de dimensão d, o que é uma generalização da relação  $A\bar{v} = \bar{0}$ . Utilizando a expressão anterior, tem-se:

$$\bar{l}^{n \times 1} + \bar{v}^{n \times 1} = A_1^{n \times (n-d)} \bar{x}_1^{(n-d) \times 1} + A_1^{n \times (n-d)} L^{(n-d) \times d} \bar{x}_2^{d \times 1}, \quad \text{ou} \quad \bar{l}^{n \times 1} + \bar{v}^{n \times 1} = A_1^{n \times (n-d)} L^{(n-d) \times d} \bar{x}_2^{d \times 1} - A_1^{n \times (n-d)} \bar{x}_1^{(n-d) \times 1}$$

que é um modelo de característica completa ou regular (não singular, portanto) cuja solução é dada por:

$$\delta \bar{x}_2^{d \times 1} = \bar{0} \quad (\text{parâmetros fixos ao longo do ajustamento})$$

$$Q_{\bar{x}_2} = 0 \quad (\text{variância zero para os parâmetros considerados fixos})$$

$$\bar{x}_1^{(n-d) \times 1} = \left( A_1^T L^{(n-d) \times n} P^{n \times n} A_1^{n \times (n-d)} \right)^{-1} A_1^T L^{(n-d) \times n} P^{n \times n} (\bar{l}^{n \times 1} - A_2 \bar{x}_2)$$

$$Q_{\bar{x}_1} = \left( A_1^T P A_1 \right)^{-1}$$

$$Q_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} = 0$$

# Topografia Aplicada – monitorização

Mantendo a altitude do ponto  $P_4$  fixa ao longo do ajustamento, por exemplo 101.0000 m (utilizando um valor arbitrário ou ligando a rede local à rede nacional através de nivelamento geométrico a partir de uma marca de nivelamento), este ponto é escolhido como *datum* numa rede de constrangimento mínimo. Isto traduz-se em que a 4ª coluna da matriz  $A$ , referente a  $x_4$ , é eliminada, obtendo-se a seguinte matriz  $A_1$  com *deficit* de característica  $d=0$ :

$$A^{6,4} = \begin{bmatrix} A_1^{6,3} & A_2^{6,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_{4,1} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1^{3,1} \\ \bar{x}_2^{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}, \quad C_4 = 101.0000 \text{ m.}$$

Para obter a estimativa do vector dos parâmetros utiliza-se a expressão  $\bar{x}_1^{3,1} = (A_1^{3,6T} I_{6,6} A_1^{6,3})^{-1} A_1^{3,6T} P_{6,6} (\bar{l}^{6,1} - A_2^{6,1} \bar{x}_2^{1,1})$  juntamente com a informação estatística seguinte, isto é:

$$\bar{x}_2 = [101.0000], \quad L = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 100.9976 \\ 100.9982 \\ 100.9991 \end{bmatrix} \rightarrow \text{cotas dos pontos } P_1, P_2 \text{ e } P_3,$$

$$Q_{\text{par}} = 1.0 \times 10^{-6} \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.2500 & 0.2500 \\ 0.2500 & 0.5000 & 0.2500 \\ 0.2500 & 0.2500 & 0.5000 \end{bmatrix}, \quad \bar{v} = 1.0 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.6000 \\ -0.1000 \\ 0.7000 \\ -0.3000 \\ -0.3000 \\ -0.4000 \end{bmatrix}, \quad Q_{\text{res}} = 1.0 \times 10^{-6} \begin{bmatrix} 0.5000 & -0.2500 & -0.2500 & 0.2500 & 0.2500 & 0 \\ -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 & -0.2500 & 0 & 0.2500 \\ -0.2500 & -0.2500 & 0.5000 & 0 & -0.2500 & -0.2500 \\ 0.2500 & -0.2500 & 0 & 0.5000 & -0.2500 & 0.2500 \\ 0.2500 & 0 & -0.2500 & -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 \\ 0 & 0.2500 & -0.2500 & 0.2500 & -0.2500 & 0.5000 \end{bmatrix},$$

