

# CARTOGRAFIA

## LICENCIATURA EM ENGENHARIA GEOSPACIAL 2º ANO/2º SEMESTRE

ANO LECTIVO DE 2021/2022

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA GEOGRÁFICA, GEOFÍSICA E ENERGIA  
DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DE LISBOA



# CARTOGRAFIA

## ÍNDICE

1. Fundamentos
2. Sistemas de coordenadas
3. A teoria das projeções cartográficas
4. Projeções equivalentes
5. Projeções conformes

# 1. FUNDAMENTOS

- 1.1. Definição de cartografia
- 1.2. Definição de mapa e carta
- 1.3. Classificação das cartas
- 1.4. Cartografia portuguesa atual
- 1.5. Superfícies de referência
- 1.6. *Data* geodésicos
- 1.7. Projeções cartográficas
- 1.8. Propriedades das projeções cartográficas
- 1.9. Classificação das projeções cartográficas

# 1. Fundamentos

The International Cartographic Association (ICA) is “the world authoritative body” for Cartography, the discipline dealing with the conception, production, dissemination and study of maps.” The mission of the Association is to promote the discipline and profession of Cartography and GIScience in an international context. The ICA is the prime international body for Cartography and GIScience (see [www.icaci.org](http://www.icaci.org) for more information).

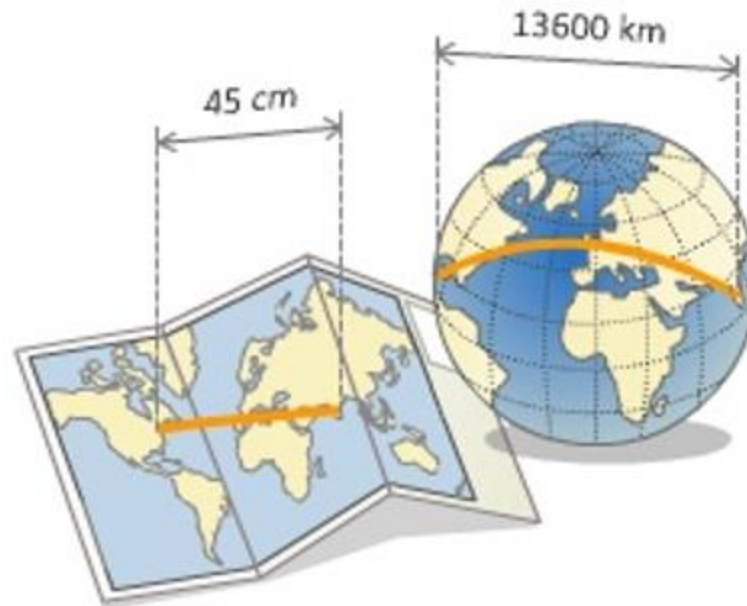


**International Cartographic Association**  
**Association Cartographique Internationale**

[https://icaci.org/files/documents/reference\\_docs/ICA\\_Strategic\\_Plan\\_2011-2019.pdf](https://icaci.org/files/documents/reference_docs/ICA_Strategic_Plan_2011-2019.pdf)

# 1. Fundamentos

Chama-se mapa a qualquer representação plana da superfície da Terra, ou de outro corpo celeste, na qual são representadas as posições relativas dos vários objetos, numa determinada escala e numa determinada projeção cartográfica.



# 1. Fundamentos

A escala de uma carta é uma relação de proporção entre a realidade e a sua representação;

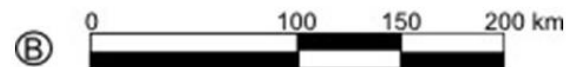
Por exemplo, a escala 1:100 000 indica que as dimensões do terreno foram reduzidas 100 000 vezes para serem representadas na carta.

Existem 2 tipos de escala :

Numérica (A)

Gráfica (B)

Ⓐ 1: 100.000



# 1. Fundamentos

A palavra mapa teve origem na Idade Média e era usada para designar apenas as representações terrestres.

A partir do século XIV, os mapas marítimos passaram a ser conhecidos por cartas, designação essa que, posteriormente, se estendeu a outros tipos de representação cartográfica.

Atualmente, o termo carta é utilizado para designar qualquer tipo de mapa, independentemente da sua especificidade.

# 1. Fundamentos

A representação dos elementos do terreno sobre uma carta pressupõe:

- uma escolha em número, dado que apenas alguns elementos poderão ser representados,
- e uma escolha em importância, dado que serão representados apenas os elementos que correspondam a determinados critérios.

Dado isto, uma carta é um documento cuja construção é subjetiva e submetida a normas pré-definidas de seleção e de representação, correspondendo sempre a uma representação incompleta do terreno independentemente da escala.



# 1. Fundamentos

Um dos sistemas mais consensuais de classificação das cartas consiste em agrupá-las em duas grandes classes, de acordo com o seu objetivo:

Cartas de base	Cartas temáticas
<p>As cartas de base são aquelas cujo objetivo é a <u>representação da superfície da Terra</u>, dos objetos que a ocupam e de outra informação geográfica de carácter genérico.</p> <p>Nestas cartas estão representados os <u>acidentes topográficos naturais e artificiais</u>, tais como o relevo do terreno, os cursos de água, os aglomerados populacionais e as vias de comunicação, e também os <u>objetos de carácter abstrato</u>, tais como as fronteiras entre estados e outros limites administrativos.</p>	<p>As cartas temáticas são aquelas cujo objetivo é representar <u>informação, ou apoiar atividades, de carácter especializado</u>.</p> <p>Existe uma grande diversidade de cartas temáticas, parecendo não haver limite para o tipo de informação que pode ser representado cartograficamente.</p>

# 1. Fundamentos

Cartas de base		
<b>Cartas topográficas</b>	Destinadas a cobrir as zonas terrestres, de acordo com a escala, e em consequência com o detalhe da representação	Cartas geográficas
		Cartas corográficas
		Cartas topográficas propriamente ditas
<b>Cartas hidrográficas</b>	Destinadas a cobrir as zonas costeiras e oceânicas	Não existindo em Portugal cartografia hidrográfica de base propriamente dita, o seu papel é desempenhado pela cartografia náutica

# 1. Fundamentos

Cartas topográficas	
<b>Cartas geográficas</b>	Cartas de pequena escala, inferior a 1: 500 000, que representam os traços mais gerais de vastas regiões do globo terrestre
<b>Cartas corográficas</b>	Cartas de escala intermédia, entre 1:500 000 e 1:50 000, que representam países ou regiões
<b>Cartas topográficas propriamente ditas</b>	<p>Cartas de grande escala, superior a 1:50 000, que representam os aspetos geográficos mais salientes da superfície terrestre</p> <p>O termo <u>planta cartográfica</u> é utilizado para designar as cartas topográficas de maior escala, superior a 1:10 000, representando áreas suficientemente pequenas para que a curvatura da Terra possa ser ignorada e a escala se possa considerar constante</p>

# 1. Fundamentos

Cartas temáticas	
<b>Cartas administrativas</b>	Cartas que representam as divisões administrativas de um território e os centros populacionais mais importantes
<b>Cartas físicas</b>	Cartas que representam, essencialmente, os aspetos naturais da topografia e hidrografia da superfície terrestre; cartas hipsométricas (altitude) e cartas batimétricas (profundidade)
<b>Cartas náuticas</b>	Cartas concebidas expressamente para apoiar a navegação marítima sendo por imperativos de segurança sujeitas a atualizações permanentes
<b>Cartas demográficas</b>	Cartas destinadas a representar a distribuição geográfica dos parâmetros demográficos de uma região, designadamente a distribuição e densidade da população, os índices de natalidade e mortalidade, entre outros
<b>Cartas meteorológicas</b>	Cartas que se destinam a representar informação de carácter meteorológico, tais como as cartas climáticas e as cartas de tempo

# 1. Fundamentos

<b>Cartas temáticas (cont. ...)</b>	
<b>Cartas geológicas</b>	Cartas destinadas a representar informação sobre a geologia de uma região terrestre ou marítima
<b>Cartas geomorfológicas</b>	Cartas destinadas a representar informação sobre as formas do relevo da superfície e a sua génese
<b>Mapas de estradas ou cartas itinerárias</b>	Cartas destinadas a representar as vias de comunicação (estradas, caminhos, caminhos de ferro, etc.) e outra informação complementar de interesse ao viajante (distâncias, postos de reabastecimento, oficinas, hotéis, etc.)
<b>Cartas ou plantas urbanas</b>	Cartas de grande escala destinadas a representar ruas, edifícios, monumentos e outros objetos de interesse para quem percorre ou utilize as zonas urbanas
<b>Cartas ou plantas cadastrais</b>	Cartas de grande escala destinadas a representar os limites de propriedade rústica ou urbana e a localização das construções

# 1. Fundamentos

Existem três entidades em Portugal com atribuições legais no âmbito da produção cartográfica:

### **Direção-Geral do Território – DGT**

(resultante da fusão do Instituto Geográfico Português - IGP e da Direção-Geral de Ordenamento do Território e Urbanismo- DGOTDU)

[www.dgterritorio.pt](http://www.dgterritorio.pt)

### **Centro de Informação Geoespacial do Exército – CIGeoE**

(antigo Instituto Geográfico do Exército- IGeoE)

[www.igeoe.pt](http://www.igeoe.pt)

### **Instituto Hidrográfico – IH**

[www.hidrografico.pt](http://www.hidrografico.pt)

# 1. Fundamentos

Principal produção cartográfica da DGT				
Designação/Série	Escala	Projeção	Elipsóide	N.º folhas
Carta de Portugal	1:10 000	TM/Gauss	GRS80	2 416
Carta de Portugal <i>M7810- Continente(*)</i> <i>M7811- Açores</i> <i>P722- Madeira</i>	1:50 000	TM/Gauss UTM UTM	GRS80 Hayford Hayford	175 10 4
Carta de Portugal <i>M684- Continente(*)</i>	1:100 000	TM/Gauss	GRS80	53
Carta de Portugal <i>M585- Continente</i> <i>M587- Açores</i> <i>P521- Madeira</i>	1:200 000	TM/Gauss UTM UTM	Hayford Hayford Hayford	8 2 1
Carta de Portugal <i>Continente</i>	1:500 000	TM/Gauss	GRS80	1
Carta de Portugal <i>Continente</i>	1:1 500 000	TM/Gauss	GRS80	1
Carta de Portugal Continental e Regiões Autónomas	1:2 500 000	Lambert	Hayford	1

(\*) nas folhas anteriores a 2002 (1:50 000) e anteriores a 2009 (1:100 000) elipsóide de Bessel e projeção de Bonne

Fonte: DGT, fevereiro 2020

# 1. Fundamentos

Principal produção cartográfica do IGeoE				
Designação/Série	Escala	Projeção	Elipsóide	N.º folhas
Carta Militar de Portugal <i>M888- Continente</i> <i>M889- Açores</i> <i>P821- Madeira</i>	1:25 000	TM/Gauss UTM UTM	WGS84 (*) WGS84 (**) WGS84 (**)	632 35 15
Carta Militar de Portugal <i>M782/M783- Continente</i>	1:50 000	TM/Gauss	WGS84	175
Carta Militar de Portugal <i>M586- Continente</i>	1:250 000	TM/Gauss	WGS84	8
Carta Oficial de Estradas de Portugal (2014)	1:500 000	UTM	WGS84	1
(*) até abril de 2001 elipsóide de Hayford (**) antes da 2ª edição elipsóide de Hayford				
Fonte: IGeoE, fevereiro 2020				



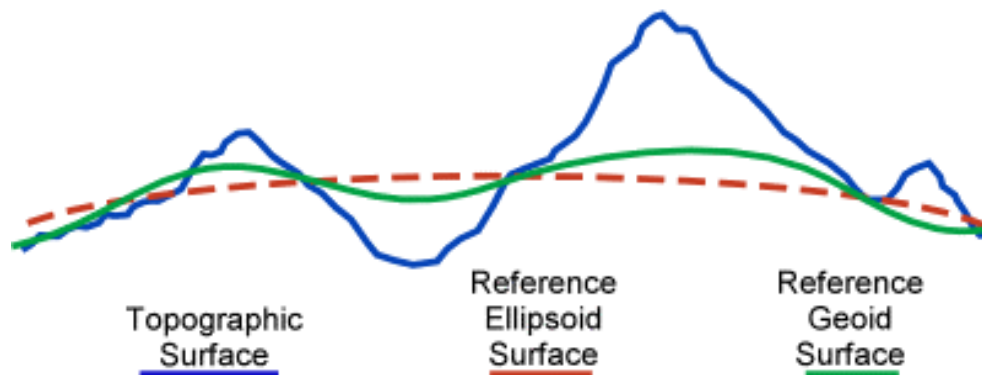
# 1. Fundamentos

Principal produção cartográfica do IH				
Designação/Série	Escala	Projeção	Elipsóide	N.º folhas
Pequena escala	1:3 500 000 a 1:1 000 000	Mercator	WGS84	3
Média escala				
<i>Continente</i>	1:1 000 000	Mercator	WGS84	9
<i>Açores</i>	a	Mercator	WGS84	3
<i>Madeira</i>	1:150 000	Mercator	WGS84	2
Grande escala				
<i>Continente</i>	1:150 000	Mercator	WGS84	23
<i>Açores</i>	a	Mercator	WGS84	18
<i>Madeira</i>	1:5 000	Mercator	WGS84	10
Navegação de recreio	1:150 000	Mercator	WGS84	12
Apoio à Pesca	1:150 000	Mercator	WGS84	3
Fonte: IH, fevereiro 2020				

# 1. Fundamentos

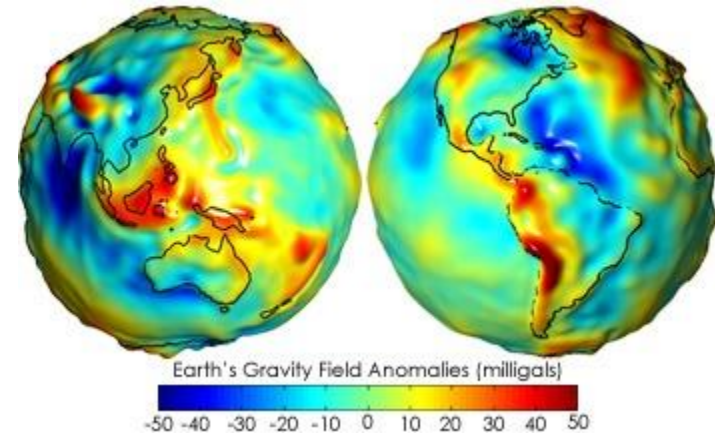
A superfície topográfica da Terra apresenta uma forma muito irregular e complexa pelo que não pode ser utilizada diretamente para a realização de cálculos.

A superfície que melhor se aproxima da forma da Terra é o geoide, que é uma superfície equipotencial que corresponde aproximadamente ao nível médio das águas do mar.



# 1. Fundamentos

O geoide é uma superfície ondulatória, suave e contínua e que ficticiamente se estende sob os continentes ao mesmo nível e que, por definição, é perpendicular em cada ponto à direção da gravidade.



Esta superfície não é simétrica em relação ao eixo de rotação, sendo irregular a distribuição de densidades no interior da Terra (o monte Everest tem cerca de 8 km de altitude e a fossa das Marianas tem cerca de 11 km de profundidade).

# 1. Fundamentos

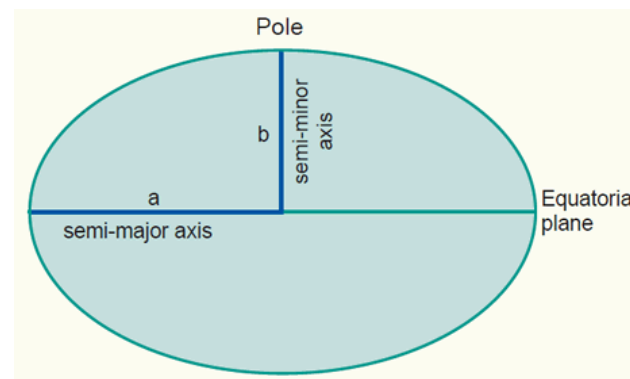
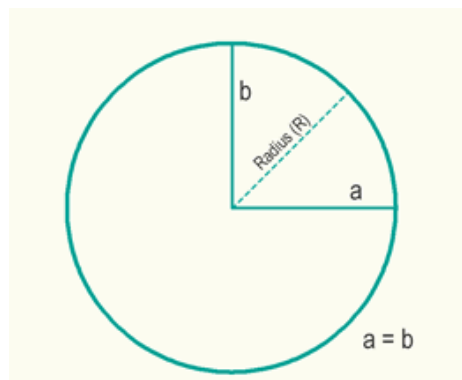
Chama-se superfície de referência a uma superfície teórica destinada a servir de modelo da superfície da Terra:

- Superfície de referência geodésica (elipsoide de referência) é um modelo com formas e dimensões tão próximas quanto possível das da Terra, destinado a estabelecer com grande exatidão, as posições relativas entre os vários lugares;
- Superfície de referência cartográfica é um modelo da superfície da Terra com base no qual se realizam cálculos destinados a construir as projeções cartográficas (plano, esfera e elipsoide de revolução).

# 1. Fundamentos

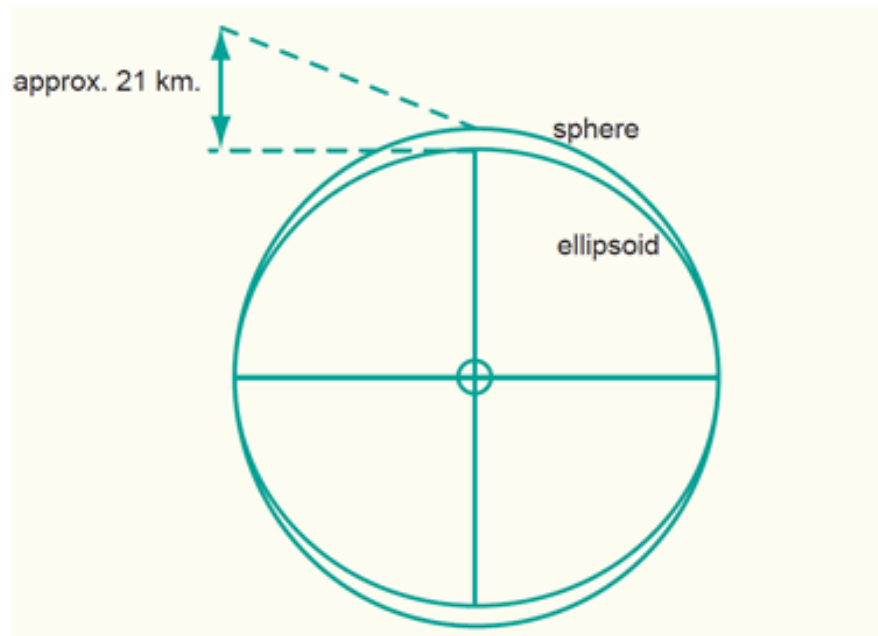
A melhor forma de representar a superfície da Terra depende, de algum modo, da extensão da área que se pretende representar:

- Para regiões suficientemente pequenas (alguns km de raio), o erro em se ignorar a curvatura da Terra pode, em geral, ser desprezado (considerando-se o plano), pelo que as posições relativas de todos os pontos são preservadas;
- Para regiões vastas é necessário ter em conta a curvatura da Terra: em alguns casos, bastará considerar a esfera; noutros casos, será necessário recorrer a uma melhor aproximação, o elipsoide de revolução, com o objetivo de minimizar as distorções.



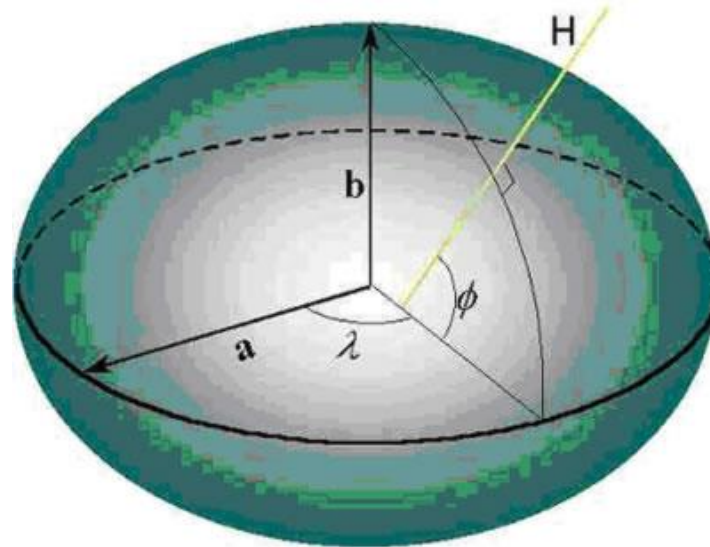
# 1. Fundamentos

- Considerando uma esfera com um raio de cerca de 6 370 km existe um erro de aproximação de cerca de 10 km;
- Considerando um elipsoide (achatamento) com um raio equatorial de 6 378 km e um raio polar de 6 357 km, existe um erro de aproximação de cerca de 50 m.



# 1. Fundamentos

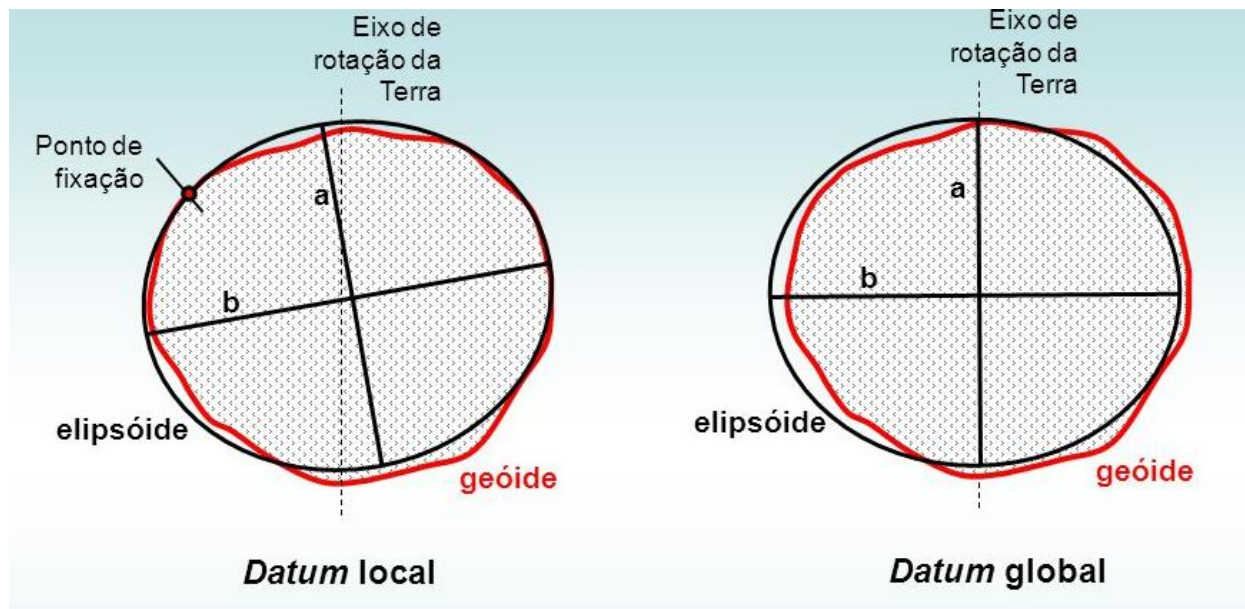
A expressão datum geodésico é utilizada para designar o conjunto dos parâmetros que constituem a referência de um determinado sistema de coordenadas geográficas, designadamente o elipsoide de referência, definido através das medidas do semi-eixo maior e do semi-eixo menor, e a sua posição relativamente ao globo terrestre.



# 1. Fundamentos

## Datum local

A posição do elipsóide de referência é estabelecida através da latitude, longitude e altitude de um ponto de fixação, bem como de um azimute medido, a partir deste ponto, para uma outra posição.