$$\bar{l}_{\text{ajus}} = \begin{bmatrix} 0.0006 \\ 0.0015 \\ 0.0024 \\ 0.0009 \\ 0.0018 \\ 0.0009 \end{bmatrix}, \quad Q_{\text{obs ajust}} = 1.0 \times 10^{-6} \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.2500 & 0.2500 & -0.2500 & -0.2500 & 0 \\ 0.2500 & 0.5000 & 0.2500 & 0.2500 & 0 & -0.2500 \\ 0.2500 & 0.2500 & 0.5000 & 0 & 0.2500 & 0.2500 \\ -0.2500 & 0.2500 & 0 & 0.5000 & 0.2500 & -0.2500 \\ -0.2500 & 0 & 0.2500 & 0.2500 & 0.5000 & 0.2500 \\ 0 & -0.2500 & 0.2500 & -0.2500 & 0.2500 & 0.5000 \end{bmatrix}.$$

$$v^T v = 1.2 \text{ mm}^2, \quad s_0^2 = \frac{v^T v}{n - u + d} = \frac{1.2 \text{ mm}^2}{6 - 4 + 1} = 0.4 \text{ mm}^2, \quad \text{tr}(Q_{\text{par}}) = 1.5 \times 10^{-6}, \quad \Sigma_{\text{par}} = s_0^2 Q_{\text{par}}.$$

# Topografia Aplicada – monitorização

Considere-se o ponto  $P_1$  como *datum*, ao qual se vai atribuir a cota 202.0000 m (ou qualquer outro valor definido de forma arbitrária (como por exemplo a cota obtida para  $P_1$  no cálculo precedente, 100.9977 m) ou através de nivelamento geométrico a partir de uma marca de nivelamento da rede nacional):

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_2 = [202.0000], \quad L = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_{obs} = 1.0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4444 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1600 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.08166 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 202.0010 \\ 202.0017 \\ 202.0023 \end{bmatrix} \rightarrow \text{cotas dos pontos } P_2, P_3 \text{ e } P_4,$$

$$Q_{par} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0837 & 0.0225 & 0.0252 \\ 0.0225 & 0.1551 & 0.0342 \\ 0.0252 & 0.0342 & 0.2385 \end{bmatrix}, \quad \bar{v} = 1.0 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.1798 \\ 0.0722 \\ 0.5910 \\ -0.5480 \\ -0.8292 \\ -0.6812 \end{bmatrix}$$

$$Q_{res} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0163 & -0.0225 & -0.0252 & 0.0612 & 0.0585 & -0.0026 \\ -0.0225 & 0.0699 & -0.0342 & -0.1326 & -0.0117 & 0.1208 \\ -0.0252 & -0.0342 & 0.1615 & -0.0091 & -0.2133 & -0.2042 \\ 0.0612 & -0.1326 & -0.0091 & 0.4312 & -0.0703 & 0.1235 \\ 0.0585 & -0.0117 & -0.2133 & -0.0703 & 0.6281 & -0.2016 \\ -0.0026 & 0.1208 & -0.2042 & 0.1235 & -0.2016 & 0.8999 \end{bmatrix}, \quad \bar{z}_{ajus} = \begin{bmatrix} 0.0010 \\ 0.0017 \\ 0.0023 \\ 0.0007 \\ 0.0013 \\ 0.0006 \end{bmatrix},$$

$$Q_{obs\ ajus} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0837 & 0.0225 & 0.0252 & -0.0612 & -0.0585 & 0.0026 \\ 0.0225 & 0.1551 & 0.0342 & 0.1326 & 0.0117 & -0.1208 \\ 0.0252 & 0.0342 & 0.2385 & 0.0091 & 0.2133 & 0.2042 \\ -0.0612 & 0.1326 & 0.0091 & 0.1938 & 0.0703 & -0.1235 \\ -0.0585 & 0.0117 & 0.2133 & 0.0703 & 0.2719 & 0.2016 \\ 0.0026 & -0.1208 & 0.2042 & -0.1235 & 0.2016 & 0.3251 \end{bmatrix}.$$

$$u^T u = 1.84 \text{ mm}^2, \quad s_0^2 = \frac{u^T u}{n - u + d} = \frac{1.84 \text{ mm}^2}{6 - 4 + 1} = 0.61 \text{ mm}^2, \quad \text{tr}(Q_{par}) = 0.4773 \times 10^{-5}, \quad \Sigma_{par} = s_0^2 Q_{par}.$$

# Topografia Aplicada – monitorização

Caso se considere que as observações são não correlacionadas mas de precisão diferente, uma situação mais comum, tem-se, por exemplo para a seguinte matriz de variâncias-covariâncias:

$$\Sigma_{\text{obs}} = 1.0 \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0225 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0900 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1225 \end{bmatrix} \text{ m}^2, \quad Q_{\text{obs}} = 1.0 \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0225 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0900 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1225 \end{bmatrix} \text{ m}^2$$

$$P_{\text{obs}} = 1.0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4444 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1600 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.08166 \end{bmatrix}, \quad N_{4,4} = A_{4,6}^T P_{6,6} A_{6,4} = 1.0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1.6944 & -1.0000 & -0.4444 & -0.2500 \\ -1.0000 & 1.2711 & -0.1600 & -0.1111 \\ -0.4444 & -0.1600 & 0.6861 & -0.0816 \\ -0.2500 & -0.1111 & -0.0816 & 0.4427 \end{bmatrix}$$

que sendo singular, não é invertível ( $d=4-3=1$ ).

Mantendo o ponto  $P_4$  como *datum*, com cota igual a 101.0000 m, tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_2 = [101.0000], \quad L = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 100.9977 \\ 100.9987 \\ 100.9994 \end{bmatrix} \rightarrow \text{cotas dos pontos } P_1, P_2 \text{ e } P_3,$$

$$Q_{\text{par}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.2385 & 0.2133 & 0.2042 \\ 0.2133 & 0.2719 & 0.2016 \\ 0.2042 & 0.2016 & 0.3251 \end{bmatrix}, \quad \bar{u} = 1.0 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.1798 \\ 0.0722 \\ 0.5910 \\ -0.5480 \\ -0.8292 \\ -0.6812 \end{bmatrix}, \quad Q_{\text{res}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0163 & -0.0225 & -0.0252 & 0.0612 & 0.0585 & -0.0026 \\ -0.0225 & 0.0699 & -0.0342 & -0.1326 & -0.0117 & 0.1208 \\ -0.0252 & -0.0342 & 0.1615 & -0.0091 & -0.2133 & -0.2042 \\ 0.0612 & -0.1326 & -0.0091 & 0.4312 & -0.0703 & 0.1235 \\ 0.0585 & -0.0117 & -0.2133 & -0.0703 & 0.6281 & -0.2016 \\ -0.0026 & 0.1208 & -0.2042 & 0.1235 & -0.2016 & 0.8999 \end{bmatrix}$$

$$\bar{z}_{\text{ajus}} = \begin{bmatrix} 0.0010 \\ 0.0017 \\ 0.0023 \\ 0.0007 \\ 0.0013 \\ 0.0006 \end{bmatrix}, \quad Q_{\text{obs ajust}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0837 & 0.0225 & 0.0252 & -0.0612 & -0.0585 & 0.0026 \\ 0.0225 & 0.1551 & 0.0342 & 0.1326 & 0.0117 & -0.1208 \\ 0.0252 & 0.0342 & 0.2385 & 0.0091 & 0.2133 & 0.2042 \\ -0.0612 & 0.1326 & 0.0091 & 0.1938 & 0.0703 & -0.1235 \\ -0.0585 & 0.0117 & 0.2133 & 0.0703 & 0.2719 & 0.2016 \\ 0.0026 & -0.1208 & 0.2042 & -0.1235 & 0.2016 & 0.3251 \end{bmatrix}$$

$$u^T u = 1.84 \text{ mm}^2, \quad s_0^2 = \frac{u^T u}{n - u + d} = \frac{1.84 \text{ mm}^2}{6 - 4 + 1} = 0.61 \text{ mm}^2, \quad \text{tr}(Q_{\text{par}}) = 0.8355 \times 10^{-5}, \quad \Sigma_{\text{par}} = s_0^2 Q_{\text{par}}$$

Como se poderia prever, a mudança nos pesos das observações teve consequências não só a nível dos valores obtidos para os parâmetros como para toda a informação estatística associada, em particular a relativa à matriz cofactor dos parâmetros (razão pela qual é necessário um cuidado especial na atribuição dos pesos correctos às observações).