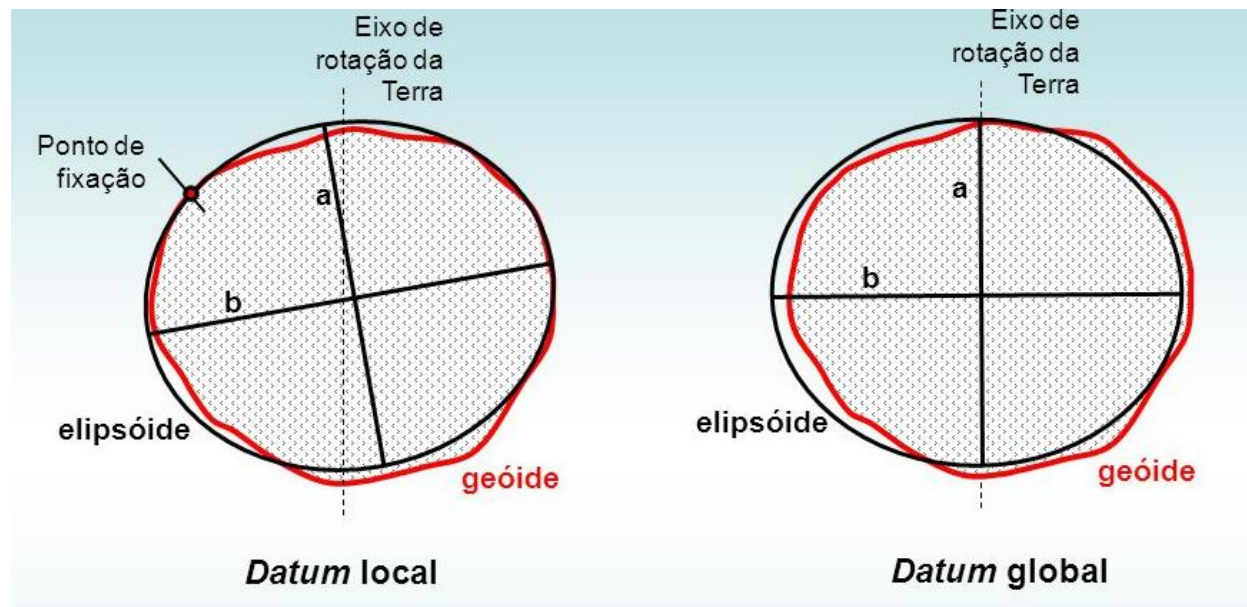




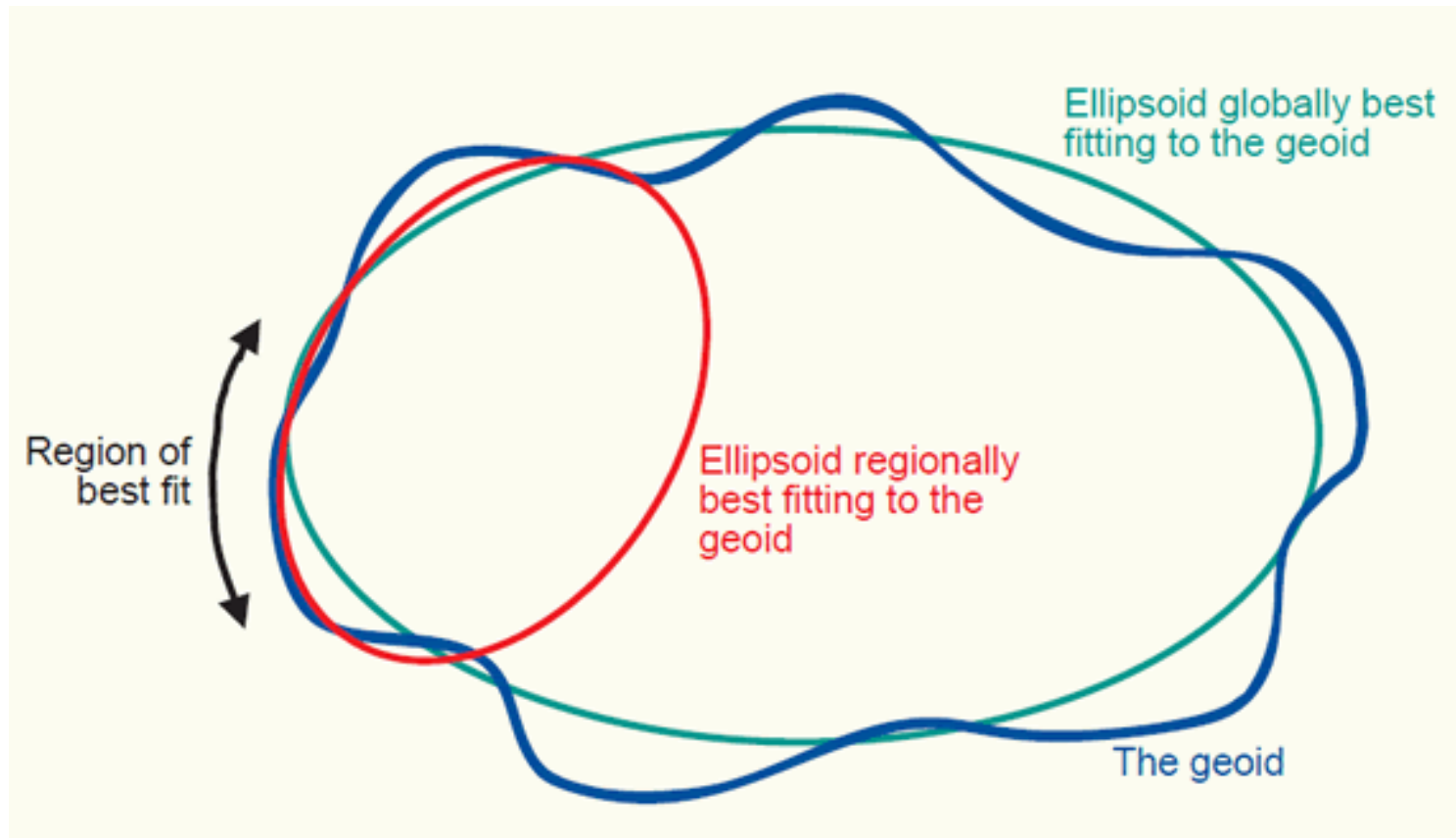
# 1. Fundamentos

## Datum global

A posição é escolhida de modo a, tanto quanto possível, fazer coincidir o centro de massa da Terra com o centro geométrico do elipsoide e o eixo de rotação da Terra com o eixo menor (de revolução) do elipsoide.



# 1. Fundamentos



# 1. Fundamentos

↘ Os data locais são utilizados para a cobertura geodésica de países ou regiões, minimizando localmente as distâncias entre o elipsoide e o geoide

(adopta-se um elipsoide cujas dimensões se aproximem o melhor possível da forma de um dado país ou região e cujo eixo de revolução seja paralelo ao do geoide)

↘ Os data globais destinam-se a servir de suporte a sistemas geodésicos, cartográficos ou de posicionamento globais e procuram minimizar as diferenças entre o elipsoide de referência e o geoide, em todo o globo

(adopta-se um elipsoide cujas dimensões se aproximem o melhor possível a toda a superfície terrestre, coincidindo o eixo de revolução e o centro geométrico deste elipsoide respetivamente com o eixo de rotação e com o centro de gravidade do geoide)

# 1. Fundamentos

## *Data geodésicos utilizados em Portugal*

Designação comum	Elipsóide	Ponto de fixação	Observações
Datum Lisboa	Hayford	Castelo de S. Jorge	Obsoleto
Datum 73	Hayford	Melriça	Obsoleto
Datum Porto Santo	Hayford	Porto Santo	Obsoleto
Datum S. Braz	Hayford	S. Braz (Ilha de S. Miguel)	Obsoleto
Datum Base SW	Hayford	Base SW (Ilha Graciosa)	Obsoleto
Datum Observatório	Hayford	Observatório (Ilha das Flores)	Obsoleto
Datum Selvagens	Clarke	Marco astronómico (Selvagem Grande)	Obsoleto
Datum Europeu (ED50)	Hayford	Potsdam (Alemanha)	Obsoleto
WGS84	WGS84	-	Geodesia, sistemas de posicionamento globais
ETRS89/ITRF93	GRS80	-	Geodesia, sistemas de posicionamento globais

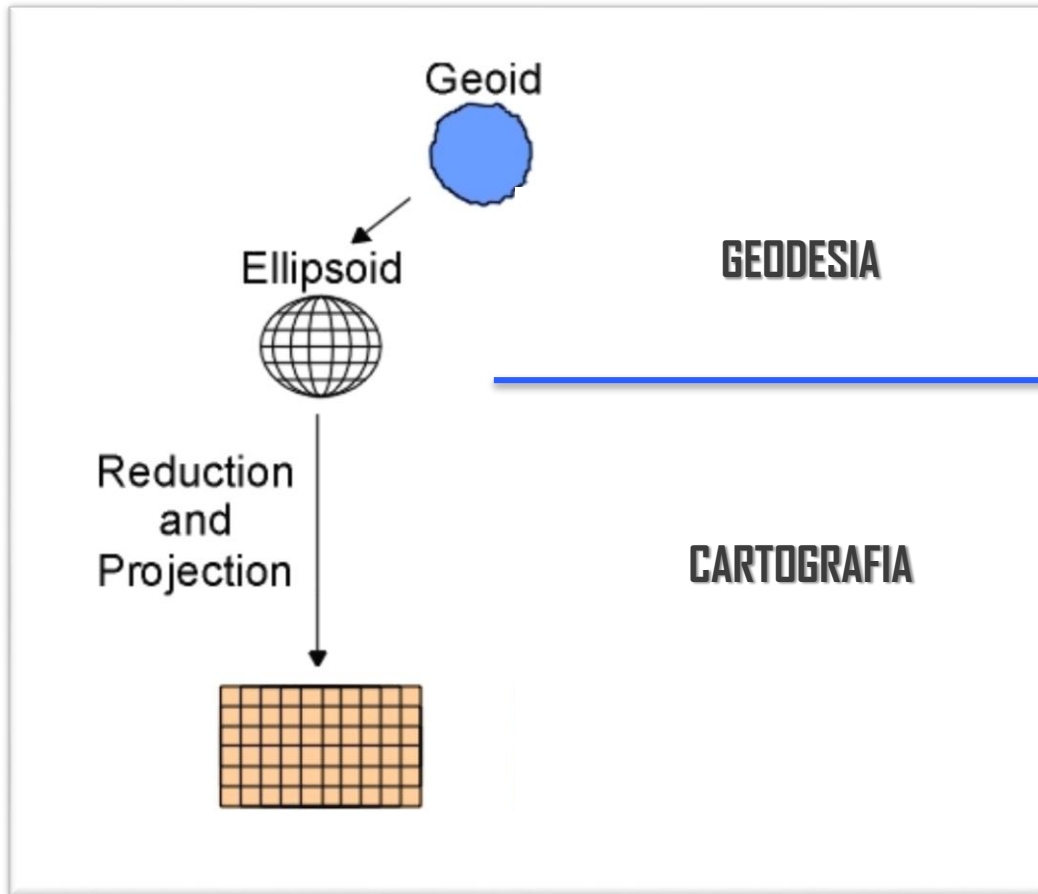
# 1. Fundamentos

A transformação da superfície da Terra numa superfície plana é uma operação complexa que pressupõe:

- a projeção da superfície física da Terra sobre um elipsóide de referência por meio de projetantes normais ao elipsóide em cada um dos seus pontos (método de projeção de Helmert) - **GEODESIA**;
- a projeção dos pontos sobre o elipsóide num plano obedecendo a uma determinada lei (sistema de projeção ou representação), geométrica ou analítica, que traduza a posição de cada um dos pontos na carta, em função da correspondente posição sobre essa superfície - **CARTOGRAFIA**.

# 1. Fundamentos

## 1.7. PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS



### Coordenadas Geodésicas:

Latitude ( $\phi$ )

Longitude ( $\lambda$ )

Altitude elipsoidal (h)

### Coordenadas Planas

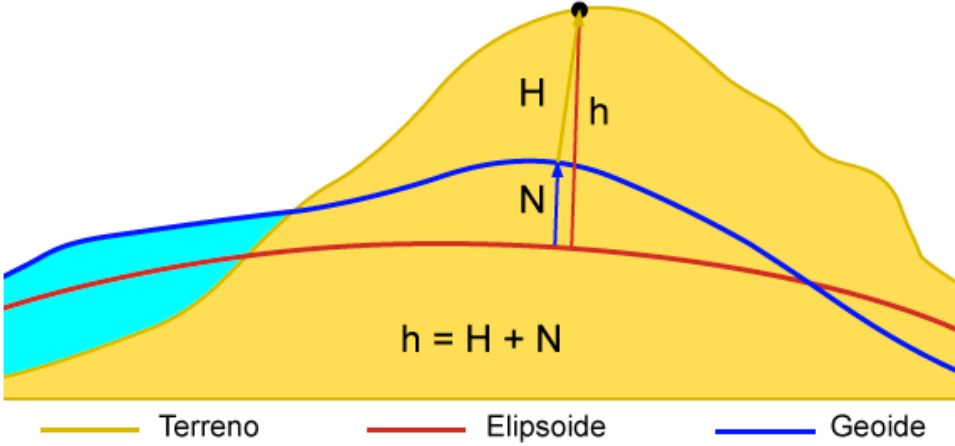
#### ou Cartográficas:

Distância à Meridiana (M)

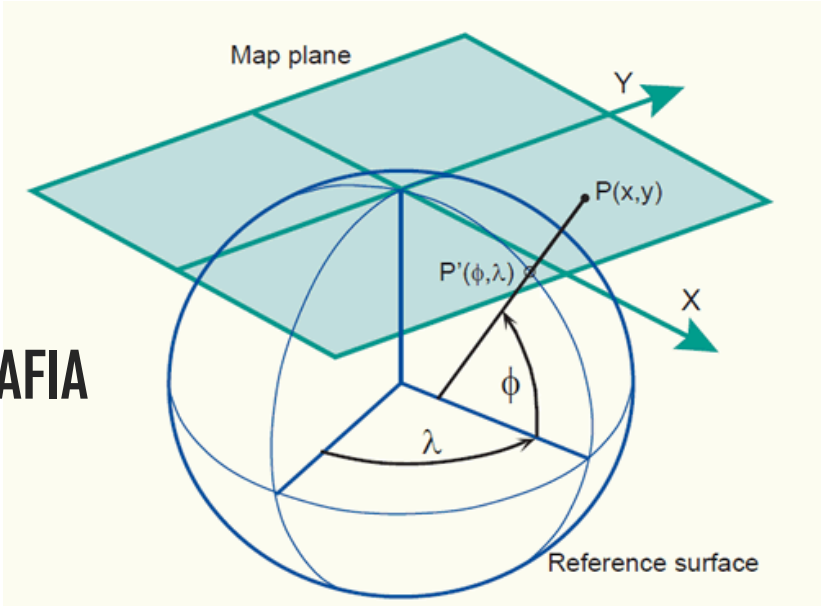
Distância à Perpendicular (P)

Altitude ortométrica ou cota (H)

# 1. Fundamentos



**GEODESIA**

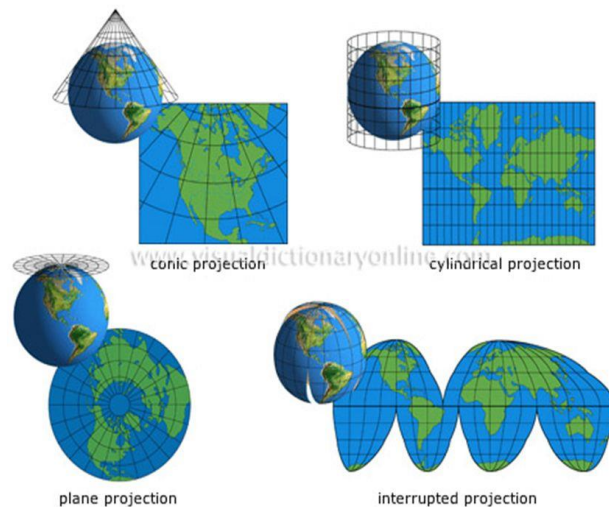


**CARTOGRAFIA**

# 1. Fundamentos

A construção de uma projeção cartográfica pode considerar-se como o conjunto de duas operações independentes:

- a redução da superfície de referência cartográfica a dimensões apropriadas, através da aplicação de um fator de redução constante (escala natural ou principal da projeção);
- a planificação desse modelo reduzido através do processo geométrico ou das fórmulas de transformação características da projeção utilizada.

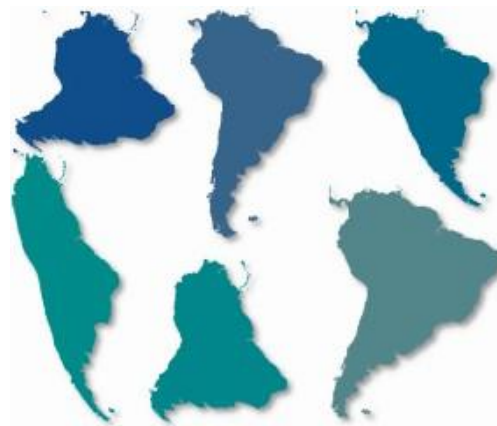




# 1. Fundamentos

O primeiro passo do processo de transformação não envolve qualquer deformação, as posições relativas de todos os pontos são preservadas e a escala natural constitui uma relação constante entre os comprimentos medidos na superfície de referência e na sua versão reduzida.

O segundo passo do processo de transformação já implica deformações, uma vez que nem a esfera nem o elipsóide são planificáveis. Estas deformações vão afetar as propriedades geométricas da superfície de referência, alterando a forma e as dimensões dos objetos que nela estão projetados, bem como as posições relativas entre eles.



# 1. Fundamentos

O caminho mais curto entre dois pontos sobre uma superfície esférica é um arco de circunferência e o caminho mais curto entre dois pontos sobre um plano é um segmento de reta.

Seria então desejável que:

- toda a projeção representasse os arcos de círculo máximo como segmentos de reta;
- os seus comprimentos fossem iguais às correspondentes distâncias sobre o modelo reduzido;
- os ângulos de cada um desses segmentos, com os diferentes meridianos, fossem conservados.

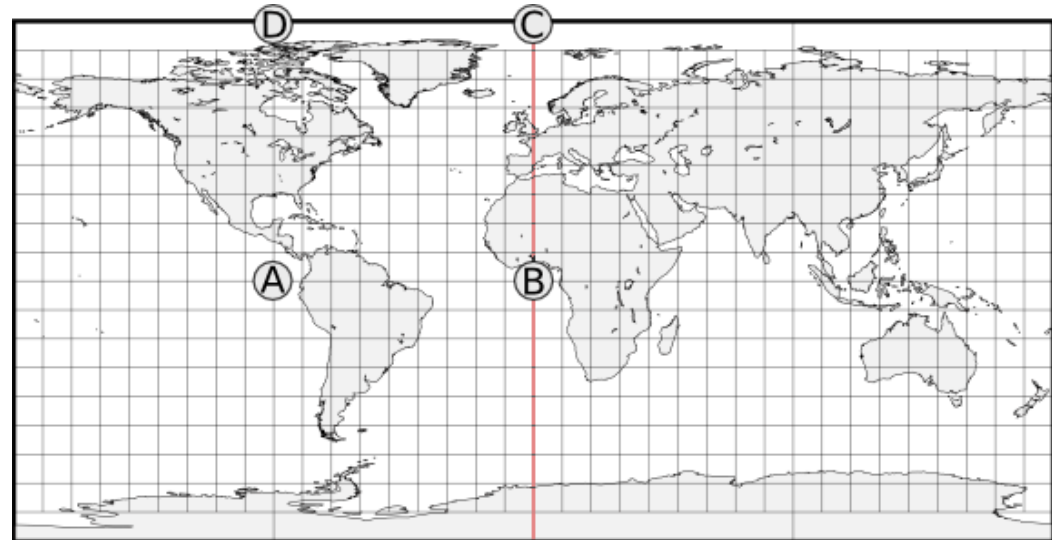
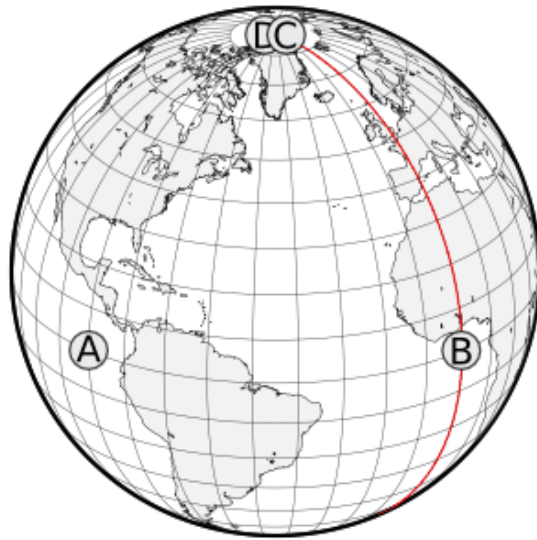
# 1. Fundamentos

No entanto, tal projeção não existe, uma vez que nem a superfície esférica nem a superfície elipsoidal são planificáveis, contrariamente às superfícies cônica e cilíndrica.

Na realidade, dos três requisitos atrás formulados apenas o primeiro pode ser observado em algumas projeções e, mesmo assim, com enormes sacrifícios no que diz respeito à observância dos outros dois.

Dado isto, toda a projeção cartográfica envolve deformações.

# 1. Fundamentos



Projeção cilíndrica equidistante que mostra a distorção nas distâncias: as distâncias AB, BC e AC são iguais na superfície terrestre, e a distância DC = 0 uma vez que ambos os pontos se localizam no polo.

# 1. Fundamentos

A “propriedade” de uma projeção não é mais do que a manutenção de um determinado atributo (ângulos, distâncias, áreas ou direções), dado que não é possível conservá-los a todos.

### Projeções conformes

Quando a forma dos pequenos objetos é preservada, ou seja, quando a escala da projeção em qualquer ponto é a mesma em todas as direções. Neste caso, os paralelos e os meridianos são representados como linhas perpendiculares entre si e os ângulos em torno de qualquer ponto são mantidos.

Exemplos: a projeção de Mercator, a projeção transversa de Mercator (Gauss e UTM), a projeção cônica conforme de Lambert e a projeção estereográfica.

# 1. Fundamentos

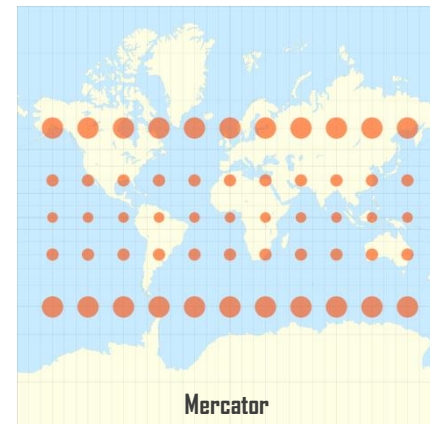
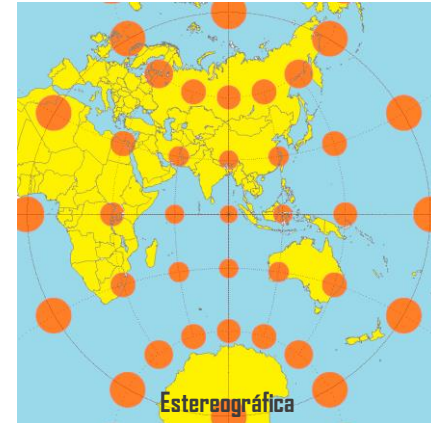
□ facto de a escala ser igual em todas as direções não implica que:

- ela não possa variar de ponto para ponto, o que acontece em todas as projeções cartográficas, e em particular nas que são conformes;
- a forma dos objetos com dimensões apreciáveis, tais como os continentes, não seja afetada pelo facto de a escala variar com a posição (apenas a forma de objetos com dimensões infinitesimais é preservada).

## 1. Fundamentos

### Projeções conformes

Exemplos: a projeção de Mercator, a projeção transversa de Mercator (Gauss e UTM), a projeção cônica conforme de Lambert e a projeção estereográfica.



# 1. Fundamentos

## Projeções equivalentes

Quando as proporções entre áreas são preservadas.

Como não é possível uma projeção cartográfica ser, simultaneamente, conforme e equivalente, a equivalência é sempre acompanhada de uma maior ou menor deformação angular, em resultado de a escala variar com a direção.

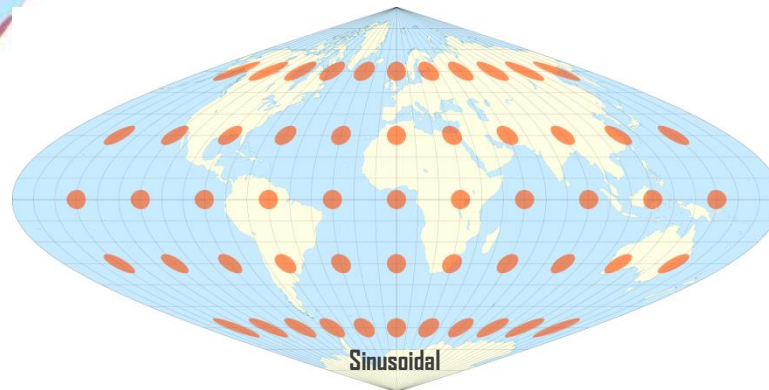
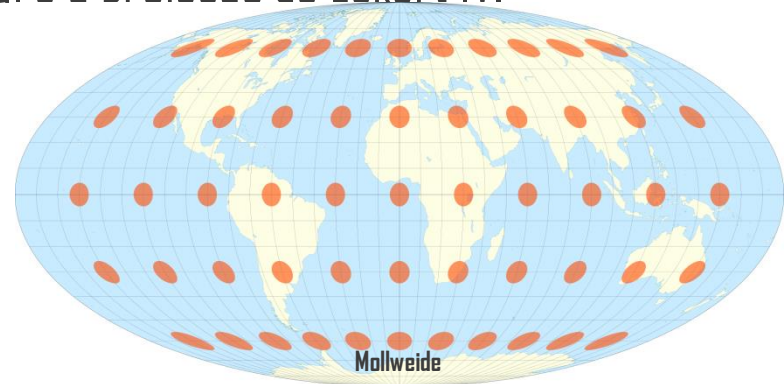
Exemplos: as projeções cónicas e azimutais equivalentes, a projeção de Bonne, a projeção de Mollweide, a projeção sinusoidal e a projeção de Eckert IV.



# 1. Fundamentos

## Projeções equivalentes

Exemplos: as projeções cónicas e azimutais equivalentes, a projeção de Bonne, a projeção de Mollweide, a projeção sinusoidal e a projeção de Eckert IV.



# 1. Fundamentos

## Projeções equidistantes

Quando a escala natural da projeção é mantida ao longo de uma determinada direção: este-oeste, norte-sul ou qualquer outra.

Projeções equidistantes meridianas: quando a escala é conservada ao longo dos meridianos.

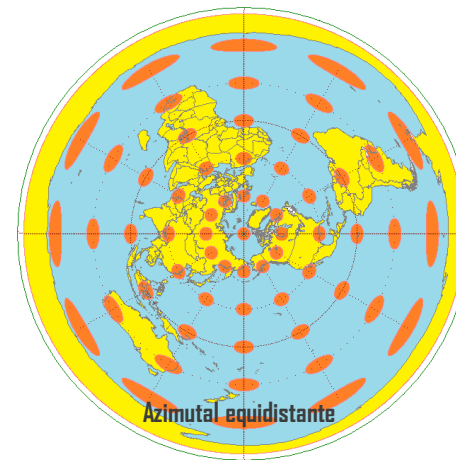
Projeções equidistantes transversais: quando a escala é conservada ao longo dos paralelos.

**Exemplos: projeção azimutal equidistante e a projeção cónica equidistante meridiana, ou a projeção cónica simples.**

# 1. Fundamentos

## Projeções equidistantes

Exemplos: projeção azimutal equidistante e a projeção cônica equidistante meridiana, ou a projeção cônica simples.



Todos os pontos no mapa estão a distâncias proporcionais a partir do ponto central e, ainda, todos os pontos no mapa têm um azimute (direção) correto a partir do ponto central.

# 1. Fundamentos

### Projeções azimutais

Quando as direções (azimutes) à superfície da Terra são conservadas a partir de determinados pontos.

Este tipo de projeção é particularmente conveniente quando interessa representar ou medir rumos e azimutes a partir de uma certa posição.

É também possível, manipulando a lei de variação da escala a partir do centro, construir projeções azimutais com propriedades adicionais, como a equidistância, a equivalência ou a conformidade, dando origem às projeções azimutais equidistantes, equivalentes e conformes, respetivamente.

<https://www.youtube.com/watch?v=wflW1j05Dg>

# 1. Fundamentos

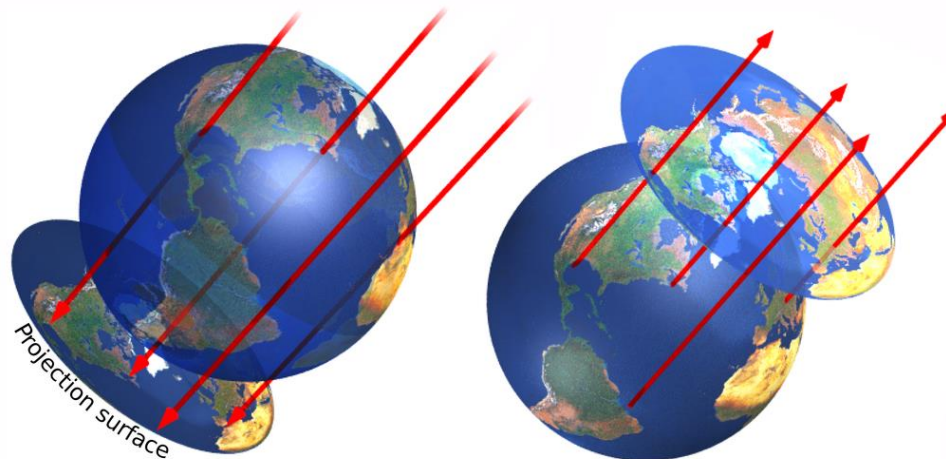
### Quanto às propriedades das projeções

<b>Conformes</b>	Quando a escala local é independente da direção
<b>Equivalentes</b>	Quando as proporções entre as áreas dos objetos são conservadas
<b>Afiláticas</b>	Quando não são conformes nem equivalentes
<b>Equidistantes</b>	Quando a escala linear é conservada ao longo de determinadas linhas
<b>Azimutais</b>	Quando os azimutes são conservados a partir de determinados pontos

## 1. Fundamentos

### Quanto à forma de construção das projeções

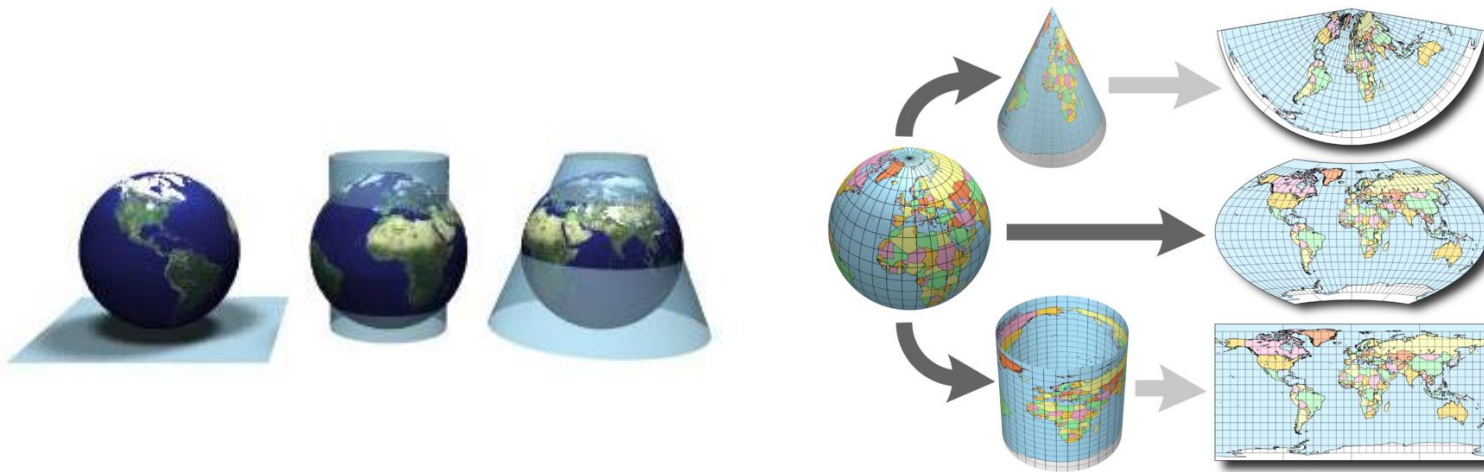
<b>Geométricas</b>	Quando se baseiam no conceito de superfície de projeção, sobre a qual os pontos do modelo da Terra são projetados, segundo processos que podem (projeções perspectivas) ou não (analíticas) ser puramente geométricos
<b>Geométricas modificadas</b>	Quando, embora utilizando o mesmo conceito básico das projeções geométricas, lhe introduzem alterações que modificam a geometria e as propriedades características de cada classe
<b>Convencionais</b>	Quando a sua construção é inteiramente baseada em critérios formulados matematicamente



## 1. Fundamentos

### Quanto à superfície de projeção

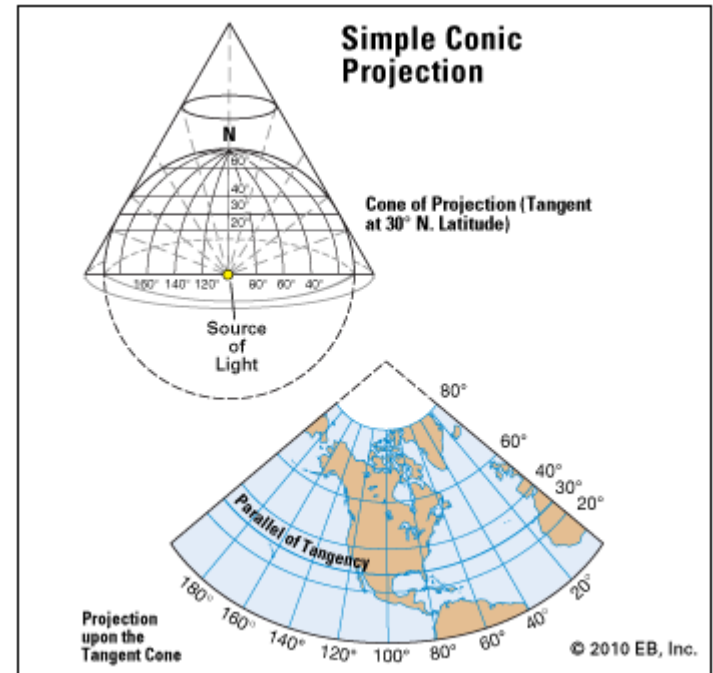
Azimutais ou planas	Quando a superfície de projeção é um plano
Cónicas	Quando a superfície de projeção é um cone
Cilíndricas	Quando a superfície de projeção é um cilindro



## 1. Fundamentos

### Projeções cónicas

- Os meridianos são retilíneos e concorrentes no vértice;
- Os paralelos são circulares e concêntricos no vértice;
- O ângulo entre os meridianos é constante e inferior à respectiva diferença de longitudes;
- O polo é representado por um ponto ou por um arco de circunferência;
- A envolvente da projeção é um setor circular.

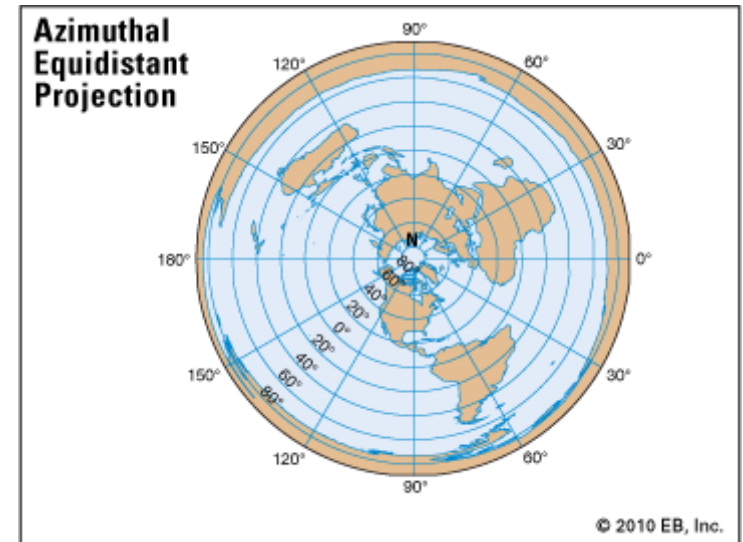




## 1. Fundamentos

### Projeções azimutais

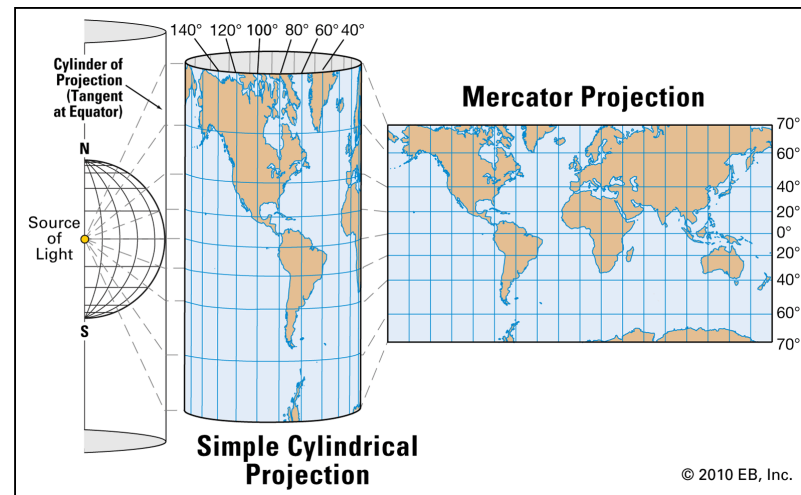
- Os meridianos são retilíneos e concorrentes no polo;
- Os paralelos são circulares e concêntricos no polo;
- O espaçamento entre os paralelos depende apenas da latitude;
- O ângulo entre os meridianos é igual à respectiva diferença de longitudes, pelo que os azimutes medidos a partir do polo são conservados;
- O polo é pontual e o único ponto de escala conservada;
- A envolvente da projeção é uma circunferência.



# 1. Fundamentos

## Projeções cilíndricas

- A malha formada pelos meridianos e paralelos é retangular;
- O espaçamento entre os paralelos só depende da latitude;
- O espaçamento entre os meridianos é constante e proporcional à diferença de longitudes;
- A escala ao longo de cada paralelo só depende da escala natural e da latitude.;
- Os polos são representados por segmentos de reta com o mesmo comprimento do equador.

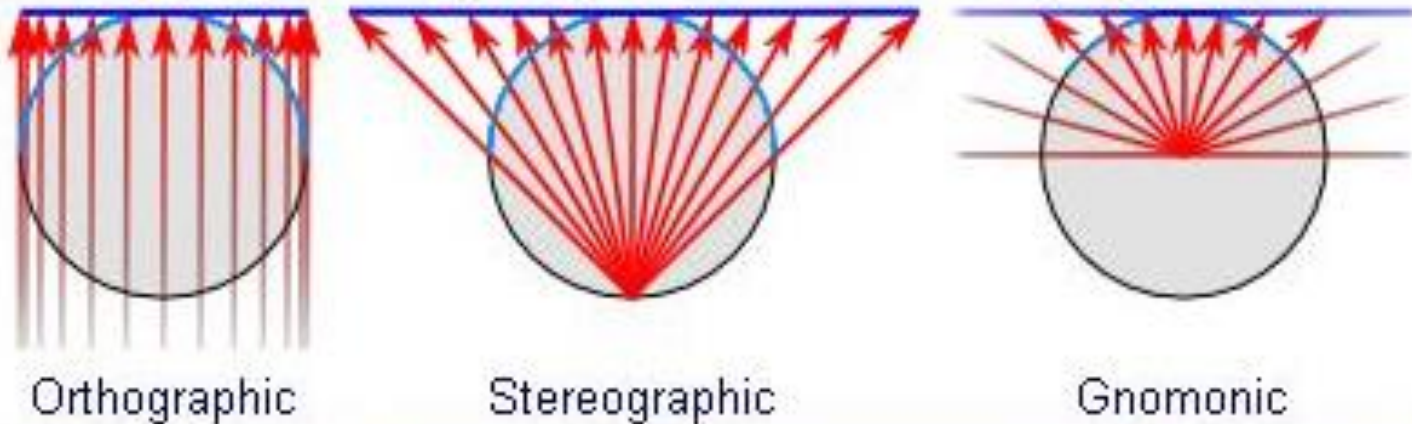


## 1. Fundamentos

### Quanto ao tipo de perspectiva das projeções

<b>Centrográficas ou gnomónicas</b>	Quando o centro da perspectiva é o centro do modelo
<b>Estereográficas</b>	Quando o centro da perspectiva se situa sobre a superfície do modelo
<b>Ortográficas</b>	Quando o centro da perspectiva se situa no infinito

### Light paths in perspective azimuthal projections

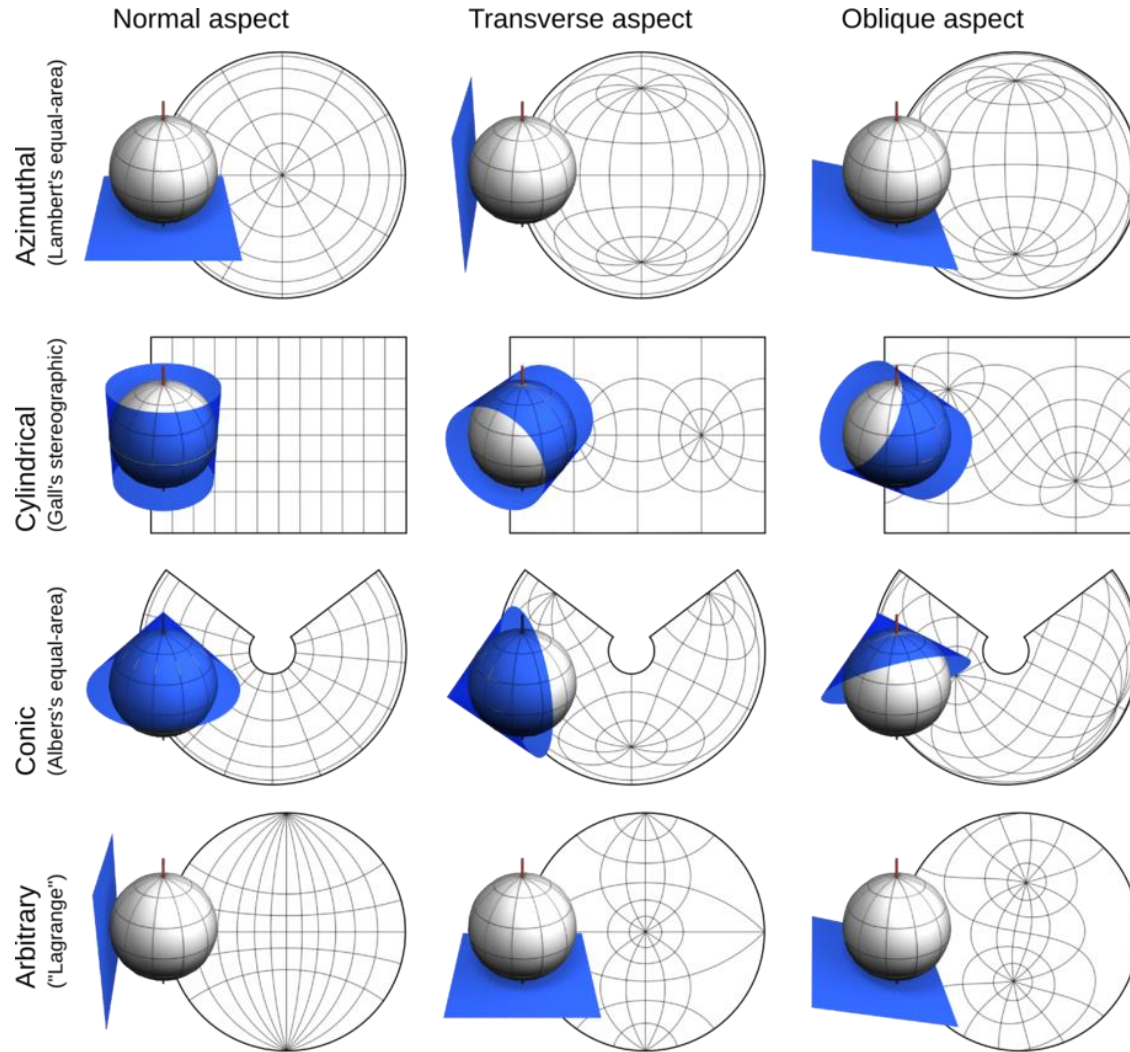


# 1. Fundamentos

### Quanto à orientação da superfície de projeção

<b>Normais</b>	Quando o eixo da superfície de projeção coincide com o eixo da Terra
<b>Polares</b>	Nas projeções cónicas e azimutais, o mesmo que normais
<b>Equatoriais</b>	Nas projeções azimutais e cilíndricas, o mesmo que normais
<b>Transversas</b>	Quando o eixo da superfície de projeção é perpendicular ao eixo da Terra
<b>Meridianas</b>	Nas projeções azimutais e cilíndricas, o mesmo que transversais
<b>Oblíquas</b>	Quando o eixo da superfície de projeção é oblíquo em relação ao eixo da Terra

## 1. Fundamentos



# 1. Fundamentos

## Quanto à geometria da rede de meridianos e paralelos

grupos e classes segundo Maling (1992)

<b>Grupo A</b>	Meridianos e paralelos curvilíneos	Projeções policónicas
<b>Grupo B</b>	Meridianos retilíneos, paralelos curvilíneos	
<b>Grupo C</b>	Meridianos curvilíneos, paralelos retilíneos (coordenadas retangulares) ou circulares (coordenadas polares)	Projeções pseudocilíndricas Projeções pseudoazimutais Projeções pseudocónicas
<b>Grupo D</b>	Meridianos retilíneos, paralelos retilíneos (coordenadas retangulares) ou circulares (coordenadas polares)	Projeções cilíndricas Projeções azimutais Projeções cónicas

# 1. Fundamentos

Para facilitar o estabelecimento de um esquema de classificação para as projeções cartográficas devem considerar-se os seguintes aspetos:

- o objeto projetado ou superfície datum;
- a superfície de projeção na qual a superfície datum é projetada - problema extrínseco;
- a projeção ou representação *per si*- problema intrínseco.

# 1. Fundamentos

### Problema extrínseco

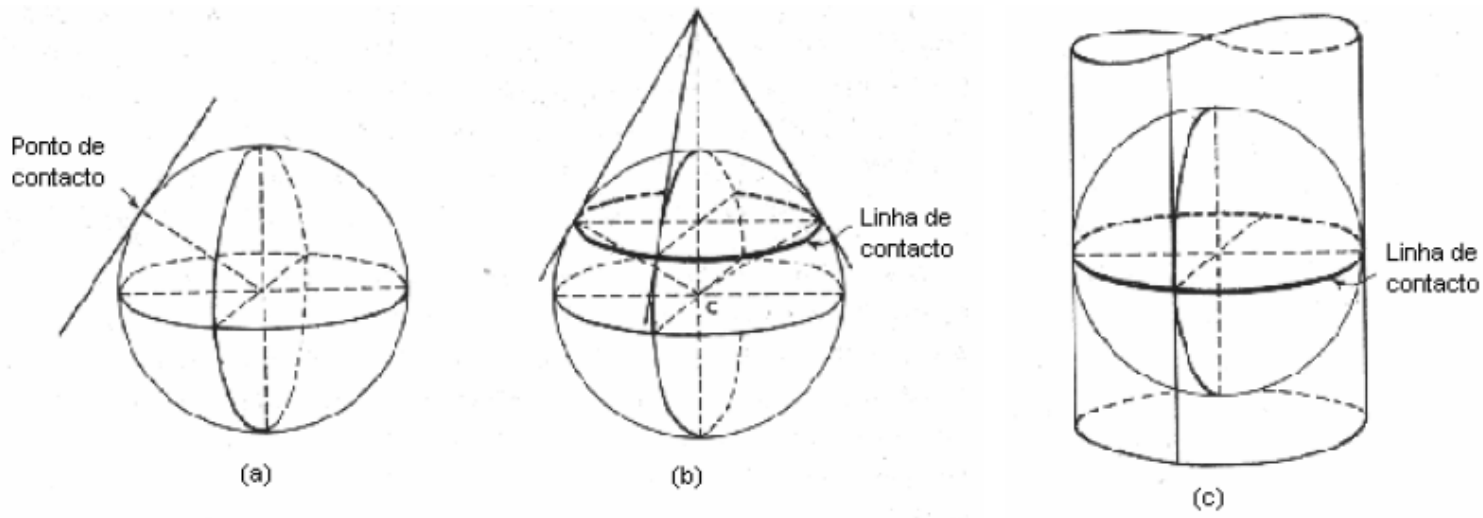
<b>Natureza</b>	Natureza da superfície de projeção definida como figura geométrica
<b>Coincidência</b>	Contato da superfície de projeção com a superfície datum
<b>Posição</b>	Alinhamento da superfície de projeção relativamente à superfície datum



## 1. Fundamentos

### Natureza

<b>Plano</b>	Superfície mais simples, que quando tangente à superfície datum tem apenas um ponto de contato ao qual corresponde o centro da área de mínima distorção
<b>Cone</b>	O cone e o cilindro, que são ambos planificáveis, aumentam a extensão de contato e, conseqüentemente, a área de distorção mínima
<b>Cilindro</b>	



## 1. Fundamentos

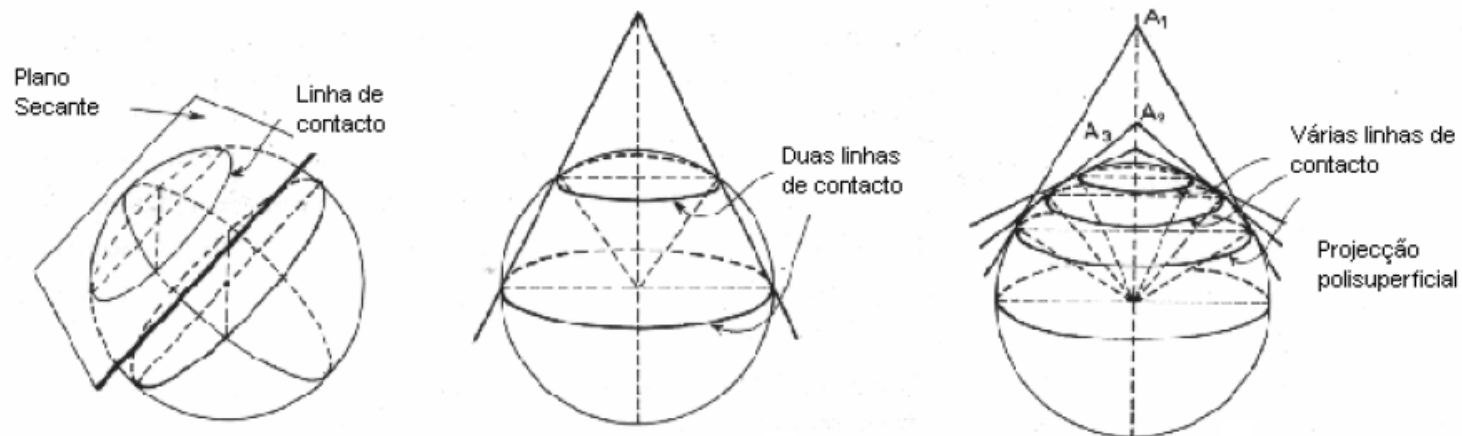
### Co incidência

#### Tangente

A tangência entre a superfície datum e a superfície de projeção resulta num ponto, no caso do plano, ou numa linha de contato, no caso do cone e do cilindro

#### Secante

A secante aumenta a área de contato entre as duas superfícies e consequentemente a área de distorção mínima, resultando numa linha de contato (em vez de um ponto), no caso do plano, e em duas linhas de contato, no caso do cone e do cilindro