# Topografia Aplicada – monitorização

## Definição de um *datum* com constrangimentos

O modelo contendo equações de constrangimento entre os parâmetros tem a forma

$$\begin{cases} A^{n \times u} \bar{x}^{u \times 1} = \bar{\ell}^{n \times 1} + \bar{v}^{n \times 1} \\ R^{T d \times u} \bar{x}^{u \times 1} = \bar{c}^{d \times 1} = \text{constante} \end{cases}$$

conduzindo ao sistema de equações normais da forma

$$\begin{bmatrix} A^{T u \times n} P^{n \times n} A^{n \times u} & R^{u \times d} \\ R^{T d \times u} & 0^{d \times d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}^{u \times 1} \\ \bar{k}^{d \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{T u \times n} P^{n \times n} \bar{\ell}^{n \times 1} \\ \bar{c}^{d \times 1} \end{bmatrix}$$

em que  $\bar{k}$  é o vector dos multiplicadores de Lagrange e  $R^{u \times d}$  é a matriz que representa os constrangimentos. Como a matriz normal  $N^{u \times u} = A^T P A$  é singular com *deficit* de característica  $d = u - C(A)$ , para que haja solução do sistema  $R^T$  tem que consistir em  $d$  constrangimentos linearmente independentes que não sejam combinações lineares das linhas de  $A$  (o *datum* é fixado através de  $R$ ), o que algebricamente significa que o sistema das equações normais dado pela matriz  $N = A^T P A$  deve ser tomado regular através de uma escolha conveniente de  $R^T$ , de forma a que

$$C \left( \begin{bmatrix} A^T P A & R \\ R^T & 0 \end{bmatrix} \right) = u + d.$$

# Topografia Aplicada – monitorização

A abordagem seguida no caso do *datum* com constrangimentos tem a vantagem de poder ser generalizada com facilidade, desde que os constrangimentos verifiquem a condição de que a solução seja única para o vector  $\bar{x}$  dos parâmetros da equação

$$\begin{bmatrix} A^T P A & R \\ R^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T P \bar{\ell} \\ \bar{c} \end{bmatrix},$$

obtendo-se então o sistema regular, em que  $\bar{c}$  = constante:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T P A & R \\ R^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A^T P \bar{\ell} \\ \bar{c} \end{bmatrix},$$

embora a inversão da matriz

$$\begin{bmatrix} A^T P A & R \\ R^T & 0 \end{bmatrix}$$

seja numericamente pouco eficiente, da forma:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N + R R^T)^{-1} N (N + R R^T)^{-1} & (N + R R^T)^{-1} R \\ \left( (N + R R^T)^{-1} R \right)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T P \bar{\ell} \\ \bar{c} \end{bmatrix}$$

em que  $N = A^T P A$ ,  $C(N + R R^T) = C(A) + C(R) = u$ , isto é,  $N + R R^T$  é regular. Nessas condições, a solução é dada por:

$$\bar{x} = (N + R R^T)^{-1} N (N + R R^T)^{-1} A^T P \bar{\ell} + (N + R R^T)^{-1} R \bar{c}$$

$$\bar{k} = \left( (N + R R^T)^{-1} R \right)^T A^T P \bar{\ell} = \bar{0}$$

$$Q_{\bar{x}} = (N + R R^T)^{-1} N (N + R R^T)^{-1}$$



## Topografia Aplicada – monitorização

Esta solução para o problema clássico do *datum*, embora muito utilizada devido à facilidade da implementação numérica e à facilidade na interpretação dos resultados, tem a desvantagem de, como já tinha sido referido, o vector dos parâmetros  $\bar{x}$  e da respectiva matriz cofactor  $Q_{\bar{x}}$  dependerem inteiramente da escolha arbitrária do *datum*. Para além disso, a estimativa dos parâmetros  $\bar{x}$  é enviesada, isto é,