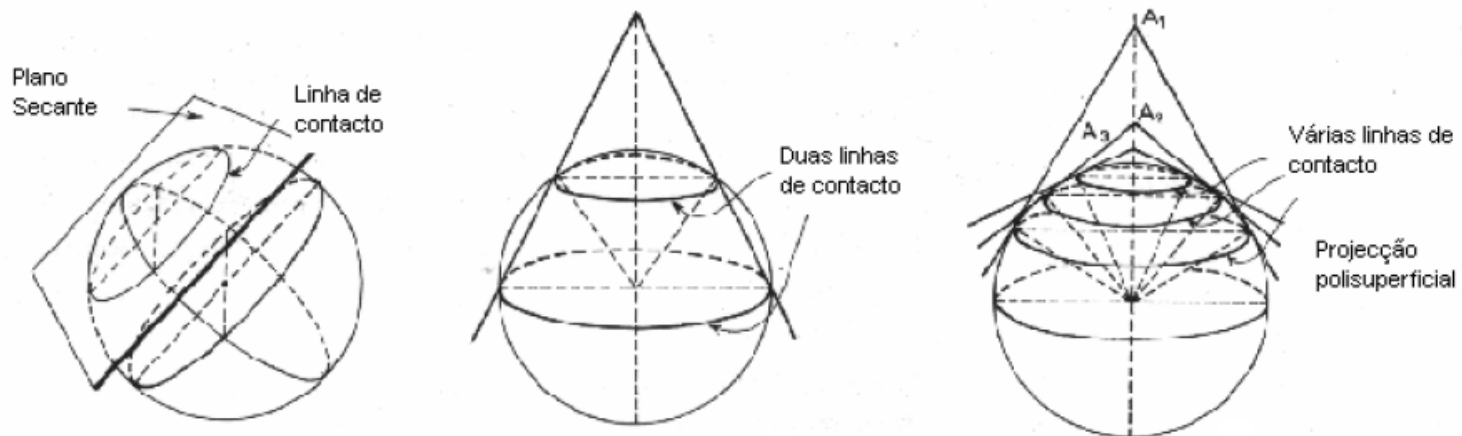


# 1. Fundamentos

## Co incidência

### Polisuperficial

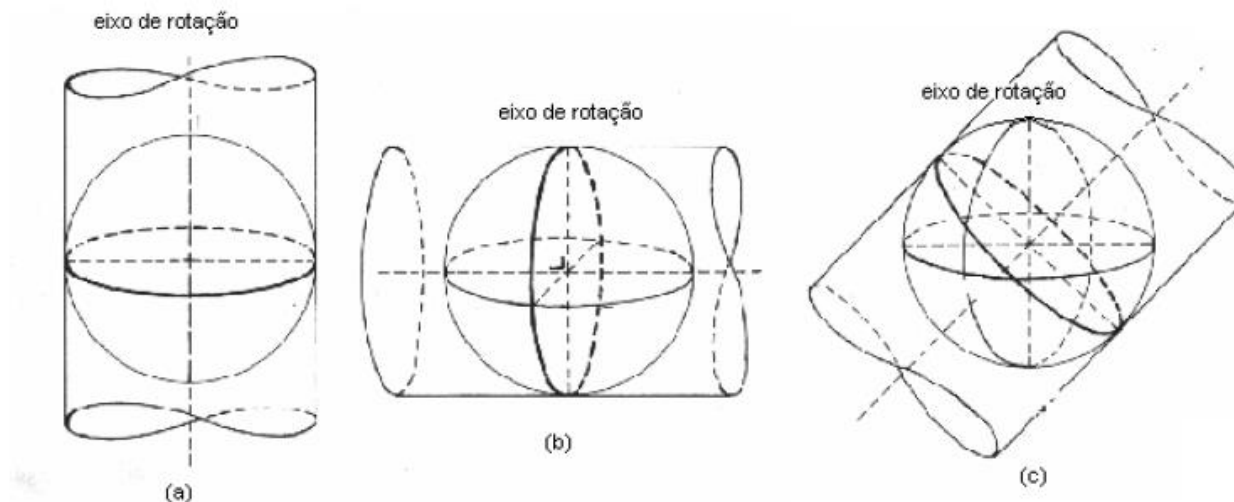
Para uma ainda maior área de contato e área de distorção mínima é utilizado o contato múltiplo, isto é uma série de sucessivas superfícies de projeção; uma série de sucessivos planos produz uma projeção poliédrica, uma série de cones uma projeção policónica e uma série de cilindros uma projeção policilíndrica



## 1. Fundamentos

### Posição

<b>Normal</b>	Quando o eixo de simetria da superfície de projeção coincide com o eixo de rotação do elipsóide ou da esfera
<b>Transversa</b>	Quando o eixo de simetria da superfície de projeção é perpendicular ao eixo de rotação do elipsóide ou da esfera
<b>Oblíqua</b>	Todas as outras atitudes do eixo de simetria são consideradas oblíquas



# 1. Fundamentos

### Problema intrínseco

#### Propriedades cartográficas

Representa os três critérios cartográficos básicos para a caracterização das projeções (equidistância, conformidade ou equivalência)

#### Tipo de construção

Representa os três principais modos de construção das projeções (geométricas, geométricas modificadas ou convencionais)

# 1. Fundamentos

Esquema de Classificação				
	CLASSES	VARIEDADES		
<b>Superfície de projeção (problema extrínseco)</b>	<b>Natureza</b>	Plana ou azimutal	Cônica	Cilíndrica
	<b>Coincidência</b>	Tangente	Secante	Polisuperficial
	<b>Posição</b>	Normal	Transversa	Oblíqua
<b>Projeção (problema intrínseco)</b>	<b>Propriedades</b>	Equidistante	Equivalente	Conforme
	<b>Tipo de construção</b>	Geométrica	Semi-geométrica	Convencional

## 1. Fundamentos

	Projeção de Bonne	Projeção de Mercator	Projeção de Gauss (Transversa de Mercator)	Projeção UTM (Universal Transversa de Mercator)
<b>Natureza</b>	Cônica	Cilíndrica	Cilíndrica	Cilíndrica
<b>Coincidência</b>	Tangente	Tangente	Tangente	Secante
<b>Posição</b>	Normal	Normal	Tranversa	Tranversa
<b>Propriedades</b>	Equivalente	Conforme	Conforme	Conforme
<b>Tipo de construção</b>	Convencional	Convencional	Convencional	Convencional

## 2. SISTEMAS DE COORDENADAS

2.1. Coordenadas planas

2.2. A geometria do elipsóide - coordenadas geográficas

2.3. Sistemas de projeção utilizados na cartografia nacional



# 2. Sistemas de coordenadas

Os sistemas de coordenadas são necessários para expressar a posição de pontos sobre uma qualquer superfície, seja ela o elipsoide, a esfera ou o plano.

## Sistemas de coordenadas planas

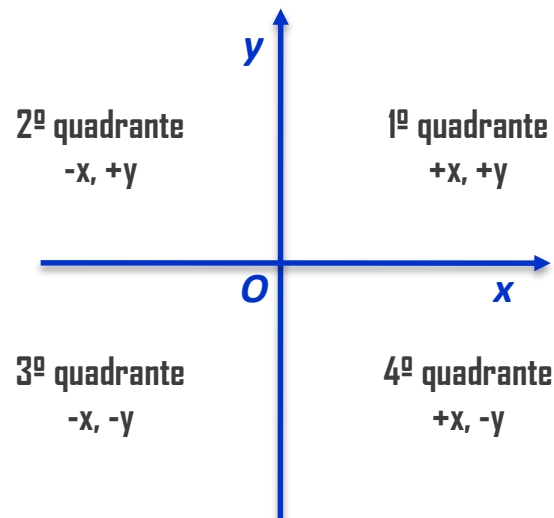
Os sistemas de coordenadas planas aplicam-se às representações planas da superfície da Terra.

De entre estes, destacam-se os sistemas de coordenadas retangulares e os sistemas de coordenadas polares.

## 2. Sistemas de coordenadas

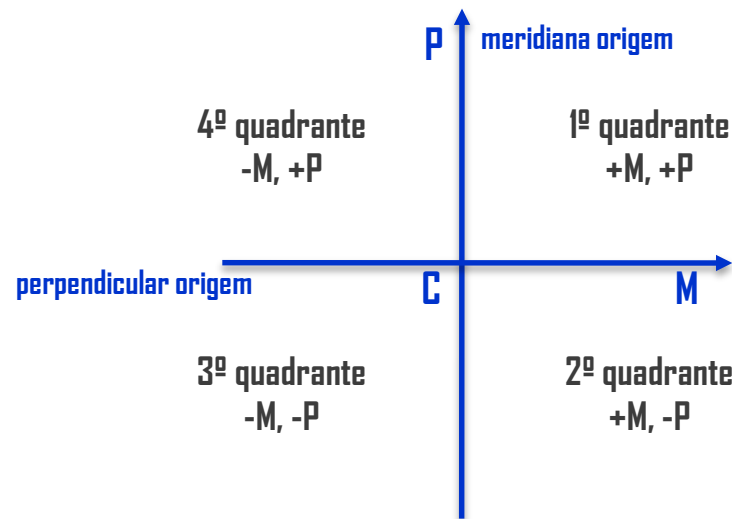
### Sistema de coordenadas retangulares

Um sistema de coordenadas cartesianas retangulares planas ou, mais simplesmente, um sistema de coordenadas retangulares, é todo aquele que utiliza duas medidas de distância retilínea  $(x,y)$  a dois eixos perpendiculares entre si, chamados eixos coordenados, para referenciar a posição de um ponto.



## 2. Sistemas de coordenadas

- O eixo das ordenadas (meridiana origem) deve coincidir com o meridiano central da projeção;
- O eixo das abcissas (perpendicular origem) é normal à meridiana origem num ponto  $C$  designado por ponto central.



$M$  (distância à meridiana)

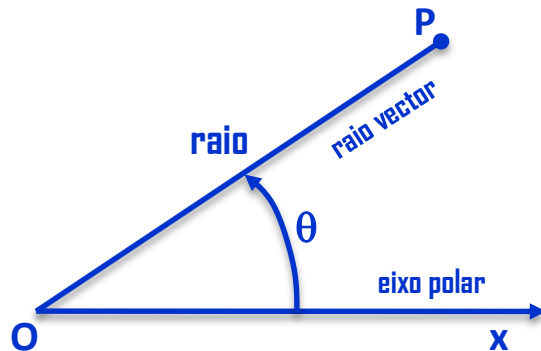
$P$  (distância à perpendicular)

expressas em unidades métricas

## 2. Sistemas de coordenadas

### Sistema de coordenadas polares

As coordenadas polares são uma forma alternativa de referenciar posições no plano, através de uma distância (raio) e de um ângulo ( $\theta$ ). Neste sistema utiliza-se um único eixo coordenado, designado por eixo polar.



raio (distância à origem do eixo polar)

expressa em unidades métricas

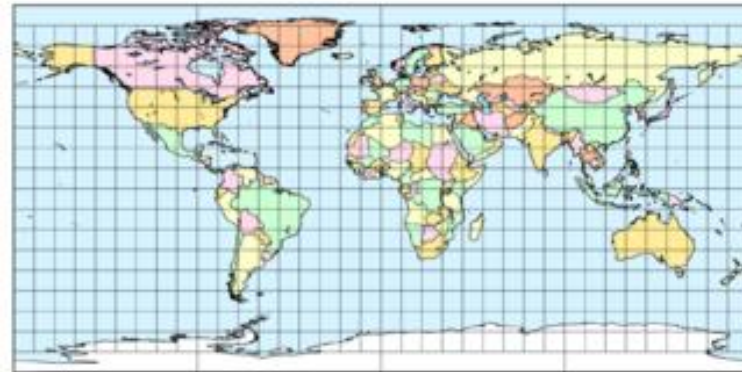
$\theta$  (ângulo entre o eixo polar e o raio vector)

expresso em unidades angulares

## 2. Sistemas de coordenadas

### Coordenadas retangulares *versus* coordenadas polares

- as coordenadas retangulares são mais apropriadas para a construção de projeções cilíndricas, em que os meridianos e os paralelos são retilíneos e perpendiculares entre si;
- as coordenadas polares são mais apropriadas para a construção de projeções cónicas e azimutais, em que os meridianos são retilíneos e concorrentes num ponto, e os paralelos são circunferências concêntricas nesse mesmo ponto.

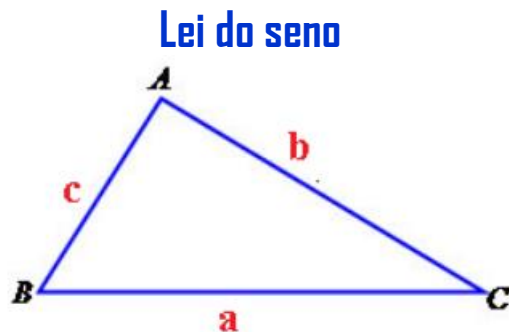


## 2. Sistemas de coordenadas

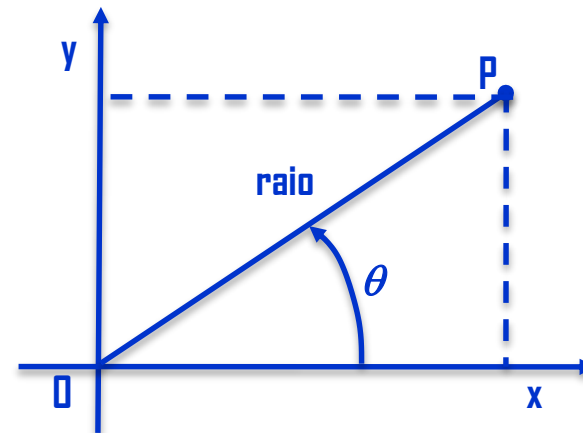
### Transformação de coordenadas retangulares em coordenadas polares

As seguintes expressões permitem converter um par de coordenadas polares (raio,  $\theta$ ) num par de coordenadas retangulares ( $x$ ,  $y$ ), em que a origem é comum e o eixo polar coincide com o eixo das abcissas.

$$\begin{aligned} x &= \text{raio} \cdot \cos \theta \\ y &= \text{raio} \cdot \sin \theta \end{aligned}$$



$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$



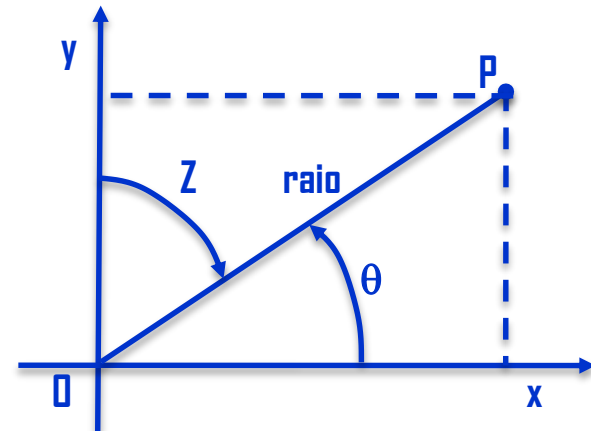
$$\frac{y}{\sin \theta} = \frac{\text{raio}}{\sin 90} = \frac{x}{\sin(90 - \theta)}$$

## 2. Sistemas de coordenadas

A conversão entre o sistema de coordenadas polares (raio,  $\theta$ ), utilizado em trigonometria, e o sistema (raio,  $Z$ ), utilizado em cartografia e navegação, consiste simplesmente em substituir o ângulo  $\theta$ , entre o eixo das abscissas e o raio vetor, medido no sentido contrário aos ponteiros do relógio, por um ângulo  $Z = 90^\circ - \theta$ , entre o eixo das ordenadas e o raio vetor, medido no sentido dos ponteiros do relógio.

$$x = \text{raio} \cdot \cos\theta = \text{raio} \cdot \cos(90^\circ - Z) = \text{raio} \cdot \sin Z$$

$$y = \text{raio} \cdot \sin\theta = \text{raio} \cdot \sin(90^\circ - Z) = \text{raio} \cdot \cos Z$$

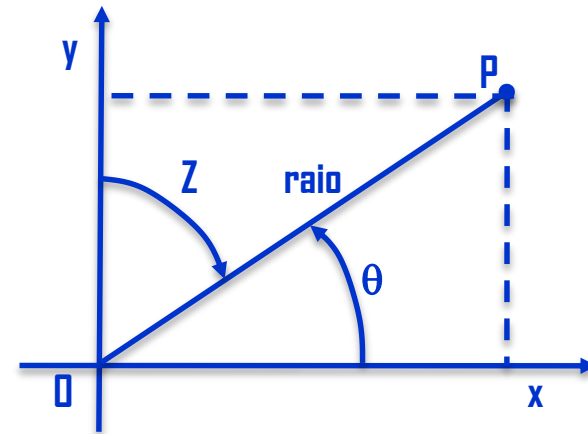


## 2. Sistemas de coordenadas

Alternativamente, um par de coordenadas retangulares  $(x, y)$  pode ser convertido num par de coordenadas polares (raio,  $\theta$ ), ou num par de coordenadas polares (raio,  $Z$ ), através das expressões.

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \tan Z = \frac{x}{y}$$

$$\text{raio} = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\cos\theta} = \frac{x}{\sin Z}$$





## 2. Sistemas de coordenadas

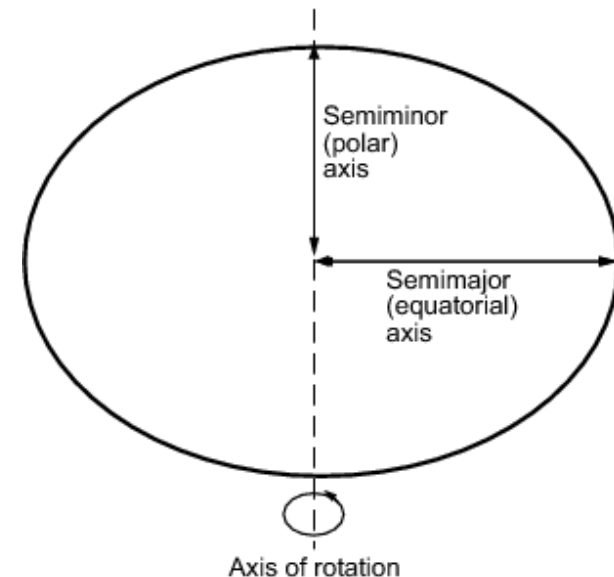
O elipsoide de revolução é a figura resultante da rotação de uma elipse em torno de um dos seus eixos.

Os elipsoides utilizados como modelos da Terra resultam da rotação de uma elipse, dita elipse meridiana, em torno do seu eixo menor, o qual representa o eixo de rotação da Terra.

Um elipsoide pode ser definido de forma inequívoca através de 2 parâmetros:

- semieixo maior ( $a$ );
- semieixo menor ( $b$ );

da elipse meridiana.



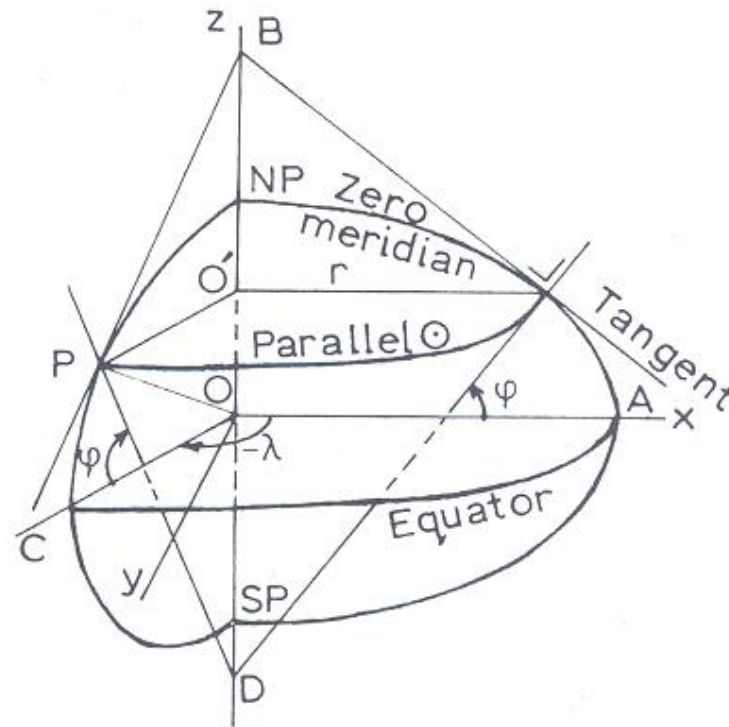
## 2. Sistemas de coordenadas

Outros parâmetros de utilização comum são o achatamento ( $f$ ) e a excentricidade ( $e$ ) do elipsoide, os quais são definidos pelas seguintes expressões:

$$f = \frac{a - b}{a}$$

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

$$e^2 = 1 - (1 - f)^2 = f \cdot (2 - f)$$



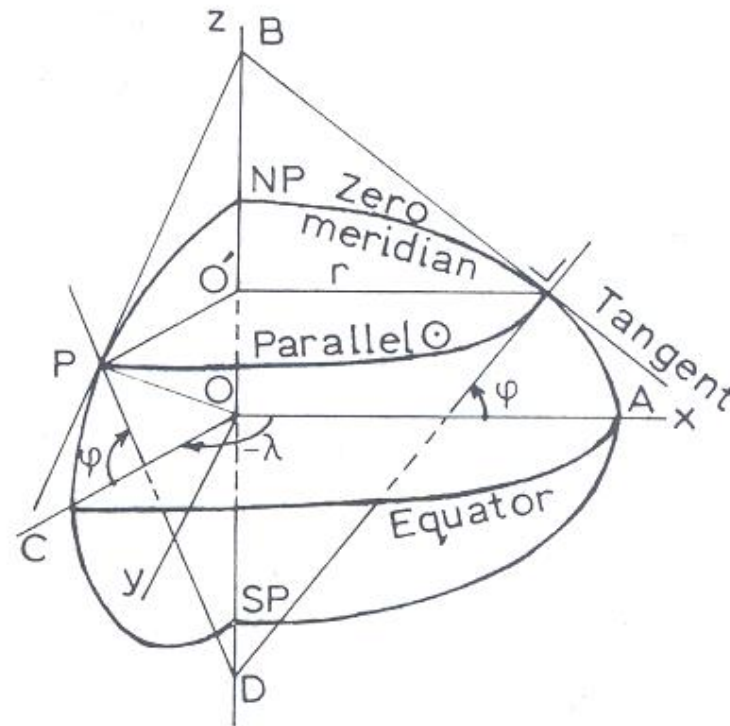
## 2. Sistemas de coordenadas

A equação do elipsoide num sistema de coordenadas cartesianas tridimensional é dada pela seguinte expressão:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

sendo que  $X, Y, Z$  são calculados por:

$$\begin{aligned} X &= N \cos \varphi \cos \lambda \\ Y &= N \cos \varphi \sin \lambda \\ Z &= N(1 - e^2) \sin \varphi \end{aligned}$$



## 2. Sistemas de coordenadas

O elipsóide de revolução tem graus de curvatura variáveis, quer com a posição, quer com a direção considerada:

- o raio de curvatura do meridiano ( $\rho$ ), definido no plano do meridiano, e;

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

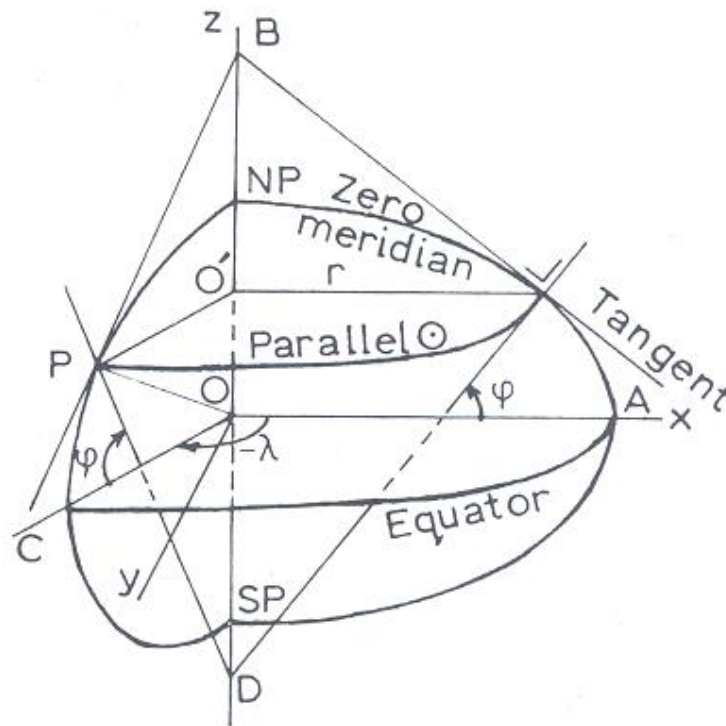
- o raio de curvatura segundo a primeira vertical (N), definido num plano que é perpendicular ao plano do meridiano.

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}$$

## 2. Sistemas de coordenadas

O raio do círculo paralelo que passa por P ( $r$ ) com  $\varphi$  constante é dado pela seguinte expressão:

$$PO' = N \cos \varphi = r$$



## 2. Sistemas de coordenadas

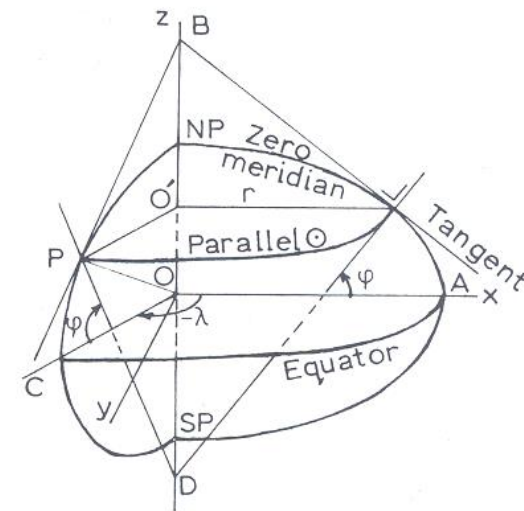
### Coordenadas geográficas no elipsoide

Os sistemas de coordenadas geográficas aplicam-se a modelos tridimensionais, tais como a esfera e o elipsoide de revolução.

As coordenadas geográficas no elipsoide designam-se por:

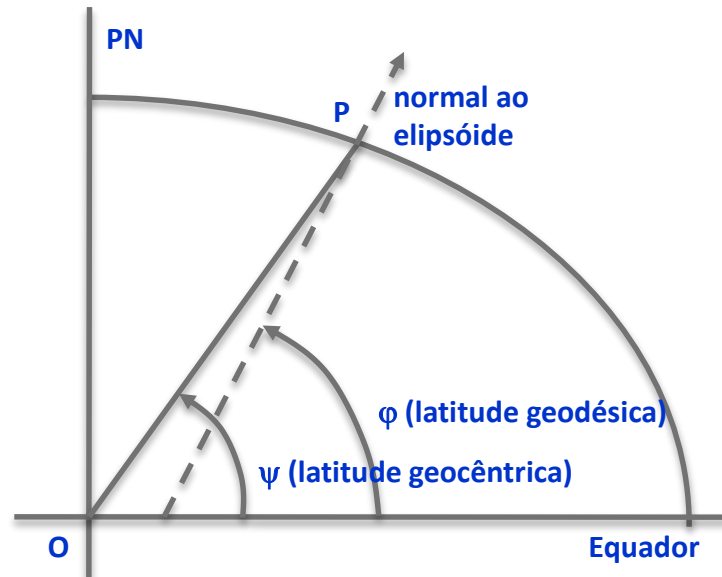
- latitude geodésica ( $\varphi$ ): ângulo entre a normal ao elipsoide PD em P e o eixo equatorial CO;
- longitude geodésica ( $\lambda$ ): ângulo contado no plano do equador desde o meridiano de referência e o meridiano que passa por P;

sendo expressas em graus, minutos e segundos de arco.