$$E(\bar{x}) = (N + RR^T)^{-1} N (N + RR^T)^{-1} N \bar{x} + N (N + RR^T)^{-1} R \bar{c} \neq \bar{x}$$

$$Q_{\bar{x}} = (N + RR^T)^{-1} N (N + RR^T)^{-1},$$

que dependem obviamente da escolha dos constrangimentos.

# Topografia Aplicada – monitorização

## Constrangimento numa rede 2D por fixação de coordenadas de dois pontos:

Pode impor-se este tipo de constrangimento quando uma rede plana consiste apenas em observações de ângulos azimutais, de tal forma que o *deficit* de característica é igual a 4. Atribuindo coordenadas fixas a duas estações da rede, remove-se este *deficit* de característica: supondo que os pontos P e Q são escolhidos para constranger a posição, escala e rumo, as equações de constrangimento  $R \bar{x} = \bar{c}$  são obtidas de

$$X_P = c_1, Y_P = c_2, X_Q = c_3, Y_Q = c_4,$$

onde  $c_1, c_2, c_3, c_4$  representam constantes, de tal forma que

$$\delta X_P = 0, \delta Y_P = 0, \delta X_Q = 0, \delta Y_Q = 0,$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X_1 \\ \delta Y_1 \\ \vdots \\ \delta X_P \\ \delta Y_P \\ \delta X_Q \\ \delta Y_Q \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Topografia Aplicada – monitorização

Constrangimento numa rede 2D por fixação de uma distância horizontal PQ:

Este tipo de constrangimento pode impor-se em rede planas consistindo numa estação fixa, num rumo e ângulos azimutais observados, sendo neste caso o *deficit* de característica igual a 1, correspondente à escala. Supondo que o elemento da rede que vai ser utilizado para completar o *datum* é a linha PQ, a equação de constrangimento é

$$(X_Q - X_P)^2 + (Y_Q - Y_P)^2 = s^2,$$

onde  $s$  é o valor fixo que representa o comprimento do elemento PQ, tendo-se neste caso,

$$2(X_Q - X_P)\delta X_Q - 2(X_Q - X_P)\delta X_P + 2(Y_Q - Y_P)\delta Y_Q - 2(Y_Q - Y_P)\delta Y_P = 2s\,ds = 0$$

$$-(X_Q - X_P)\delta X_P - (Y_Q - Y_P)\delta Y_P + (X_Q - X_P)\delta X_Q + (Y_Q - Y_P)\delta Y_Q = 0$$

ou, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & -(X_Q - X_P) & -(Y_Q - Y_P) & (X_Q - X_P) & (Y_Q - Y_P) & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X_1 \\ \delta Y_1 \\ \vdots \\ \delta X_P \\ \delta Y_P \\ \delta X_Q \\ \delta Y_Q \\ \vdots \end{bmatrix} = 0$$

# Topografia Aplicada – monitorização

## Constrangimento numa rede 2D por fixação de um rumo PQ:

Esta situação acontece numa rede plana consistindo numa estação fixa com observação de ângulos azimutais e distâncias, sendo o *deficit* de característica igual a 1, correspondente a uma rotação. Supondo que a linha PQ tem que ter azimute fixo  $\alpha$ , a equação de constrangimento correspondente é

$$(X_Q - X_P)/(Y_Q - Y_P) = \tan \alpha,$$

obtendo-se então a equação

$$-\frac{(Y_Q - Y_P)}{(Y_Q - Y_P)^2} \delta X_P + \frac{(Y_Q - Y_P)}{(Y_Q - Y_P)^2} \delta X_Q + \frac{(X_Q - X_P)}{(Y_Q - Y_P)^2} \delta Y_P - \frac{(X_Q - X_P)}{(Y_Q - Y_P)^2} \delta Y_Q = \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha = 0$$

$$-(Y_Q - Y_P) \delta X_P + (X_Q - X_P) \delta Y_P + (Y_Q - Y_P) \delta X_Q - (X_Q - X_P) \delta Y_Q = \frac{(Y_Q - Y_P)^2}{\cos^2 \alpha} d\alpha = 0$$

$$-(Y_Q - Y_P) \delta X_P + (X_Q - X_P) \delta Y_P + (Y_Q - Y_P) \delta X_Q - (X_Q - X_P) \delta Y_Q = \frac{(\text{sen} \alpha \cdot d_{PQ})^2}{\cos^2 \alpha} d\alpha = 0$$

$$-(Y_Q - Y_P) \delta X_P + (X_Q - X_P) \delta Y_P + (Y_Q - Y_P) \delta X_Q - (X_Q - X_P) \delta Y_Q = \tan^2 \alpha \cdot d_{PQ}^2 d\alpha = 0$$

ou, na forma matricial:

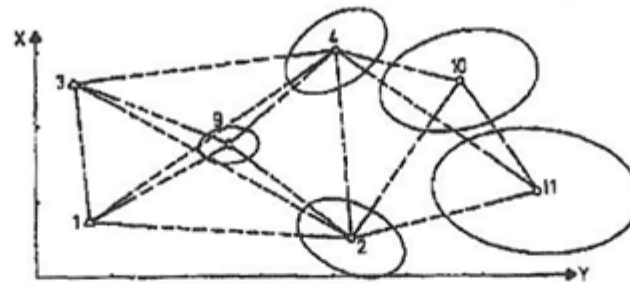
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & -(Y_Q - Y_P) & (X_Q - X_P) & (Y_Q - Y_P) & -(X_Q - X_P) & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X_1 \\ \delta Y_1 \\ \vdots \\ \delta X_P \\ \delta Y_P \\ \delta X_Q \\ \delta Y_Q \\ \vdots \end{bmatrix} = 0$$

# Topografia Aplicada – monitorização

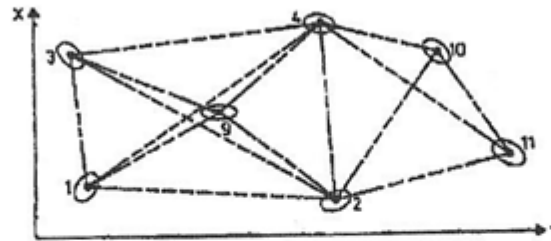
## Definição de um *datum* de norma mínima (traço mínimo)

Nos dois casos anteriormente mencionados de estabelecimento de um *datum*, a estimativa por mínimos quadrados dos parâmetros não é, em geral, não enviesada nem de variância mínima, tendo-se, para além disto, que a solução obtida varia em função do *datum* seleccionado, pondo-se a questão se haverá algum critério para a selecção de alguma das soluções  $\{\bar{x}\}$ . Normalmente, nesses casos, o *datum* é definido arbitrariamente, com base em considerações geométricas, de forma a distribuir o melhor possível os resíduos pelas diversas estações da rede. Esta estratégia tem a vantagem de, mantendo o *datum* nos mesmos pontos ao longo do tempo, a comparação das coordenadas dos restantes pontos da rede em diferentes épocas ser imediata, desde que existam razões para supor que os pontos tomados para *datum* são efectivamente fixos. Num caso mais geral, para efectuar a comparação dos resultados entre épocas diferentes deve ser utilizado o método das transformações de similaridade para ultrapassar o problemas dos deslocamentos relacionados com os pontos do *datum*.