## 2. Sistemas de coordenadas

Um outro parâmetro por vezes utilizado é a latitude geocêntrica ( $\psi$ ), definida como o ângulo entre o plano do equador e a linha que une o centro do elipsoide com a posição à superfície.

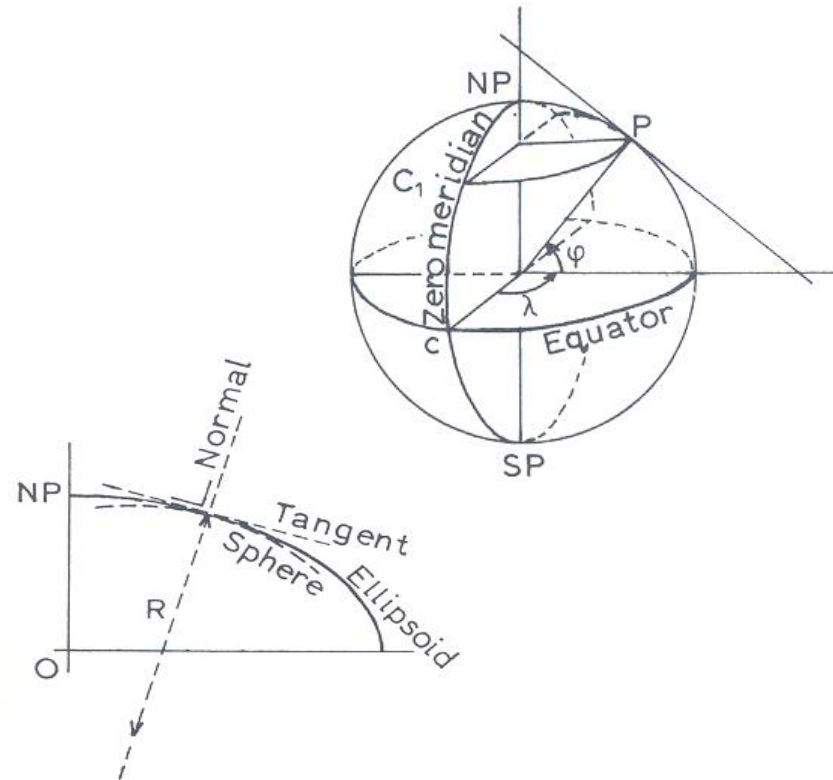


## 2. Sistemas de coordenadas

Todas as expressões anteriores são válidas para a esfera. Considerando  $e = 0$ , existe um único raio de curvatura

$$\rho = N = R$$

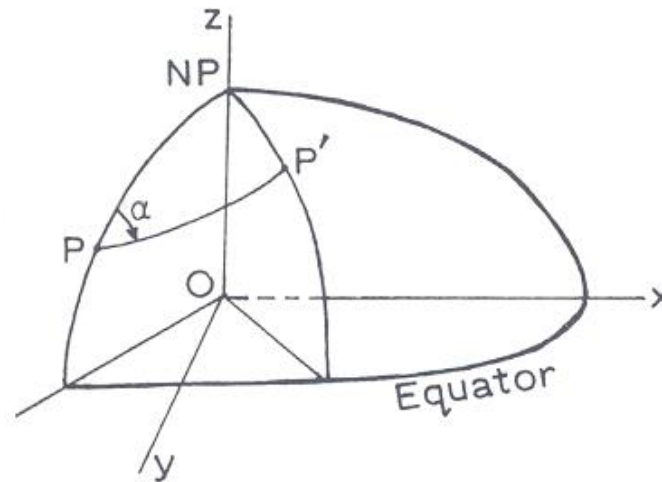
e a latitude geodésica ( $\varphi$ ) coincide com a latitude geocêntrica ( $\psi$ ).





## 2. Sistemas de coordenadas

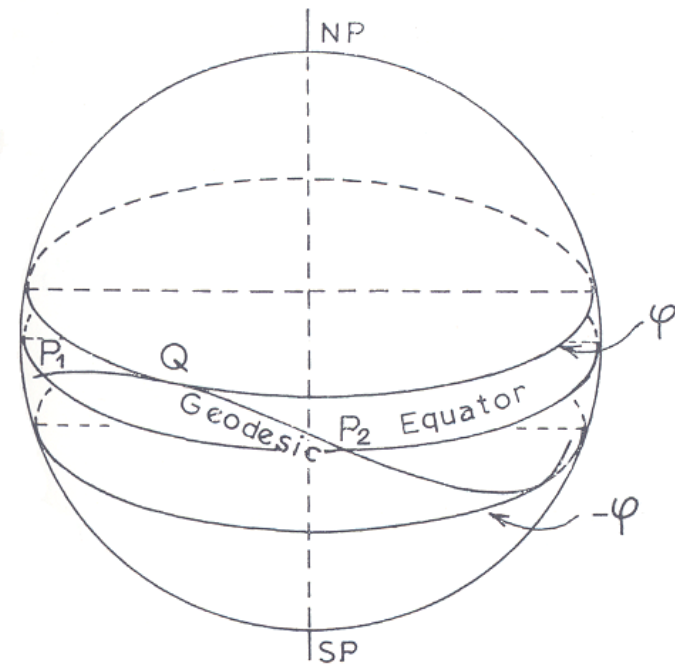
O azimute de um dado arco  $PP'$  sobre uma superfície corresponde ao ângulo  $\alpha$  contado no sentido dos ponteiros do relógio a partir da direção Norte.



## 2. Sistemas de coordenadas

**Linhas com propriedades especiais - a geodésica, o círculo máximo e a ortodrômica**

A geodésica corresponde ao caminho mais curto entre dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  sobre a superfície do elipsóide; progredindo ao longo desta linha curva, o azimute ( $\alpha$ ) da tangente a cada ponto muda continuamente.

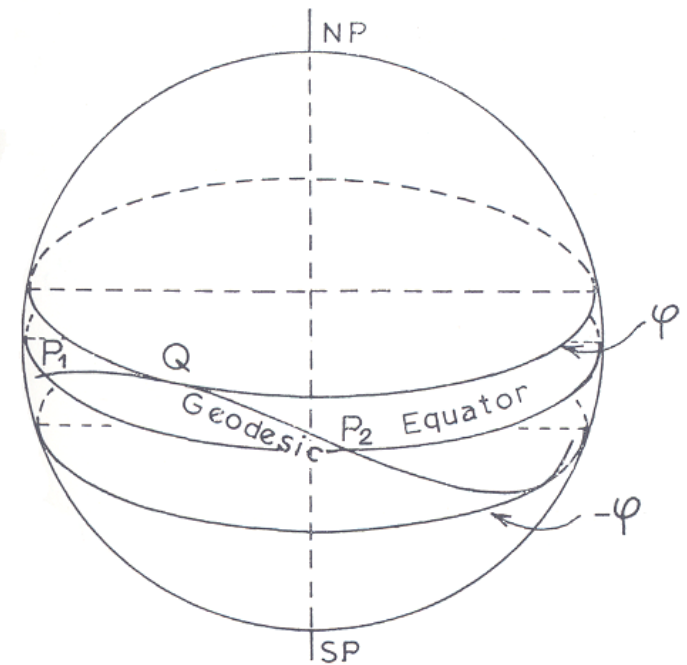


## 2. Sistemas de coordenadas

Em cada ponto  $P$  da geodésica existe a seguinte relação de acordo com o teorema de Clairaut:

$$r \sin \alpha = N \cos \varphi \sin \alpha = c \text{ (constante)}$$

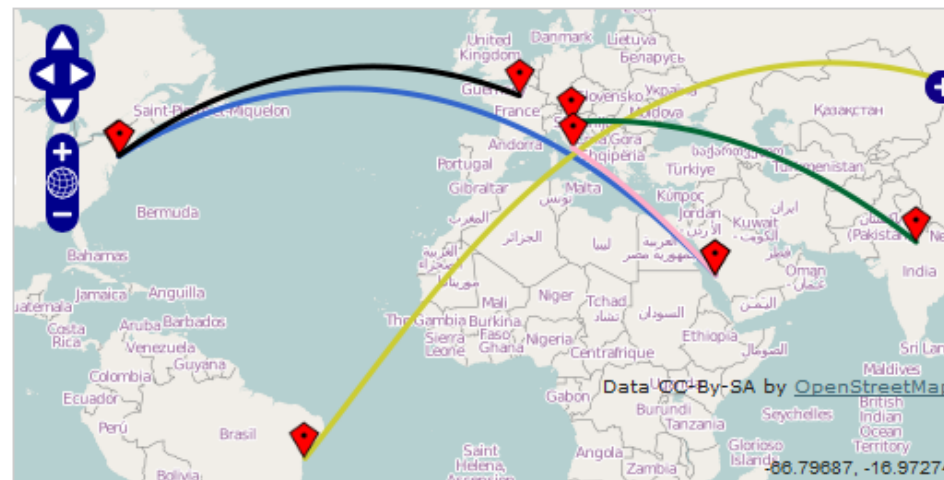
(o produto do raio do círculo paralelo de  $P$  pelo seno do azimute de uma geodésica é uma constante)



## 2. Sistemas de coordenadas

- Todos os meridianos são círculos máximos (geodésicas), no entanto, nenhum paralelo o é (embora o teorema de Clairaut seja satisfeito), exceto o equador;
- A geodésica só é projetada como uma linha reta nas projeções gnomónicas (à projeção de uma geodésica é dado o nome de ortodrómica).

Great Circle Lines



Lat Origin: 48.8574

Lat Destination: 40.7597

Lon Origin: 2.3510

Lon Destination: -73.9984

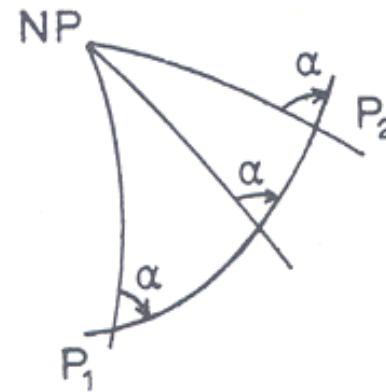
Color: #000000

Add Line

## 2. Sistemas de coordenadas

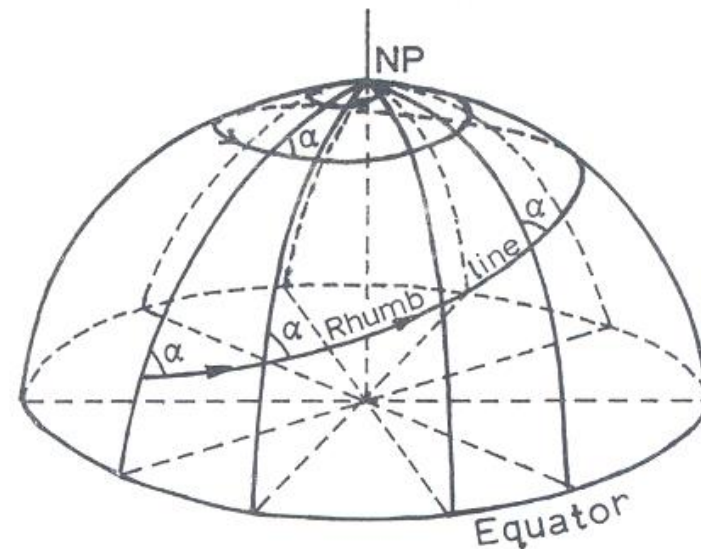
A loxodrómica entre dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  é uma curva que intersecta os meridianos com um azimute ( $\alpha$ ) constante.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\log \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{1}{2} \varphi_2) - \log \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{1}{2} \varphi_1)}$$

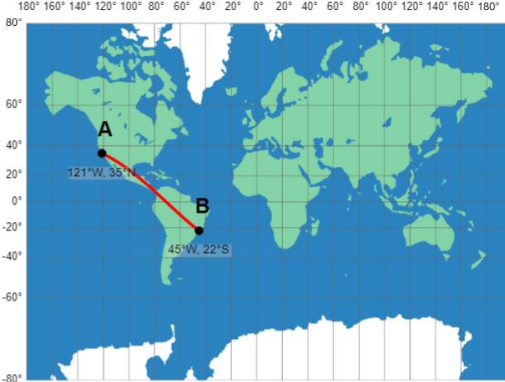
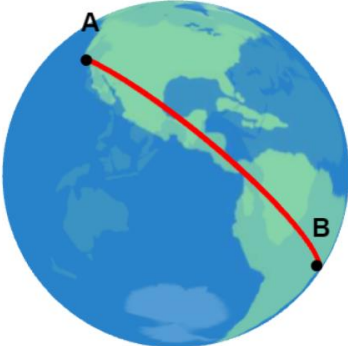


## 2. Sistemas de coordenadas

- Os meridianos são curvas loxodrómicas de ângulo nulo e a linha do Equador, ou os paralelos geográficos, são curvas loxodrómicas perpendiculares aos meridianos.
- Uma curva loxodrómica não corresponde ao caminho mais curto entre dois pontos, excepto quando o arco da curva loxodrómica está contido na linha do Equador (círculo máximo) ou num meridiano (semi-círculos máximos);
- Qualquer outra curva loxodrómica assume a forma de uma espiral em direção aos pólos.
- A loxodrómica só é projetada como uma linha reta na projeção de Mercator.

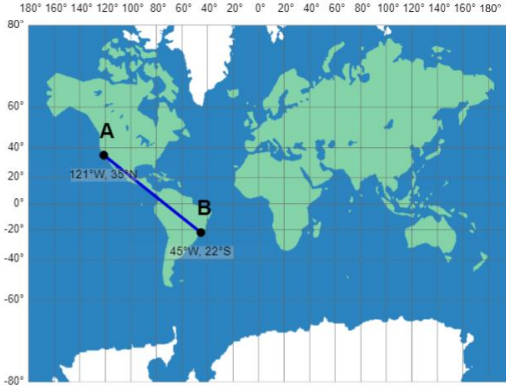
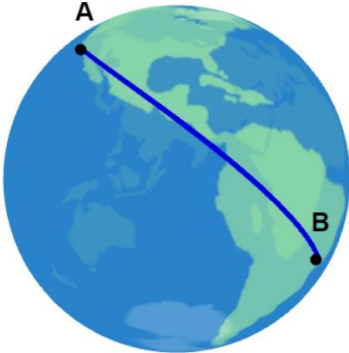


# 2. Sistemas de coordenadas



Orthodromic distance : 10245 km

- Great Circle
- Rhumb Line

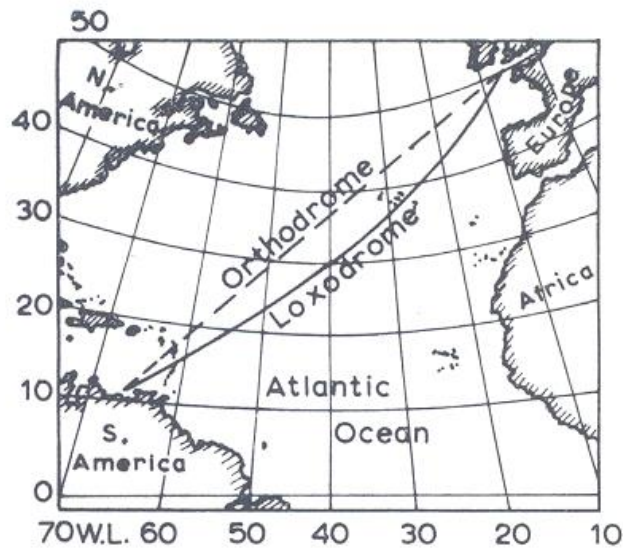


Loxodromic distance : 10272 km

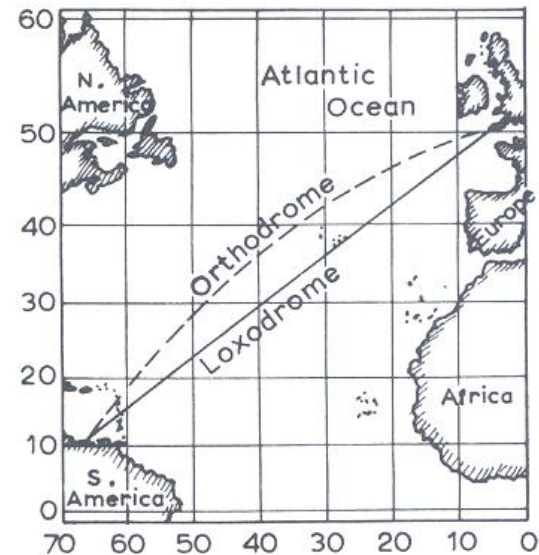
- Great Circle
- Rhumb Line

## 2. Sistemas de coordenadas

A loxodrómica é de especial importância na navegação dado que é projetada como uma linha reta entre pontos na projeção cilíndrica conforme de Mercator.



Projeção gnômica



Projeção de Mercator

<https://www.coursera.org/lecture/introduction-gis-mapping/great-circles-and-rhumb-lines-jHUtd>



## 2. Sistemas de coordenadas

### 2.3.SISTEMAS DE PROJEÇÃO UTILIZADOS NA CARTOGRAFIA NACIONAL

Um sistema de representação plana é definido por:

- um datum geodésico (elipsoidal ou esférico);
- uma projeção;
- uma origem para a projeção;
- uma origem para as coordenadas retangulares;
- outros parâmetros, tais como a indicação das linhas onde se conserva a escala ou de um fator de escala.

## 2. Sistemas de coordenadas

### 2.3. SISTEMAS DE PROJEÇÃO UTILIZADOS NA CARTOGRAFIA NACIONAL

Hayford-Gauss/ Datum Lisboa	Hayford-Gauss/ Datum 73	PT-TM06/ETRS89
Hayford ou Internacional	Hayford ou Internacional	GRS80
Antigo V.G. do Castelo de São Jorge em Lisboa	V.G. Melriça	-
Gauss (Transversa de Mercator)	Gauss (Transversa de Mercator)	Gauss (Transversa de Mercator)
Ponto Central - origem da projecção $\varphi = 39^{\circ} 40' 00''$ N $\lambda = 08^{\circ} 07' 54'' .863$ W	Ponto Central- origem da projecção $\varphi = 39^{\circ} 40' 00''$ N $\lambda = 08^{\circ} 07' 54'' .863$ W	Origem da projecção $\varphi = 39^{\circ} 40' 05'' .73$ N $\lambda = 08^{\circ} 07' 59'' .19$ W
Origem das coordenadas rectangulares igual à origem da projecção	Falsa origem M= + 180.598 m P= - 86.990 m	Origem das coordenadas rectangulares igual à origem da projecção
ko= 1	ko= 1	ko= 1

Portugal Continental - DGT

PTRA08-UTM/ITRF93
GRS80
-
UTM (Universal Transversa de Mercator)
Origem da projecção $\varphi = 0^{\circ}$ Fuso 25 ( $\lambda = 33^{\circ}$ W, Açores - grupo ocidental) Fuso 26 ( $\lambda = 27^{\circ}$ W, Açores - grupo central e oriental) Fuso 28 ( $\lambda = 15^{\circ}$ W, Madeira)
Falsa origem M= + 500 000 m
ko= 0.9996

Regiões Autónomas- DGT

## 2. Sistemas de coordenadas

### 2.3. SISTEMAS DE PROJEÇÃO UTILIZADOS NA CARTOGRAFIA NACIONAL

Hayford-Gauss/ Datum Lisboa Militares	TM/WGS84
Hayford ou Internacional	WGS84
Antigo V.G. do Castelo de São Jorge em Lisboa	-
Gauss (Transversa de Mercator)	Gauss (Transversa de Mercator)
Ponto Central - origem da projecção $\varphi = 39^{\circ} 40' 00''$ N $\lambda = 08^{\circ} 07' 54'' .862$ W	Origem da projecção $\varphi = 39^{\circ} 40' 05'' .73$ N $\lambda = 08^{\circ} 07' 59'' .19$ W
Falsa origem M= + 200 000 m P= + 300 000 m	Falsa origem M= + 200 000 m P= + 300 000 m
$k_0 = 1$	$k_0 = 1$

Portugal Continental - CIGeoE

UTM/WGS84
WGS84
-
UTM (Universal Transversa de Mercator)
Origem da projecção $\varphi = 0^{\circ}$ Fuso 25 ( $\lambda = 33^{\circ}$ W, Açores - grupo ocidental) Fuso 26 ( $\lambda = 27^{\circ}$ W, Açores - grupo central e oriental) Fuso 28 ( $\lambda = 15^{\circ}$ W, Madeira)
Falsa origem M= + 500 000 m W
$k_0 = 0.9996$

Regiões Autónomas- CIGeoE

# 3. A TEORIA DAS PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

- 3.1. Fórmula geral da transformação. Condições de unicidade, reversibilidade e correspondência entre curvas paramétricas
- 3.2. Geometria diferencial elementar. A matriz de transformação
- 3.3. Outros conceitos
- 3.4. A teoria das distorções das distâncias, ângulos e áreas
- 3.5. A indicatriz de Tissot

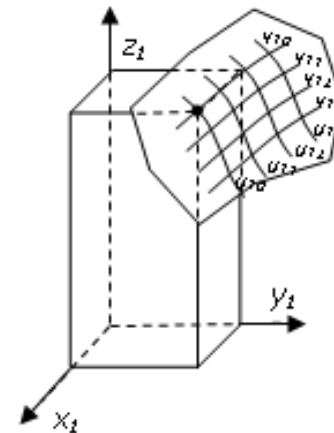
# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.1. FÓRMULA GERAL DA TRANSFORMAÇÃO. CONDIÇÕES DE UNICIDADE, REVERSIBILIDADE E CORRESPONDÊNCIA ENTRE CURVAS PARAMÉTRICAS

Um dado sistema de curvas paramétricas  $(u, v)$  pode ser adotado sobre uma superfície curva, logo cada ponto dessa superfície pode ser dado em coordenadas cartesianas tridimensionais  $x, y, z$  como função de  $u$  e  $v$ .

$$\begin{cases} x = p_1(u, v) \\ y = p_2(u, v) \\ z = p_3(u, v) \end{cases} \quad (3.1)$$

superfície datum



$$\begin{cases} x_1 = p'_1(u_1, v_1) \\ y_1 = p'_2(u_1, v_1) \\ z_1 = p'_3(u_1, v_1) \end{cases} \quad (3.2)$$

superfície de projeção

# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.1. FÓRMULA GERAL DA TRANSFORMAÇÃO. CONDIÇÕES DE UNICIDADE, REVERSIBILIDADE E CORRESPONDÊNCIA ENTRE CURVAS PARAMÉTRICAS

As curvas paramétricas da superfície datum estão relacionadas com um sistema de curvas na superfície de projeção se existir uma relação matemática entre os parâmetros  $(u, v)$  e  $(u_1, v_1)$ , e vice-versa:

$$\begin{cases} u_1 = q_1(u, v) \\ v_1 = q_2(u, v) \end{cases} \quad (3.3)$$

É óbvio que para representarmos a superfície da Terra, ou qualquer outra superfície curva, numa esfera ou num plano, duas condições devem ser satisfeitas

- a projeção deve ser única (condição de unicidade);
- a projeção deve ser reversível (condição de reversibilidade).

# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.1. FÓRMULA GERAL DA TRANSFORMAÇÃO. CONDIÇÕES DE UNICIDADE, REVERSIBILIDADE E CORRESPONDÊNCIA ENTRE CURVAS PARAMÉTRICAS

Tal significa que a um dado ponto na superfície datum deve corresponder um único ponto na superfície de projeção e vice-versa. Matematicamente, tal pode ser expresso pela condição de que os parâmetros  $u$  e  $v$  devem ser resolúveis a partir das equações (3.3), tendo-os como função de  $u_1$  e  $v_1$ .

$$\begin{cases} u = \bar{q}_1(u_1, v_1) \\ v = \bar{q}_2(u_1, v_1) \end{cases} \quad (3.4)$$

Sem mais restrições, as curvas paramétricas  $u$  e  $v$  por norma não correspondem ao sistema  $(u_1, v_1)$ , constituindo um outro sistema arbitrário diferente. No entanto, a relação entre  $(u, v)$  e  $(u_1, v_1)$  pode ser estabelecida eliminando  $u_1$  e  $v_1$  da equação (3.2) com a ajuda de (3.3), obtendo-se a fórmula geral da transformação:

$$\begin{cases} x = p_1(u, v) \\ y = p_2(u, v) \\ z = p_3(u, v) \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \bar{p}_1(u, v) \\ y_1 = \bar{p}_2(u, v) \\ z_1 = \bar{p}_3(u, v) \end{cases} \quad (3.5)$$

# 3. A teoria das projeções cartográficas

### 3.2.1. Elemento linear e expressões angulares

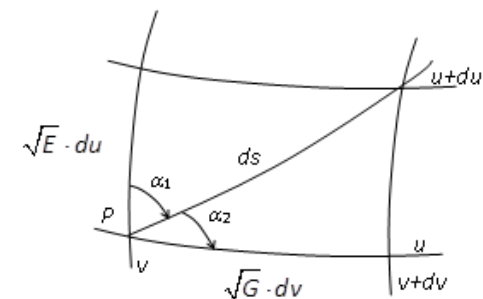
De acordo com uma fórmula da geometria diferencial o quadrado do comprimento infinitesimal de uma parte de uma curva, designado abreviadamente por elemento linear,  $ds$ , sobre uma superfície é dado por:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.6)$$

derivando as expressões (3.1) em ordem a  $u$  e  $v$ , obtém-se:

$$\begin{cases} x = p_1(u, v) \\ y = p_2(u, v) \\ z = p_3(u, v) \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv \\ dy = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv \\ dz = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot dv \end{cases} \quad (3.7)$$





# 3. A teoria das projeções cartográficas

substituindo (3.7) em (3.6), resulta que:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= \left( \frac{\partial x}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot dv \right)^2 = \dots \\
 &= \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \right]}_E \cdot du^2 + 2 \underbrace{\left[ \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \right]}_F \cdot dudv \\
 &\quad + \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \right]}_G \cdot dv^2
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Os coeficientes de  $du^2$ ,  $du \cdot dv$  e  $dv^2$  são designados por primeiros coeficientes superficiais de Gauss e são designados na literatura por  $E$ ,  $F$  e  $G$ , respetivamente. Deste modo, a expressão (3.6) passa a escrever-se da seguinte forma:

$$ds^2 = E \cdot du^2 + 2F \cdot dudv + G \cdot dv^2 \tag{3.9}$$

# 3. A teoria das projeções cartográficas

**Exercício** - Determine os três coeficientes de Gauss E, F e G para um elipsoide de revolução com as seguintes equações para métricas:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \lambda \\ y = r \cdot \sin \lambda \\ z = z \end{cases}$$

sendo que r e z são funções da latitude  $\phi$ .