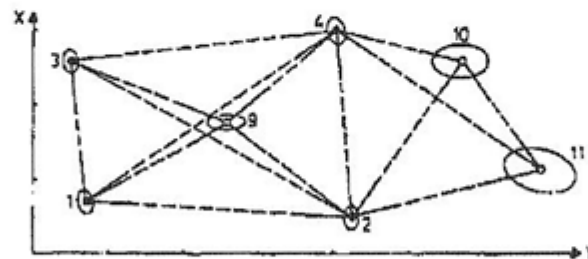
# Topografia Aplicada – monitorização



a)



b)



c)

Redes de constrangimento mínimo, onde se indicam as elipses de erro em cada ponto: a) *datum* nos pontos 1 e 3 (fixos); b) *datum* nos pontos 1, 2, 3, 4, 9, 10 e 11, através da minimização da totalidade do traço da matriz  $Q$  (constrangimentos internos); c) *datum* nos pontos 1, 2, 3 e 4, através da minimização parcial do traço da matriz  $Q$  (constrangimentos internos). O traço  $\text{tr}(M)$  de uma matriz quadrada  $M$  é definido como a soma dos elementos da diagonal principal. Se  $M$  for uma matriz de variâncias-covariâncias, então  $\text{tr}(M)$  é a soma das variâncias e pode ser interpretado como uma medida da precisão global do vector associado das variáveis aleatórias (parâmetros estimados).

## Topografia Aplicada – monitorização

Para uma rede com *deficit* de característica  $d$ , há múltiplas formas de impor constrangimentos que permitam a obtenção de uma solução, desde redes de constrangimento mínimo (redes livres) a redes constrangidas. Dentro do primeiro grupo pode considerar-se a solução particular designada por redes com constrangimentos internos em que os constrangimentos são aplicados ao centróide da rede, de tal forma que  $||| x_i^{\text{reduzido}} = x_i - \sum x_i / n$ ,  $n$ =número de pontos da rede; estes constrangimentos, definidos por  $R^T \bar{x} = 0$ , traduzem-se em redes onde todos (ou apenas alguns) pontos contribuem para o *datum*, isto é, as coordenadas de todos os pontos da rede variam ao longo do ajustamento (não há pontos fixos). São necessariamente redes locais, com coordenadas arbitrárias, ao contrário, por exemplo, de redes de adensamento, onde as coordenadas dos novos pontos têm que se ajustar aos pontos da rede de ordem superior (rede constrangida). Neste sentido, as redes livres são independentes dos erros das coordenadas dos pontos tomados como *datum*. Esta propriedade é importante quando se utilizam observações GPS na densificação de redes convencionais, cuja precisão é inferior. Há, no entanto, uma dificuldade em relacionar as coordenadas obtidas em épocas diferentes pois, variando o centróide da rede, o *datum* também varia ao longo do tempo.



## Topografia Aplicada – monitorização

Partindo da solução geral no caso do *datum* com constrangimentos R,

$$\bar{x} = (N + RR^T)^{-1} N (N + RR^T)^{-1} A^T P \bar{\ell} + (N + RR^T)^{-1} R \bar{c}, \quad Q_{\bar{x}} = (N + RR^T)^{-1} N (N + RR^T)^{-1},$$

pretende-se investigar se existe algum vector de  $\{\bar{x}\}$  com traço mínimo da matriz cofactor associada, isto é, estabelece-se o critério

$$\text{tr}(Q_{\bar{x}}) = \text{tr}\left((N + RR^T)^{-1} N (N + RR^T)^{-1}\right) = \min, \text{ onde } N = A^T P A \text{ e } \bar{x} \text{ é um elemento de } \{\bar{x}\}.$$

Um método algébrico apropriado de obtenção de uma matriz S que conduza a  $\text{tr}(Q_{\bar{x}}) = \min$  baseia-se nos valores próprios da matriz normal  $N = A^T P A$  (qualquer matriz de característica igual a d que verifique a condição  $AS=0$  é uma escolha possível), dados por  $(N - \lambda_i I) s_i = 0$ , onde  $\lambda_i$  representa os valores próprios de N e  $s_i$  os vectores próprios associados a  $\lambda_i$ .

Uma matriz quadrada M com característica C(M) possui C(M) valores próprios não nulos e C(M) vectores próprios linearmente independentes; se essa matriz M tem *deficit* de característica d, os respectivos vectores próprios formam uma matriz  $S_{uxd}$  que constitui um conjunto de constrangimentos para o *datum* de traço mínimo.