**Resolução:** No elipsoide tem-se que  $u = \phi$  e  $v = \lambda$ , logo:

$$\begin{cases} E = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2 = \left(\cos \lambda \cdot \frac{\partial r}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\sin \lambda \cdot \frac{\partial r}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial \phi}\right)^2 \cdot (\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2 = \\ \qquad \qquad \qquad = \left(\frac{\partial r}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2 \\ F = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial z}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \lambda}\right) = \left(\cos \lambda \cdot \frac{\partial r}{\partial \phi}\right) \cdot (r \cdot (-\sin \lambda)) + \left(\sin \lambda \cdot \frac{\partial r}{\partial \phi}\right) \cdot (r \cdot \cos \lambda) + 0 = 0 \\ G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2 = (r \cdot (-\sin \lambda))^2 + (r \cdot \cos \lambda)^2 + 0 = r^2 \cdot (\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) = r^2 \end{cases}$$

Relação fundamental da trigonometria

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

# 3. A teoria das projeções cartográficas

Seja  $a \in \mathbb{R}$  uma constante.

<i>Função:</i>	<i>Derivada</i>
$y = a$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = ax$	$y' = a$
$y = x^a$	$y' = ax^{a-1}$
$y = a^x$	$y' = \ln(a) \cdot a^x$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \log_a(x)$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
$y = \ln(x)$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \text{sen}(x)$	$y' = \cos(x)$
$y = \cos(x)$	$y' = -\text{sen}(x)$
$y = \text{tg}(x)$	$y' = \text{sec}^2(x)$
$y = \text{sec}(x)$	$y' = \text{tg}(x) \cdot \text{sec}(x)$
$y = \text{cossec}(x)$	$y' = -\text{cotg}(x) \cdot \text{cossec}(x)$
$y = \text{cotg}(x)$	$y' = -\text{cossec}^2(x)$

### Regras de Derivação:

$$h(x) = a \cdot f(x) \Rightarrow h'(x) = a \cdot f'(x)$$

- **Regra da Soma e Subtração**

$$h(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$h(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) - g'(x)$$

- **Regra do Produto**

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- **Regra do Quociente**

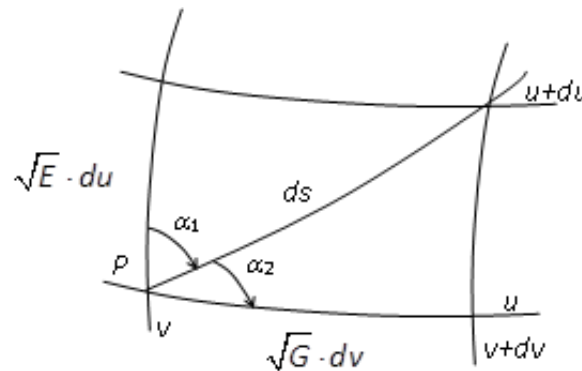
$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

- **Regra da Cadeia**

$$h(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

# 3. A teoria das projeções cartográficas

Considerando um paralelogramo diferencial num ponto P de uma dada curva, as curvas coordenadas  $u = \text{const.}$  e  $v = \text{const.}$  serão, no caso da Cartografia, os paralelos e meridianos, respetivamente:



Para a curva coordenada  $u = \text{const.}$ , tem-se então que  $du = 0$ , logo substituindo em (3.9) obtemos:

$$ds_u^2 = G \cdot dv^2 \Leftrightarrow ds_u = \sqrt{G} \cdot dv$$

$$ds^2 = E \cdot du^2 + 2F \cdot dudv + G \cdot dv^2 \quad (3.9)$$

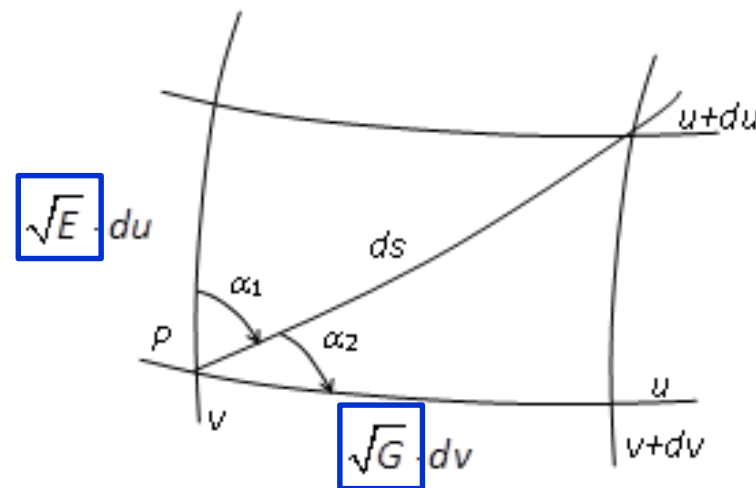
# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.2. GEOMETRIA DIFERENCIAL ELEMENTAR. A MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO

De igual modo, se  $v = \text{const.}$ , então  $dv = 0$ , logo:

$$ds_v^2 = E \cdot du^2 \Leftrightarrow ds_v = \sqrt{E} \cdot du$$

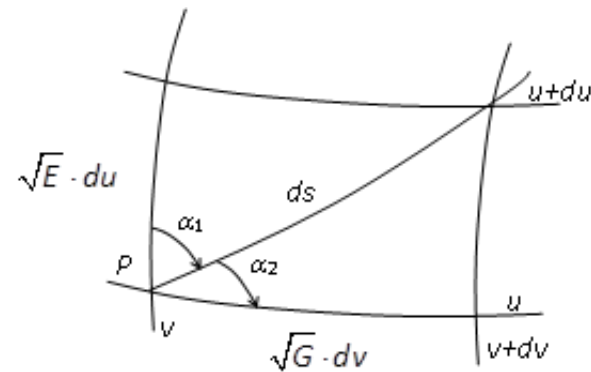
Atuando as quantidades salientadas a azul, como unidades de medida ao longo das curvas  $u$  e  $v$  sobre uma dada superfície.



# 3. A teoria das projeções cartográficas

Tem-se também que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \theta \quad (3.10)$$



sendo  $\theta$  o ângulo de interseção das curvas coordenadas  $u$  e  $v$  no ponto  $P$  (i.e., o ângulo entre as tangentes às curvas  $u$  e  $v$  em  $P$ ).

# 3. A teoria das projeções cartográficas

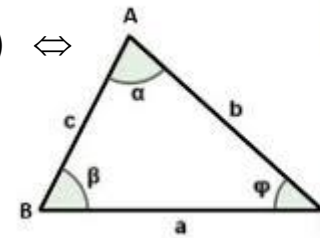
## 3.2. GEOMETRIA DIFERENCIAL ELEMENTAR. A MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO

Um paralelogramo pode considerar-se plano dada a sua área infinitamente pequena, pelo que se pode aplicar a lei do coseno, obtendo-se:

$$ds^2 = (\sqrt{E} \cdot du)^2 + (\sqrt{G} \cdot dv)^2 - 2(\sqrt{E} \cdot du) \cdot (\sqrt{G} \cdot dv) \cdot \cos(180^\circ - \theta) \Leftrightarrow$$

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2 + 2\sqrt{EG} \cdot dudv \cdot \cos \theta \quad (3.11)$$

Lei do coseno



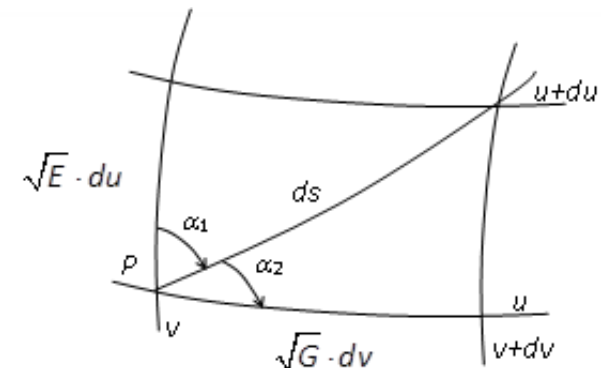
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \phi$$

Logo, igualando as expressões (3.11) e (3.9), obtem-se:

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad (3.12)$$



A igualdade (3.12) mostra que a condição necessária e suficiente para que as curvas coordenadas  $u$  e  $v$  sejam ortogonais é que  $F = 0$ .

# 3. A teoria das projeções cartográficas

Considerando que  $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ , resulta que:

Relação fundamental da trigonometria

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{F}{\sqrt{EG}}\right)^2} = \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}} \quad (3.13)$$

O ângulo  $\alpha_1$  entre a tangente à curva coordenada  $v = \text{const.}$  e a tangente a uma curva  $ds$  num dado ponto  $P$ , denominado azimute de  $ds$ , obtem-se aplicando novamente a lei do cosseno, igualando esta expressão à expressão (3.11) de seguida, e substituindo  $\cos\theta$ , pela sua expressão em (3.12):

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \left( E \cdot \frac{du}{ds} + F \cdot \frac{dv}{ds} \right) \quad (3.14)$$



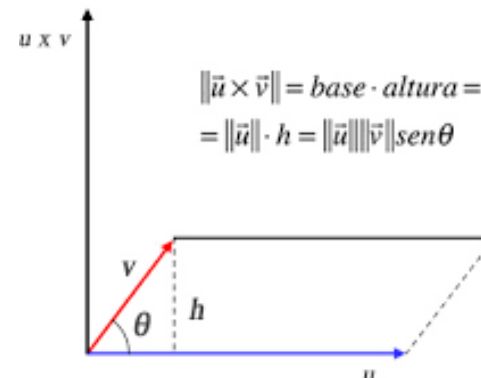
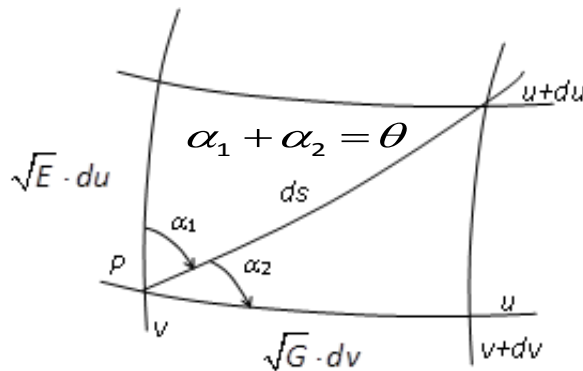
# 3. A teoria das projeções cartográficas

Considerando novamente que  $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ , resulta que:

$$\sin\alpha_1 = \sqrt{\frac{E \cdot G - F^2}{E}} \cdot \frac{dv}{ds} \quad (3.16)$$

A área elementar do paralelogramo é dada pelo produto externo de dois vetores:

$$A = \sqrt{EG} \cdot du \cdot dv \cdot \sin\theta$$



# 3. A teoria das projeções cartográficas

Substituindo  $\sin\theta$  pela sua expressão em (3.13), tem-se que:

$$A = \sqrt{EG - F^2} \cdot du \cdot dv \quad (3.18)$$

A expressão  $EG - F^2$  é definida positiva. Num sistema paramétrico ortogonal ( $u, v$ ) onde  $\theta = 90^\circ$ ,  $F = 0$  e a expressão para a área do paralelogramo passa a ser:

$$A = \sqrt{EG} \cdot du \cdot dv$$

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}} \quad (3.13)$$

# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.2. GEOMETRIA DIFERENCIAL ELEMENTAR. A MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO

Todas as expressões anteriores são aplicáveis também à superfície de projeção, usando as seguintes letras:

Superfície datum (u, v)	Superfície de projeção (u, v)
E	$e_1$
F	$f_1$
G	$g_1$
$\alpha$	$\beta$
$\theta$	$\Omega$

$$ds_1^2 = e_1 \cdot du^2 + 2f_1 \cdot dudv + g_1 \cdot dv^2$$

$$\sin \beta = \sqrt{\frac{e_1 g_1 - f_1^2}{e_1}} \cdot \frac{dv}{ds}$$

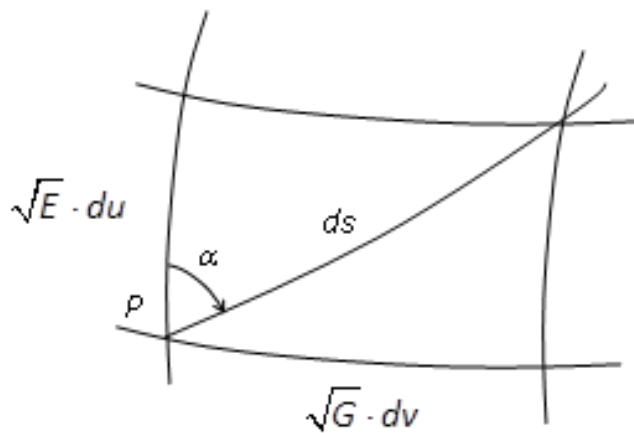
$$\cos \Omega = \frac{f_1}{\sqrt{e_1 g_1}}$$

$$A = \sqrt{e_1 g_1 - f_1^2} du \cdot dv$$

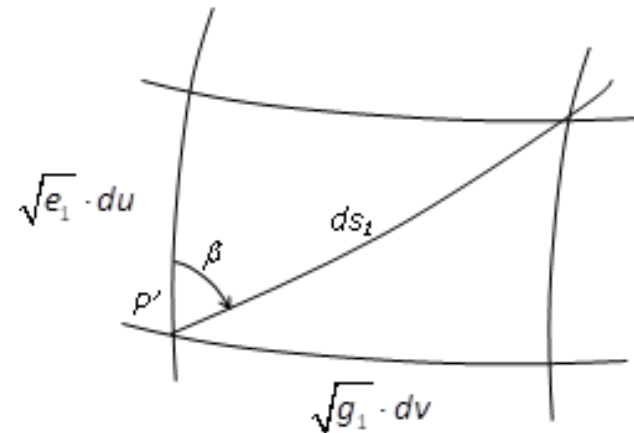
# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.2. GEOMETRIA DIFERENCIAL ELEMENTAR. A MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO

Superfície datum (u, v)	Superfície de projeção (u, v)
E	$e_1$
F	$f_1$
G	$g_1$
$\alpha$	$\beta$
$\theta$	$\Omega$



superfície datum



superfície de projeção

# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.2.2. A matriz de transformação fundamental. O determinante do jacobiano

Considerando duas superfícies  $S$  e  $S_1$ , e sobre cada uma delas um sistema de coordenadas curvilíneas  $(u, v)$  e  $(u_1, v_1)$ , obtemos os seguintes elementos lineares  $ds$  e  $ds_1$ :

$$\begin{aligned} ds^2 &= E \cdot du^2 + 2F \cdot dudv + G \cdot dv^2 \\ ds_1^2 &= E_1 \cdot du_1^2 + 2F_1 \cdot du_1dv_1 + G_1 \cdot dv_1^2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Derivando as expressões (3.3) que estabelecem a correspondência entre os pontos das duas superfícies, obtem-se que:

$$\begin{aligned} du_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot dv \\ dv_1 &= \frac{\partial v_1}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial v_1}{\partial v} \cdot dv \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u_1 = q_1(u, v) \\ v_1 = q_2(u, v) \end{cases} \quad (3.3)$$

# 3. A teoria das projeções cartográficas

Substituindo estas expressões na segunda expressão em (3.19), vamos obter o elemento linear  $ds_1$  em termos das coordenadas  $u$  e  $v$ :

$$ds_1^2 = E_1 \cdot \left( \frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot dv \right)^2 + 2F_1 \cdot \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot dv \right) \cdot \left( \frac{\partial v_1}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial v_1}{\partial v} \cdot dv \right) \right] + G_1 \cdot \left( \frac{\partial v_1}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial v_1}{\partial v} \cdot dv \right)^2 = \dots = e_1 \cdot du^2 + 2f_1 \cdot dudv + g_1 \cdot dv^2$$

onde,  $e_1$ ,  $f_1$  e  $g_1$  são iguais a:

$$\begin{aligned} e_1 &= E_1 \cdot \left( \frac{\partial u_1}{\partial u} \right)^2 + 2F_1 \cdot \left( \frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial u} \right) + G_1 \cdot \left( \frac{\partial v_1}{\partial u} \right)^2 \\ f_1 &= E_1 \cdot \left( \frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial v} \right) + F_1 \cdot \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v} \right) + \left( \frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial u} \right) \right] + G_1 \cdot \left( \frac{\partial v_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v} \right) \\ g_1 &= E_1 \cdot \left( \frac{\partial u_1}{\partial v} \right)^2 + 2F_1 \cdot \left( \frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v} \right) + G_1 \cdot \left( \frac{\partial v_1}{\partial v} \right)^2 \end{aligned} \tag{3.20}$$

# 3. A teoria das projeções cartográficas

A relação entre os coeficientes  $e_1$ ,  $f_1$  e  $g_1$  e os coeficientes  $E_1$ ,  $F_1$  e  $G_1$  pode ser expressa em notação matricial da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ f_1 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 & 2 \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial u}\right) & \left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial v}\right) & \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial u}\right) & \left(\frac{\partial v_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v}\right) \\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 & 2 \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v}\right) & \left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ F_1 \\ G_1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

sendo esta matriz designada por matriz fundamental da transformação.

# 3. A teoria das projeções cartográficas

O termo  $e_1 \cdot g_1 - f_1^2$  pode ser deduzido a partir das expressões anteriores, podendo também ser expresso como o produto de dois determinantes:

$$e_1 \cdot g_1 - f_1^2 = \begin{vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial u} & \frac{\partial u_1}{\partial v} \\ \frac{\partial v_1}{\partial u} & \frac{\partial v_1}{\partial v} \end{vmatrix}^2 = (E_1 \cdot G_1 - F_1^2) \cdot \left( \frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v} - \frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial u} \right)^2 = (E_1 \cdot G_1 - F_1^2) \cdot \Delta^2 \quad (3.22)$$

sendo o segundo determinante, designado abreviadamente por  $\Delta$ , o determinante do jacobiano de  $(u_1, v_1)$  com respeito a  $(u, v)$ .

Com as funções descritas desta forma pode garantir-se que a cada par  $(u, v)$  corresponde um ponto sobre a superfície datum e outro sobre a superfície de projeção, dado que este determinante é sempre diferente de zero.



# 3. A teoria das projeções cartográficas

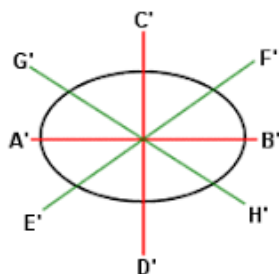
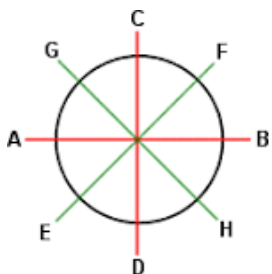
## 3.3. OUTROS CONCEITOS

### 3.3.1. A deformação linear. Condições de conformidade e de equivalência

O módulo da deformação linear,  $k$ , também designado por fator de escala, é definido pela seguinte razão:

$$k^2 = \frac{ds_1^2}{ds^2} = \frac{e_1 du^2 + 2f_1 dudv + g_1 dv^2}{E du^2 + 2F dudv + G dv^2} = \frac{e_1 \left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2f_1 \frac{du}{dv} + g_1}{E \left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2F \frac{du}{dv} + G} \quad (3.23)$$

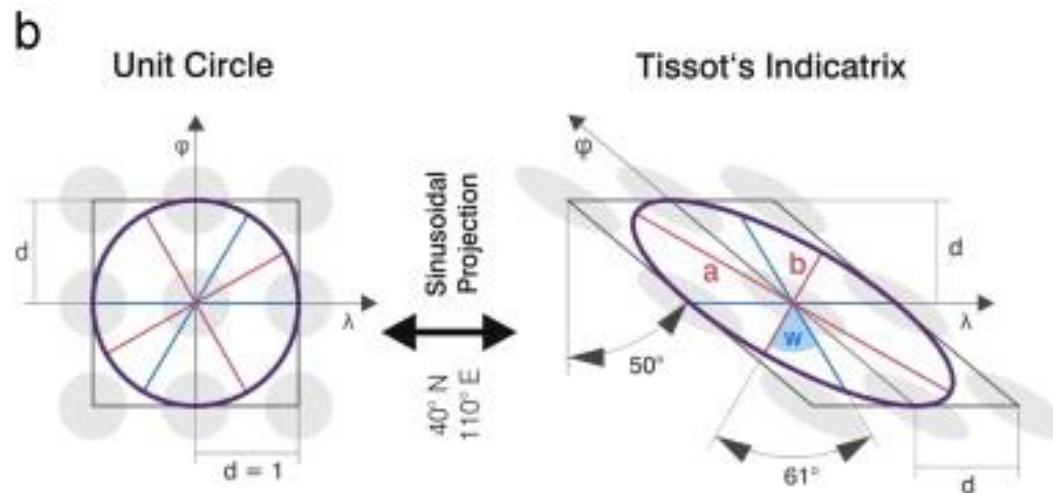
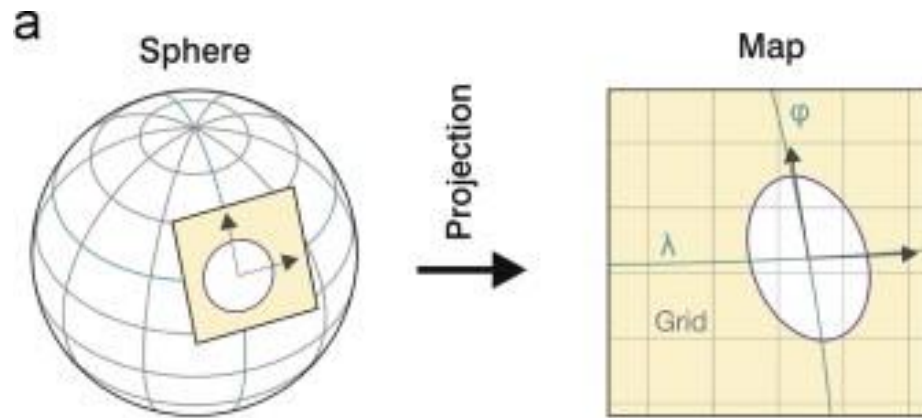
de notar que  $k$  depende da direção  $du/dv$  da tangente ao ponto  $P$  e que é diferente em cada direção. No entanto, existe uma exceção, nomeadamente, quando os coeficientes do denominador são respetivamente proporcionais aos do numerador:



$$k^2 = \frac{e_1}{E} = \frac{f_1}{F} = \frac{g_1}{G} \quad (3.24)$$

# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.3. OUTROS CONCEITOS



# 3. A teoria das projeções cartográficas

Deste modo, o fator de escala é então independente de  $du/dv$ , e é o mesmo em todas as direções.

Esta condição deve ser satisfeita para todas as projeções conformes. Esta mesma condição mantém os ângulos livres de distorções na imagem. Tal pode ser observado a partir das expressões (3.13) e (3.16) em combinação com (3.24), resultando em:

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}} = \frac{\sqrt{\frac{e_1}{k^2} \cdot \frac{g_1}{k^2} - \left(\frac{f_1}{k^2}\right)^2}}{\sqrt{\frac{e_1}{k^2} \cdot \frac{g_1}{k^2}}} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\sqrt{e_1 \cdot g_1 - f_1^2}}{\sqrt{e_1 \cdot g_1}} = \sin \Omega$$
$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} \cdot \frac{dv}{ds} = \frac{\sqrt{\frac{e_1}{k^2} \cdot \frac{g_1}{k^2} - \left(\frac{f_1}{k^2}\right)^2}}{\sqrt{\frac{e_1}{k^2}}} \cdot \frac{dv}{ds} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\sqrt{e_1 \cdot g_1 - f_1^2}}{\sqrt{e_1}} \cdot \frac{dv}{ds} = \sin \beta$$

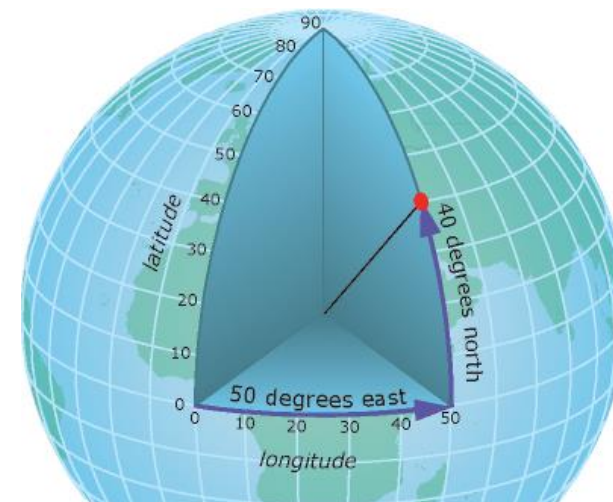
com  $k=1$ .

# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.3. OUTROS CONCEITOS

### 3.3.2. Coeficientes superficiais de Gauss no elipsoide, na esfera e no plano. Coordenadas isométricas

No caso da Cartografia o que se pretende é a representação da superfície do elipsoide de revolução sobre uma superfície de projeção (plano, cilindro ou cone). Em geral, consideram-se sobre a superfície do elipsoide, as coordenadas latitude e longitude ( $\phi, \lambda$ ) e sobre a superfície de projeção, as coordenadas retangulares/planas, ( $x, y$ ) ou as coordenadas polares ( $R, \theta$ ).



# 3. A teoria das projeções cartográficas

Um elipsoide pode então ser descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} X = N \cdot \cos \phi \cdot \cos \lambda \\ Y = N \cdot \cos \phi \cdot \sin \lambda \\ Z = N \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \phi \end{cases} \quad (3.26)$$

sendo N o raio de curvatura na direção da primeira vertical perpendicular à direção do meridiano.

Neste caso, as curvas paramétricas sobre a superfície do elipsoide são os meridianos e as trajetórias ortogonais são os círculos de paralelo ( $u = \phi$  e  $v = \lambda$ ).

# 3. A teoria das projeções cartográficas

A expressão do elemento linear sobre a superfície datum é dada por:

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$$

pelo que derivando as expressões (3.26) e considerando as expressões dos coeficientes superficiais de Gauss, E, F e G, na expressão (3.8), se obtém que:

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \left(\frac{dX}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{d\phi}\right)^2 = \dots = \rho^2 \\ F = 0 \\ G = \left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{d\lambda}\right)^2 = (-N \cdot \cos\phi \cdot \sin\lambda)^2 + (N \cdot \cos\phi \cdot \cos\lambda)^2 = \dots \\ \quad = N^2 \cdot \cos^2\phi = r^2 \end{array} \right. \quad (3.27)$$

# 3. A teoria das projeções cartográficas

e conseqüentemente a expressão do elemento linear passa a escrever-se da seguinte forma:

$$ds^2 = \rho^2 d\phi^2 + N^2 \cos^2 \phi d\lambda^2 = \rho^2 d\phi^2 + r^2 d\lambda^2 \quad (3.28)$$

No caso da esfera tem-se que  $\rho = N = R$ , logo:

$$ds^2 = R^2 d\phi^2 + R^2 \cos^2 \phi d\lambda^2 \quad (3.31)$$

No caso do elipsoide e da esfera, o sistema de coordenadas  $(\phi, \lambda)$  não é um sistema isométrico, i. e. não tem a mesma métrica ao longo dos dois eixos principais. No entanto, estas coordenadas podem ser submetidas a uma transformação com vista a tornar iguais as unidades de medida.

# 3. A teoria das projeções cartográficas

No caso do elipsoide, colocando  $N^2 \cdot \cos^2 \phi$  em evidência na expressão (3.28), tem-se que:

$$ds^2 = N^2 \cdot \cos^2 \phi \cdot \left[ \left( \frac{\rho d\phi}{N \cos \phi} \right)^2 + d\lambda^2 \right] = r^2 \cdot \left[ \left( \frac{\rho d\phi}{r} \right)^2 + d\lambda^2 \right] \quad (3.34)$$

Introduzindo uma nova variável  $\Phi$ , designada por latitude isométrica, cuja relação com a latitude geodésica é dada por:

$$d\Phi = \frac{\rho}{N \cdot \cos \phi} d\phi = \frac{(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \phi) \cdot \cos \phi} d\phi \quad (3.35)$$



## 3. A teoria das projeções cartográficas

A expressão (3.34) passa então a escrever-se da seguinte forma:

$$ds^2 = N^2 \cdot \cos^2 \phi \cdot (d\Phi^2 + d\lambda^2) \quad (3.37)$$

sendo o novo sistema de coordenadas designado por sistema de coordenadas isométricas. Integrando a expressão (3.35), obtem-se a seguinte expressão para a latitude isométrica:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \frac{\rho}{N \cos \phi} d\phi = \ln \left[ \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{1}{2} \phi \right) \cdot \left( \frac{1 - e \sin \phi}{1 + e \sin \phi} \right)^{\frac{e}{2}} \right] = \dots \\ &= \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{1}{2} \phi \right) + \frac{e}{2} \ln \left( \frac{1 - e \sin \phi}{1 + e \sin \phi} \right) + c \end{aligned} \quad (3.36)$$

em que  $e$  é a excentricidade do elipsoide,  $\ln$  é o logaritmo natural e  $c$  é uma constante, a qual é igual a zero. De notar que, a latitude isométrica se torna infinita nas regiões polares e assume o valor zero no equador.

# 3. A teoria das projeções cartográficas

No caso da esfera, colocando  $R^2 \cdot \cos^2 \phi$  em evidência na expressão (3.31), tem-se que o elemento linear é dado por:

$$ds^2 = R^2 \cdot \cos^2 \phi \cdot (d\Phi^2 + d\lambda^2) \quad (3.39)$$

A latitude isométrica na esfera deriva-se diretamente da expressão (3.36) colocando a excentricidade e igual a zero, resultando em:

$$\Phi_{esf} = \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{1}{2} \phi \right) \quad (3.38)$$

# 3. A teoria das projeções cartográficas

No plano tem-se a seguinte expressão para o elemento linear  $ds_1$ , considerando  $u_1 = x$  e  $v_1 = y$

$$ds_1^2 = E_1 dx^2 + G_1 dy^2 = dx^2 + dy^2 \quad (3.32)$$

pelo que

$$E_1 = G_1 = 1 \quad e \quad F_1 = 0 \quad (3.33)$$

as unidades de medida ao longo dos eixos coordenados são iguais. Tal não se verifica nas expressões (3.28) e (3.31), pois  $E \neq G$ .

# 3. A teoria das projeções cartográficas

Num sistema de coordenadas polares plano, considerando  $u_1 = R$  e  $v_1 = \theta$ , o elemento linear  $ds_1$  é dado por,

$$ds_1^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2 \quad (3.40)$$

onde  $R$  é o raio polar e  $\theta$  o ângulo polar. Tal resulta de:

$$ds_1^2 = E_1 dR^2 + G_1 d\theta^2$$

$$x = R \cos \theta$$

$$y = R \sin \theta$$

$$E_1 = \left( \frac{dx}{dR} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dR} \right)^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$F_1 = 0$$

$$G_1 = \left( \frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\theta} \right)^2 = R^2 \sin^2 \theta + R^2 \cos^2 \theta = R^2$$

## 3. A teoria das projeções cartográficas

Os primeiros coeficientes de Gauss  $E_1$  e  $G_1$  não são iguais aos da equação (3.32), pelo que o sistema também não é isométrico. De igual forma se pode transformar este sistema num outro sistema equivalente que seja isométrico. Colocando  $R^2$  em evidência, obtem-se:

$$ds_1^2 = R^2 \left( \frac{dR^2}{R^2} + d\theta^2 \right) = R^2 (d\mu^2 + d\theta^2) \quad (3.41)$$

onde as coordenadas  $\mu$  e  $\theta$  são isométricas.

# 3. A teoria das projeções cartográficas

- Num sistema de coordenadas retangulares os paralelogramos elementares são retângulos, logo  $\theta = 90^\circ$  e  $F = 0$ . Estes paralelogramos tornam-se quadrados num sistema de coordenadas isométrico.
- As coordenadas isométricas são de extrema importância nas projeções conformes. Embora os coeficientes principais de Gauss, na condição de conformidade (3.24), possam ser derivados diretamente de (3.21), a introdução dos parâmetros isométricos simplifica consideravelmente as expressões.

$$k^2 = \frac{e_1}{E} = \frac{f_1}{F} = \frac{g_1}{G} \quad (3.24)$$

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ f_1 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 & 2 \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial u}\right) & \left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial v}\right) & \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial u}\right) & \left(\frac{\partial v_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v}\right) \\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 & 2 \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v}\right) & \left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ F_1 \\ G_1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.4. A TEORIA DAS DISTORÇÕES DAS DISTÂNCIAS, ÂNGULOS E ÁREAS

### 3.4.1. Pares ortogonais correspondentes

Definindo um sistema retangular de curvas paramétricas  $(u, v)$  sobre a superfície datum ( $F=0$ ), o correspondente conjunto de curvas na superfície de projeção é por regra não retangular ( $f_1 \neq 0$ ). Sendo assim, a expressão da deformação linear  $k$  assume a seguinte forma:

$$k^2 = \frac{ds_1^2}{ds^2} = \frac{e_1 du^2 + 2f_1 dudv + g_1 dv^2}{ds^2}$$

Atendendo às expressões do  $\cos$  (3.14) e do  $\sin$  (3.16) do azimute  $\alpha$  de uma linha qualquer sobre uma superfície, omitindo o índice  $_1$  em  $\alpha$  por conveniência, e considerando que  $F=0$ , obtem-se a seguinte igualdade para  $k$ :

$$k^2 = e \cdot \cos^2 \alpha + 2f \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + g \cdot \sin^2 \alpha \quad (3.43)$$

# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.4. A TEORIA DAS DISTORÇÕES DAS DISTÂNCIAS, ÂNGULOS E ÁREAS

dado que:

$$\sin \alpha = \sqrt{G} \frac{dv}{ds} \quad \cos \alpha = \sqrt{E} \frac{du}{ds}$$

e sendo as expressões de e, f e g iguais a:

$$e = \frac{e_1}{E}$$

$$f = \frac{f_1}{\sqrt{EG}}$$

$$g = \frac{g_1}{G}$$



# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.4. A TEORIA DAS DISTORÇÕES DAS DISTÂNCIAS, ÂNGULOS E ÁREAS

No entanto, Tissot (1881) provou que em cada ponto da superfície datum existe um conjunto de curvas paramétricas retangulares, as quais têm um conjunto de curvas correspondentes com as mesmas características na superfície de projeção.

Estas curvas são designadas por curvas paramétricas principais ( $f_1=0$ ). Consequentemente, a expressão de  $k$  pode então ser simplificada passando a:

$$k^2 = \frac{ds_1^2}{ds^2} = \frac{e_1 du^2 + g_1 dv^2}{ds^2} = e \cdot \cos^2 \alpha + g \cdot \sin^2 \alpha \quad (3.44)$$

# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.4. A TEORIA DAS DISTORÇÕES DAS DISTÂNCIAS, ÂNGULOS E ÁREAS

### 3.4.2. A deformação linear

De acordo com a expressão 3.43, a deformação linear  $k$  assume a seguinte forma:

$$k^2 = e \cdot \cos^2 \alpha + 2f \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + g \cdot \sin^2 \alpha \quad (3.43)$$

Para determinar o valor máximo e mínimo para a deformação linear, anula-se a derivada do segundo membro da expressão em ordem a  $\alpha$ , obtendo-se:

$$\begin{aligned} \frac{d(k^2)}{d\alpha} &= -2 \cdot e \cdot \cos \alpha \sin \alpha + 2 \cdot f \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2 \cdot g \cdot \sin \alpha \cos \alpha = \\ (g - e) \cdot \sin 2\alpha + 2f \cdot \cos 2\alpha &= 0 \end{aligned}$$

Arco duplo

$$\begin{aligned} \sin(2a) &= 2 \sin(a) \cdot \cos(a) \\ \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) \end{aligned}$$

# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.4. A TEORIA DAS DISTORÇÕES DAS DISTÂNCIAS, ÂNGULOS E ÁREAS

expressão esta que é equivalente a:

$$\boxed{tg2\alpha = \frac{2f}{(e-g)}} \quad (3.46)$$

Reescrevendo a expressão da deformação linear em coordenadas cartesianas e calculando os valores próprios desta expressão, obtem-se o valor máximo e mínimo para a deformação linear:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[ (e+g) + \sqrt{(e-g)^2 + 4 \cdot f^2} \right]} \\ k_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[ (e+g) - \sqrt{(e-g)^2 + 4 \cdot f^2} \right]} \end{array} \right. \quad (3.47)$$

# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.4. A TEORIA DAS DISTORÇÕES DAS DISTÂNCIAS, ÂNGULOS E ÁREAS

Analisando estas duas igualdades rapidamente se verifica que:

$$k_2^2 + k_1^2 = e + g \quad (3.48)$$

# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.4. A TEORIA DAS DISTORÇÕES DAS DISTÂNCIAS, ÂNGULOS E ÁREAS

### 3.4.3. A deformação linear sobre curvas paramétricas

A deformação linear ao longo da curva  $u$  (onde  $dv=0$ ,  $\alpha=90^\circ$ ) é igual a:

$$k_1 = \sqrt{\frac{g_1}{G}} \quad (3.49)$$

de igual forma, a deformação linear ao longo da curva  $v$  (onde  $du=0$ ,  $\alpha=0^\circ$ ) é igual a:

$$k_2 = \sqrt{\frac{e_1}{E}} \quad (3.50)$$

usando (3.14) e (3.16) e considerando que  $F=0$ , tem-se que:

$$\sin \alpha = \sqrt{G} \frac{dv}{ds} \quad \cos \alpha = \sqrt{E} \frac{du}{ds} \quad (3.51)$$

$$k^2 = e \cdot \cos^2 \alpha + 2f \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + g \cdot \sin^2 \alpha \quad (3.43) \quad e = \frac{e_1}{E} \quad f = \frac{f_1}{\sqrt{EG}} \quad g = \frac{g_1}{G}$$

# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.4. A TEORIA DAS DISTORÇÕES DAS DISTÂNCIAS, ÂNGULOS E ÁREAS

Usando as expressões (3.49) e (3.50), a expressão (3.44) passa a escrever-se da seguinte forma:

$$k^2 = \frac{Ek_2^2 du^2 + Gk_1^2 dv^2}{ds^2} = Ek_2^2 \left( \frac{\cos \alpha}{\sqrt{E}} \right)^2 + Gk_1^2 \left( \frac{\sin \alpha}{\sqrt{G}} \right)^2 = k_2^2 \cos^2 \alpha + k_1^2 \sin^2 \alpha \quad (3.52)$$

e devolve o valor da deformação linear para um elemento linear  $ds$  de azimuth  $\alpha$ , sendo  $k_2$  a deformação linear principal da linha origem da contagem dos azimutes ( $\alpha = 0$ ).

# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.4. A TEORIA DAS DISTORÇÕES DAS DISTÂNCIAS, ÂNGULOS E ÁREAS

Para determinar o valor máximo e mínimo para a deformação linear, anula-se a derivada do segundo membro da expressão (3.52) em ordem a  $\alpha$ , obtendo-se:

$$\frac{d(k^2)}{d\alpha} = -2k_2^2 \cos\alpha \sin\alpha + 2k_1^2 \sin\alpha \cos\alpha = (k_1^2 - k_2^2) \sin 2\alpha = 0$$

um valor extremo para  $k$  com  $\alpha = 0$  e outro valor extremo com  $\alpha = 90^\circ$ :

$$k_{ext} = k_2 \qquad k_{ext} = k_1$$

Estas expressões são particularmente importantes dado que demonstram que as direções onde a deformação linear é máxima e mínima correspondem às direções das curvas paramétricas  $u$  e  $v$ , e são consequentemente ortogonais.

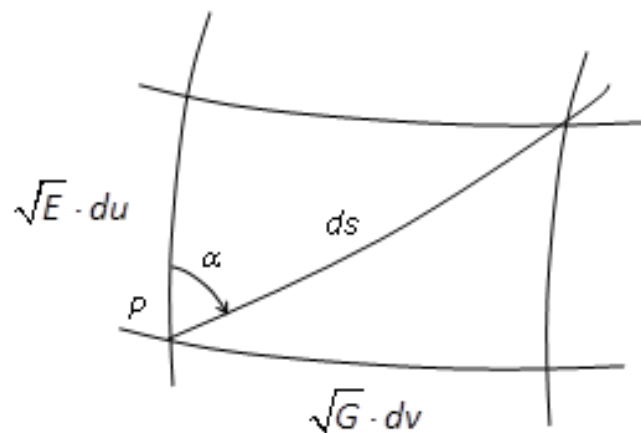
# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.4. A TEORIA DAS DISTORÇÕES DAS DISTÂNCIAS, ÂNGULOS E ÁREAS

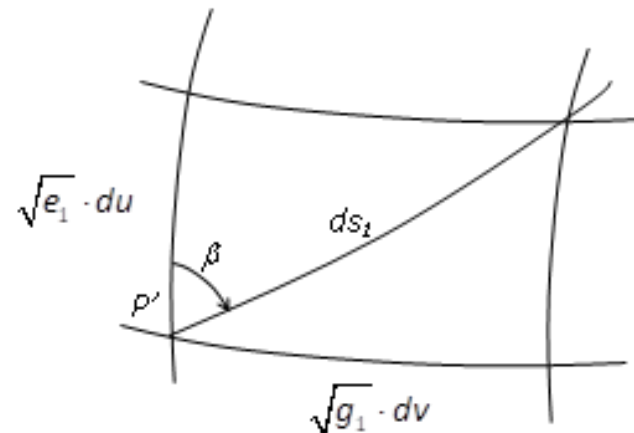
### 3.4.4. A deformação angular

Representando por  $\alpha$  e  $\beta$  os ângulos que os elementos lineares  $ds$  e  $ds_1$  fazem com as linhas  $v = \text{const.}$ , chama-se deformação angular  $\delta$  à diferença entre os azimutes  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$\delta = \beta - \alpha \quad (3.55)$$



superfície datum



superfície de projeção



# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.4. A TEORIA DAS DISTORÇÕES DAS DISTÂNCIAS, ÂNGULOS E ÁREAS

Considerando as expressões do  $\sin\alpha$  e do  $\cos\alpha$  sobre a superfície datum (3.51) e as expressões correspondentes sobre a superfície de projeção, tem-se que:

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{dv}{du} \quad \operatorname{tg}\beta = \sqrt{\frac{g_1}{e_1}} \frac{dv}{du}$$

escrevendo a expressão da  $\operatorname{tg}\beta$  em função de  $\operatorname{tg}\alpha$  e considerando as expressões (3.49) e (3.50), obtemos:

$$\operatorname{tg}\beta = \sqrt{\frac{g_1}{e_1}} \frac{dv}{du} = \sqrt{\frac{g_1 E}{e_1 G}} \operatorname{tg}\alpha = k_1 \cdot \frac{1}{k_2} \operatorname{tg}\alpha = \frac{k_1}{k_2} \operatorname{tg}\alpha$$

de onde se pode observar que, para  $\alpha = \beta$ , se tem que  $k_1/k_2 = 1$ , e conseqüentemente  $k_1 = k_2$ , como se verifica em todas as projeções conformes.

$$\sin\alpha = \sqrt{G} \frac{dv}{ds} \quad \cos\alpha = \sqrt{E} \frac{du}{ds} \quad (3.51)$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{g_1}{G}} \quad (3.49)$$

$$\sin\beta = \sqrt{g_1} \frac{dv}{ds_1} \quad \cos\beta = \sqrt{e_1} \frac{du}{ds_1}$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{e_1}{E}} \quad (3.50)$$

# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.4. A TEORIA DAS DISTORÇÕES DAS DISTÂNCIAS, ÂNGULOS E ÁREAS

Sendo  $\delta = \beta - \alpha$ , tem-se que:

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\left(\frac{k_1}{k_2} \operatorname{tg} \alpha\right) - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \frac{k_1}{k_2} \operatorname{tg}^2 \alpha} = \left(\frac{k_1}{k_2} - 1\right) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \frac{k_1}{k_2} \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (3.56)$$

de notar que, como seria esperado, para  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 90^\circ$ , a deformação angular é nula ( $\operatorname{tg} \delta = 0$  e  $\delta = 0$ ).

# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.4. A TEORIA DAS DISTORÇÕES DAS DISTÂNCIAS, ÂNGULOS E ÁREAS

Para achar o valor do azimute  $\alpha_m$  correspondente à deformação angular máxima, anula-se a derivada do segundo membro da expressão (3.56) em ordem a  $\alpha$ , obtendo-se:

$$\frac{d(\operatorname{tg}\delta)}{d\alpha} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha_m = \pm \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \quad (3.57)$$

substituindo este valor na expressão da deformação angular, obtem-se a expressão para a deformação angular máxima:

$$\operatorname{tg}\delta_m = \left( \frac{k_1}{k_2} - 1 \right) \frac{\pm \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}}{1 + \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{k_2}{k_1}} = \dots = \pm \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} - \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \right) \quad (3.58)$$

# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.4. A TEORIA DAS DISTORÇÕES DAS DISTÂNCIAS, ÂNGULOS E ÁREAS

### 3.4.5. A deformação linear correspondente à deformação angular máxima

Considerando a expressão (3.52) e a expressão (3.57), tem-se que:

$$k_{\alpha_m}^2 = k_2^2 \cos^2 \alpha + k_1^2 \sin^2 \alpha = k_2^2 \frac{k_1}{k_2} \sin^2 \alpha_m + k_1^2 \frac{k_2}{k_1} \cos^2 \alpha_m = k_1 \cdot k_2 \quad (3.59)$$

pelos que a deformação linear para o azimute  $\alpha_m$  correspondente à máxima deformação angular é igual a:

$$\sqrt{k_1 \cdot k_2}$$

$$\frac{d(\text{tg} \delta)}{d\alpha} = 0 \Leftrightarrow \text{tg} \alpha_m = \pm \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \quad (3.57)$$

$$k^2 = k_2^2 \cos^2 \alpha + k_1^2 \sin^2 \alpha \quad (3.52)$$

# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.4. A TEORIA DAS DISTORÇÕES DAS DISTÂNCIAS, ÂNGULOS E ÁREAS

### 3.4.6. A deformação areal

$$k_1 = \sqrt{\frac{g_1}{G}} \quad (3.49)$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{e_1}{E}} \quad (3.50)$$

A expressão para a deformação areal  $m$  deriva-se a partir da expressão (3.18):

$$A_D = \sqrt{EG - F^2} dudv$$

combinando-a com as expressões (3.49) e (3.50) e considerando  $F = 0$ , logo tem-se que:

$$m = \frac{A_P}{A_D} = \frac{\sqrt{e_1 g_1}}{\sqrt{EG}} = k_1 \cdot k_2 \quad (3.60)$$

Para projeções equivalentes,  $A_P/A_D = 1$  pelo que  $k_1 \cdot k_2 = 1$ , logo, com base na expressão (3.59), pode concluir-se que nas projeções equivalentes as distâncias na direção da máxima deformação angular são representadas sem deformação, pois:

$$k_{\alpha_m} = \sqrt{k_1 \cdot k_2} = 1$$

# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.5. A INDICATRIZ DE TISSOT

### 3.5.1. A teoria da indicatriz

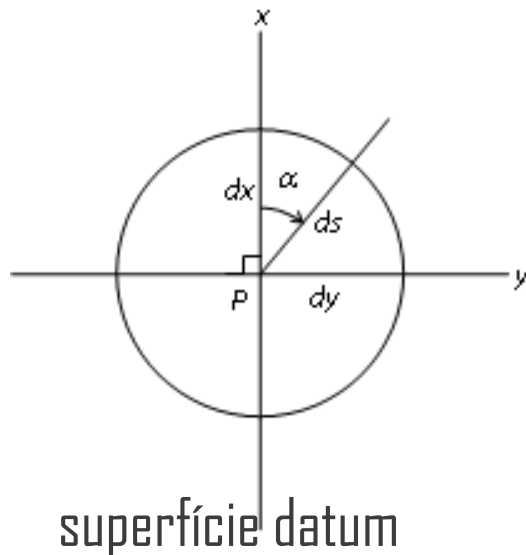
A teoria das distorções de Tissot diz que um círculo, sobre uma superfície datum, com centro em  $P$  e raio  $ds$  pode considerar-se plano dada a sua área infinitamente pequena e que esta área permanece infinitamente pequena e plana na superfície de projeção. De um modo geral, este círculo é projetado sobre a superfície de projeção como uma elipse. Apenas no caso particular de a superfície datum ser paralela à superfície de projeção é que este círculo permanece com a sua forma original, embora a uma escala diferente.

# 3. A teoria das projeções cartográficas

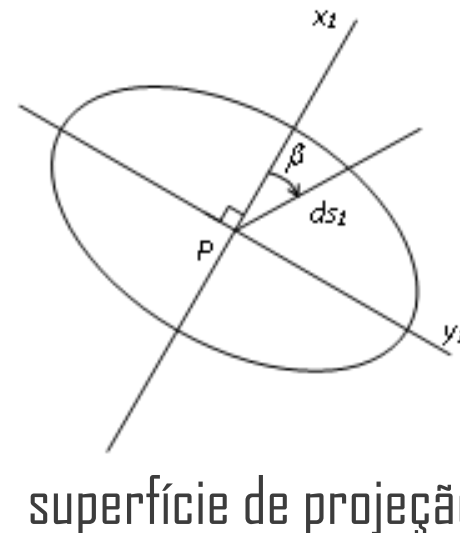
## 3.5. A INDICATRIZ DE TISSOT

$$\sin \alpha = \sqrt{G} \frac{dv}{ds} \quad \cos \alpha = \sqrt{E} \frac{du}{ds} \quad (3.51)$$

Considerando um círculo com centro em P num sistema de coordenadas retangulares (x, y) e a sua projeção num sistema retangular correspondente (x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>), os eixos coordenados são então as tangentes aos correspondentes sistemas (u, v) em ambas as superfícies. Com base na expressão (3.51) e nas figuras, tem-se que:



$$\begin{cases} dx = ds \cdot \cos \alpha = \sqrt{E} du \\ dy = ds \cdot \sin \alpha = \sqrt{G} dv \end{cases} \quad (3.61)$$



$$\begin{cases} dx_1 = ds_1 \cdot \cos \beta = \sqrt{e_1} du \\ dy_1 = ds_1 \cdot \sin \beta = \sqrt{g_1} dv \end{cases} \quad (3.62)$$

# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.5. A INDICATRIZ DE TISSOT

Substituindo em (3.62),  $du$  e  $dv$  pelas suas expressões em (3.61), obtem-se que:

$$\begin{cases} dx_1 = \sqrt{\frac{e_1}{E}} \cdot \cos \alpha \cdot ds \\ dy_1 = \sqrt{\frac{g_1}{G}} \cdot \sin \alpha \cdot ds \end{cases}$$

Recorrendo às expressões (3.49) e (3.50), tem-se que:

$$\begin{cases} dx_1 = k_2 \cdot \cos \alpha \cdot ds \\ dy_1 = k_1 \cdot \sin \alpha \cdot ds \end{cases} \quad (3.63)$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{g_1}{G}} \quad (3.49)$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{e_1}{E}} \quad (3.50)$$



# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.5. A INDICATRIZ DE TISSOT

Colocando  $dx_1/k_2$  e  $dy_1/k_1$  ao quadrado e somando estes dois termos, obtem-se que:

$$\left(\frac{dx_1}{k_2}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{k_1}\right)^2 = \cos^2 \alpha \cdot ds^2 + \sin^2 \alpha \cdot ds^2 = ds^2 \quad (3.64)$$

Esta expressão corresponde à equação de uma elipse com semieixo maior (menor) igual a  $k_2 \cdot ds$  e semieixo menor (maior) igual a  $k_1 \cdot ds$ . Considerando que  $ds$  é igual a 1, a expressão anterior assume a seguinte forma:

$$\boxed{\left(\frac{dx_1}{k_2}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{k_1}\right)^2 = 1} \quad (3.65)$$

Esta elipse é designada por indicatriz de Tissot, dado que indica as características da projeção na vizinhança de um dado ponto P.

# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.5. A INDICATRIZ DE TISSOT

Sabe-se que a área da superfície da Terra que se pode considerar como plana tem um raio de aproximadamente 10 km, podendo até ser maior caso os requisitos de precisão sejam menos exigentes. No interior desta região, pode então escrever-se a equação (3.65) em função das coordenadas  $(x_1, y_1)$  de um sistema de coordenadas retangulares omitindo as derivadas, logo tem-se que:

$$\left(\frac{x_1}{k_2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{k_1}\right)^2 = 1 \quad (3.66)$$

# 3. A teoria das projeções cartográficas

## 3.5. A INDICATRIZ DE TISSOT

### 3.5.2. A indicatriz na prática

Foi já demonstrado que um círculo de raio unitário  $ds=1$  sobre a superfície datum que possa ser substituído por um plano tangencial local, é de uma forma geral projetado como uma elipse, designada por indicatriz de Tissot.

Deformação	Equação
Deformação linear máxima e mínima	$k_1 = \sqrt{\frac{g_1}{G}} \quad k_2 = \sqrt{\frac{e_1}{E}}$
Máxima distorção angular de um azimute	$tg\delta_m = \pm \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} - \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \right)$
Deformação linear no azimute correspondente à deformação angular máxima $\alpha_m$	$k_{\alpha_m} = \sqrt{k_1 \cdot k_2}$
Deformação areal	$m = \frac{A_p}{A_D} = k_1 \cdot k_2$

# 4. PROJEÇÕES EQUIVALENTES

4.1. Considerações gerais

4.2. Projeções equivalentes do elipsóide sobre o plano

4.3. A projeção pseudo-cônica equivalente de Bonne



## 4. Projeções equivalentes

### 4.1.1. Introdução

Uma projeção diz-se equivalente se a deformação areal  $m$  tiver um valor constante em todos os pontos, tem-se então que:

$$m = \frac{A_p}{A_d} = \frac{\sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}}{\sqrt{EG - F^2}} = \text{const.}$$

No caso das projeções equivalentes as áreas não sofrem distorção, a deformação linear varia e os ângulos são deformados. Como anteriormente mencionado, a equivalência e a conformidade não podem ser verificadas completamente em simultâneo. Tal pode ser demonstrado, no caso de uma projeção equivalente, considerando a expressão (3.60):

$$m = k_1 \cdot k_2 = 1$$

## 4. Projeções equivalentes

para que esta projeção fosse simultaneamente conforme ter-se-ia que verificar, em cada ponto, a seguinte igualdade:

$$k_1 = k_2$$

se a deformação linear máxima e mínima forem iguais, e se se designar esse valor por  $k$ , tem-se que:

$$m = k^2 = 1$$

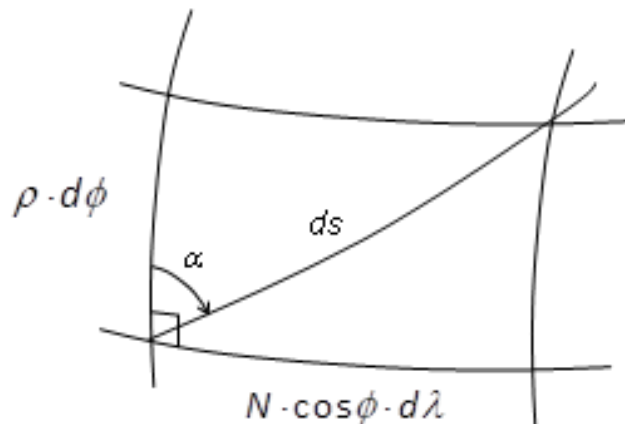
logo, pode concluir-se que esta última expressão não é possível de ser verificada em todos os pontos da superfície.

## 4. Projeções equivalentes

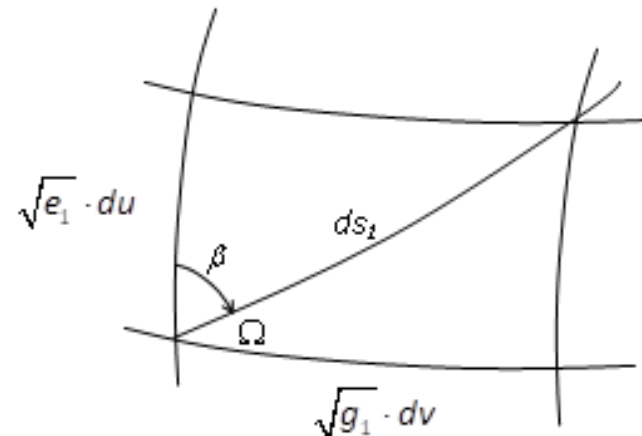
### 4.1.2. A deformação linear

Considerando o caso geral de que o sistema ortogonal  $(\phi, \lambda)$  sobre o elipsoide não ser transformado num sistema ortogonal sobre o plano, a distorção linear numa direção arbitrária é dada por:

$$k^2 = \frac{e_1 d\phi^2 + 2\sqrt{e_1 \cdot g_1} \cdot \cos \Omega \cdot d\phi d\lambda + g_1 d\lambda^2}{\rho^2 \cdot d\phi^2 + N^2 \cdot \cos^2 \phi \cdot d\lambda^2} \quad (4.2)$$



superfície datum



superfície de projeção

## 4. Projeções equivalentes

com

$$\cos \Omega = \frac{f_1}{\sqrt{e_1 \cdot g_1}} \quad (4.3)$$

Têm-se ainda que a expressão geral da transformação de um azimute de um arco sobre o elipsoide no correspondente azimute desse mesmo arco após a projeção é igual a:

$$\tan \beta = \frac{\tan \alpha}{k_2^2 + \tan \alpha \cdot \cot \Omega} \quad (4.8)$$

e que o valor do azimute  $\alpha$  correspondente à deformação angular máxima é, no caso das projeções equivalentes, igual a (dado que  $k_1 \cdot k_2 = 1$ ):

$$\tan \alpha = \pm \sqrt{k_2^2} = \pm k_2 \quad (4.10)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_m = \pm \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \quad (3.57)$$



# 4. Projeções equivalentes

Considerando sobre o elipsoide as coordenadas curvilíneas  $\phi$  e  $\lambda$  (com  $u = \phi$  e  $v = \lambda$ ) então os coeficientes superficiais de Gauss são  $E = \rho^2$  e  $G = r^2$ , em que  $\rho$  é o raio principal de curvatura na direção do meridiano e  $r$  é o raio do paralelo num determinado ponto  $P$  sobre o elipsoide. Então o elemento linear sobre a superfície datum é dado por:

$$ds^2 = \rho^2 d\phi^2 + N^2 \cos^2 \phi d\lambda^2 = \rho^2 d\phi^2 + r^2 d\lambda^2$$

sobre o plano, considerando coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$  (com  $u_1 = x$  e  $v_1 = y$ ), o elemento linear é dado por:

$$ds_1^2 = dx^2 + dy^2$$

e considerando coordenadas polares  $R$  e  $\theta$  (com  $u_1 = R$  e  $v_1 = \theta$ ), o elemento linear é dado por:

$$ds_1^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2$$

## 4. Projeções equivalentes

As expressões gerais das representações equivalentes entre o elipsoide, com um sistema de coordenadas ortogonais  $(\phi, \lambda)$ , e o plano com um sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y)$  ou de coordenadas polares  $(R, \theta)$ , são respectivamente:

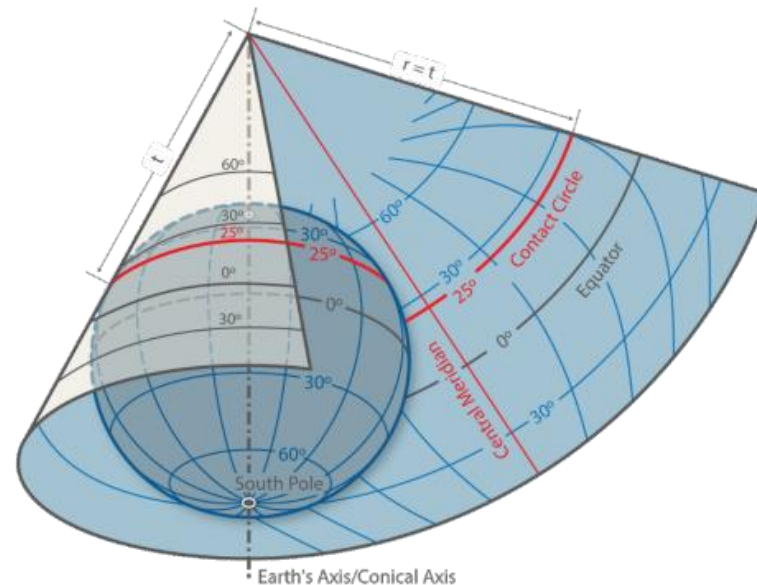
$$m^2 \cdot (EG - F^2) = \begin{vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{vmatrix}^2 \Leftrightarrow m \cdot \rho \cdot r = \left| \frac{\partial x}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial \phi} \right| \quad (4.11)$$

$$m^2 \cdot (EG - F^2) = \begin{vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial R}{\partial \phi} & \frac{\partial R}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \phi} & \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \end{vmatrix}^2 \Leftrightarrow m \cdot \rho \cdot r = R \cdot \left| \frac{\partial R}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} - \frac{\partial R}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right| \quad (4.12)$$

# 4. Projeções equivalentes

### 4.3.1. Introdução

A projeção de Bonne é uma projeção cônica, equivalente, normal com uma linha de contato tangente ao paralelo de referência. Nesta projeção apenas o meridiano central de referência é uma linha reta e os meridianos e círculos de paralelo não formam um sistema ortogonal no plano. A deformação linear ao longo do meridiano central e ao longo de todos os paralelos é igual a 1, não sendo preservada a escala ao longo dos restantes meridianos.



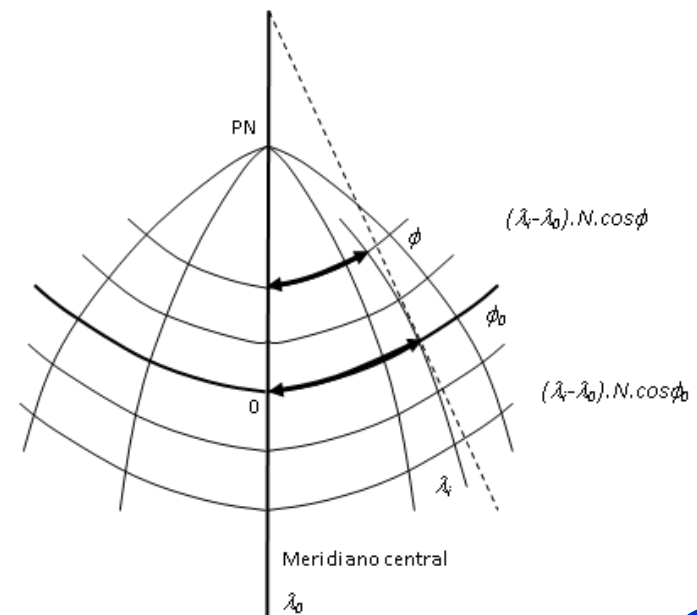
## 4. Projeções equivalentes

O arco de meridiano  $\sigma$  entre o paralelo de latitude  $\phi_0$  e um paralelo de latitude  $\phi$  (os quais são projetados como círculos concêntricos em torno do vértice do cone) é calculado por:

$$\sigma = \int_{\phi_0}^{\phi} \rho \cdot d\phi \quad (4.13)$$

Como tal os círculos paralelos não são igualmente espaçados, tendo  $\rho$  um valor diferente em função da latitude. A distância ao longo de um paralelo à latitude  $\phi$  desde o meridiano central  $\lambda_0$  até ao meridiano de longitude  $\lambda$  é igual a:

$$(\lambda - \lambda_0) \cdot N \cdot \cos \phi \quad (4.14)$$



## 4. Projeções equivalentes

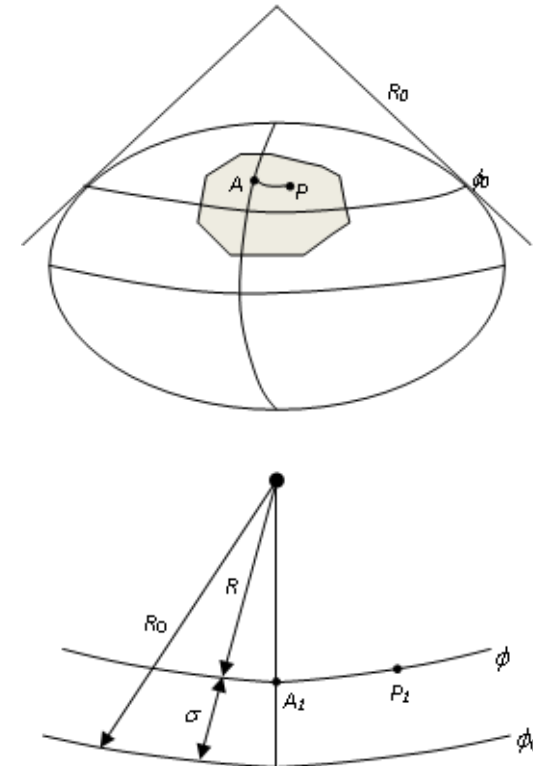
- Os eixos principais da indicatriz de Tissot não coincidem com o sistema de curvas paramétricas  $(\phi, \lambda)$ . Tal requer cálculos adicionais com vista à determinação de  $k_1$  e  $k_2$  conforme já mostrado na secção 4.1.2.
- Os sistemas cartográficos equivalentes têm um interesse geodésico reduzido para mapas de escala média em virtude das grandes deformações lineares e angulares. No entanto, para regiões alongadas na direção Norte-Sul e estreitas na direção Este-Oeste, como é o caso de Portugal continental, a projeção de Bonne tem deformações angulares pequenas, sendo praticamente conforme. De facto, a projeção de Bonne é mesmo rigorosamente conforme sobre o meridiano central e sobre o paralelo central.

# 4. Projeções equivalentes

## 4.3.2. A projeção de Bonne

$$\left\{ \begin{array}{l} R = R_0 - \int_{\phi_0}^{\phi} \rho \cdot d\phi = R_0 - \sigma \\ R_0 = N_0 \cdot \cot \phi_0 \\ \theta = \pm \frac{r \cdot \lambda}{R} \end{array} \right. \quad (4.33)$$

Sendo  $R$  o raio à latitude  $\phi$ ,  $R_0$  o raio à latitude  $\phi_0$ ,  $\sigma$  o arco de meridiano entre a latitude  $\phi$  e  $\phi_0$ ,  $N_0$  o raio de curvatura segundo a primeira vertical à latitude  $\phi_0$ ,  $r$  o raio do paralelo à latitude  $\phi$  ( $r = N \cdot \cos \phi$ ), e  $\theta$  o ângulo entre o raio e o eixo polar.



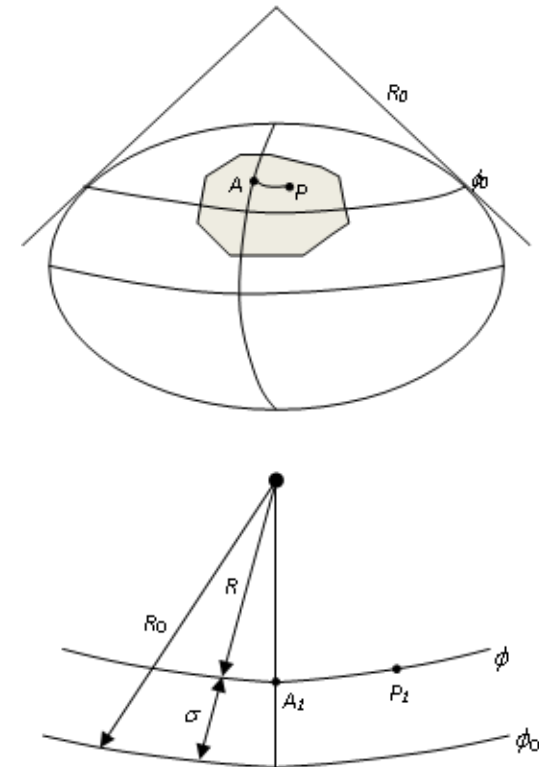
## 4. Projeções equivalentes

### 4.3.3. Interpretação geométrica da projeção de Bonne

Trace-se uma reta representativa do meridiano central e escolha-se um ponto  $O$  para centro dos arcos de circunferência representativos do paralelo. Trace-se um arco de raio  $R_0$ :

$$R_0 = N_0 \cdot \cot \phi_0$$

Desta forma temos representado o paralelo central. Note-se que  $R_0$  é o lado do cone circunscrito ao elipsoide e tangente ao longo do paralelo central de latitude  $\phi_0$ .

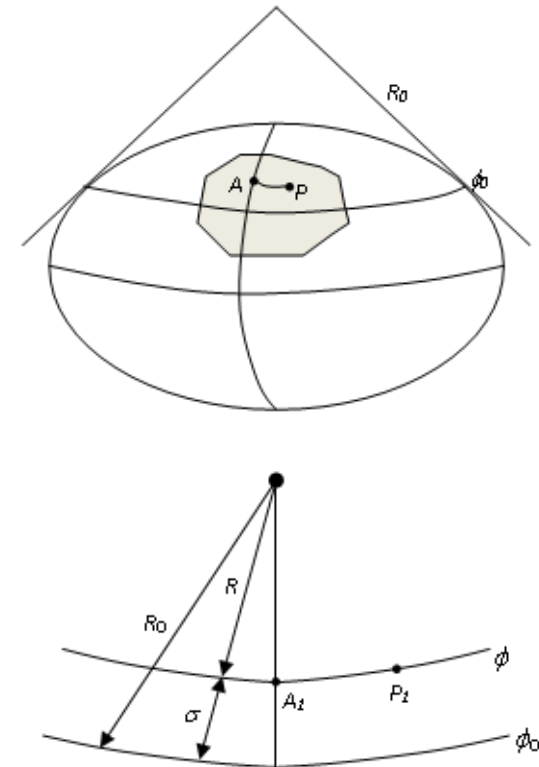


# 4. Projeções equivalentes

Para representar um ponto genérico  $P$ , trace-se o arco de circunferência de raio  $R$ :

$$R = R_0 - \sigma$$

sendo  $\sigma$  o arco de meridiano entre as latitudes  $\phi_0$  e  $\phi$ . O arco traçado é a imagem do paralelo que passa por  $P$ . Marcando sobre ele um comprimento  $A_1P_1$  igual ao correspondente  $AP$  sobre o elipsoide, fica assim definido o mecanismo geométrico da correspondência.





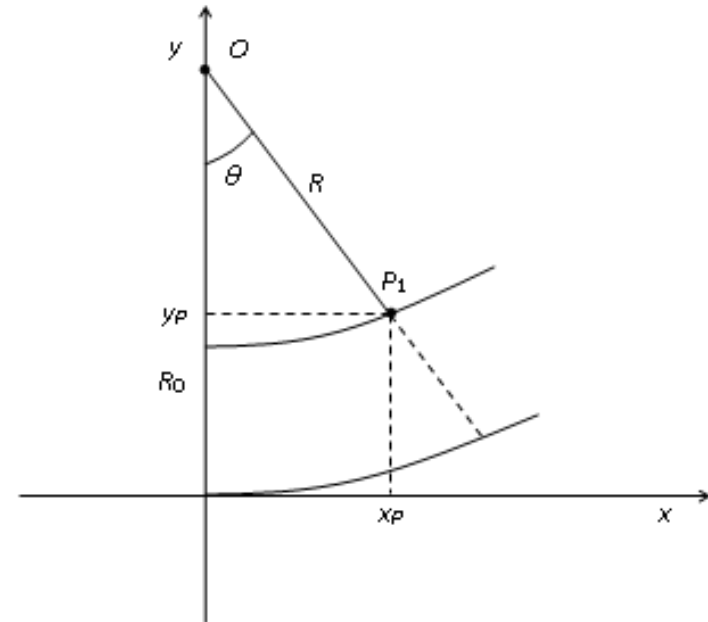
## 4. Projeções equivalentes

As coordenadas cartesianas retangulares são então dadas pelas expressões:

$$\begin{cases} x_{P_1} = R \cdot \sin \theta = (R_0 - \sigma) \cdot \sin \theta \\ y_{P_1} = R_0 - R \cdot \cos \theta = R_0 - (R_0 - \sigma) \cdot \cos \theta \end{cases} \quad (4.34)$$

em que:

$$\begin{aligned} R_0 &= N_0 \cdot \cot \phi_0 \\ R &= R_0 - \sigma \\ \theta &= \frac{r \cdot \lambda}{R} \end{aligned} \quad (4.33)$$



A transformação direta fica resolvida pelas expressões anteriores.

## 4. Projeções equivalentes

Para a transformação inversa têm-se as seguintes expressões:

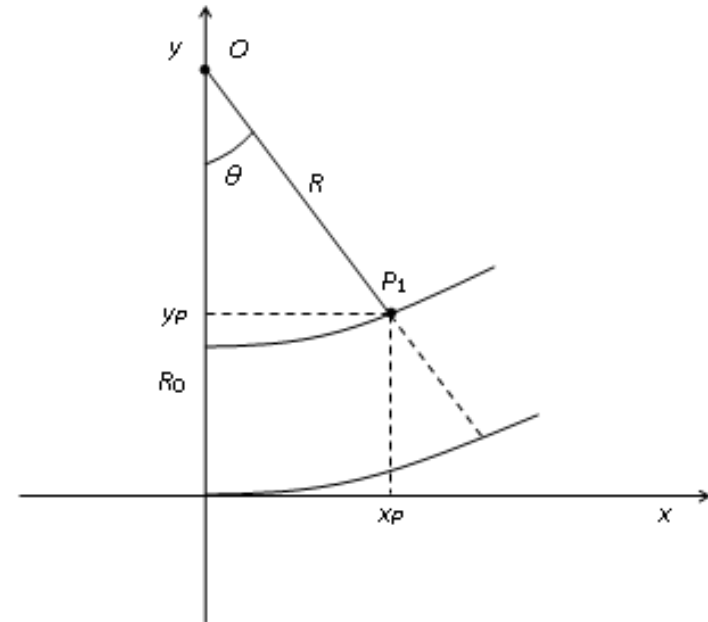
$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \arctan \left( \frac{x_{P_1}}{R_0 - y_{P_1}} \right) \\ R = \frac{R_0 - y_{P_1}}{\cos \theta} = \frac{x_{P_1}}{\sin \theta} \end{array} \right. \quad (4.35)$$

em que:

$$R_0 = N_0 \cdot \cot \phi_0$$

$$\sigma = R_0 - R$$

$$\lambda = \frac{R \cdot \theta}{r}$$



## 4. Projeções equivalentes

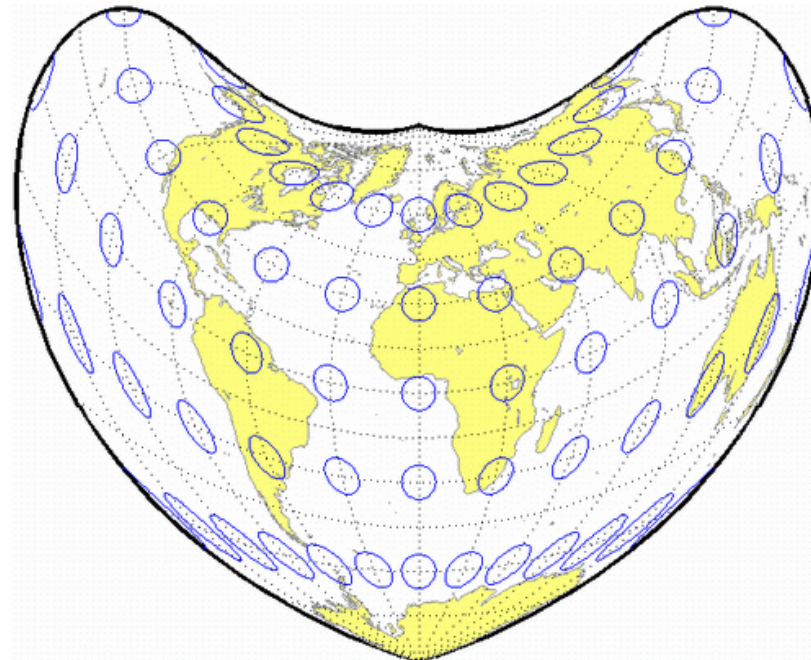
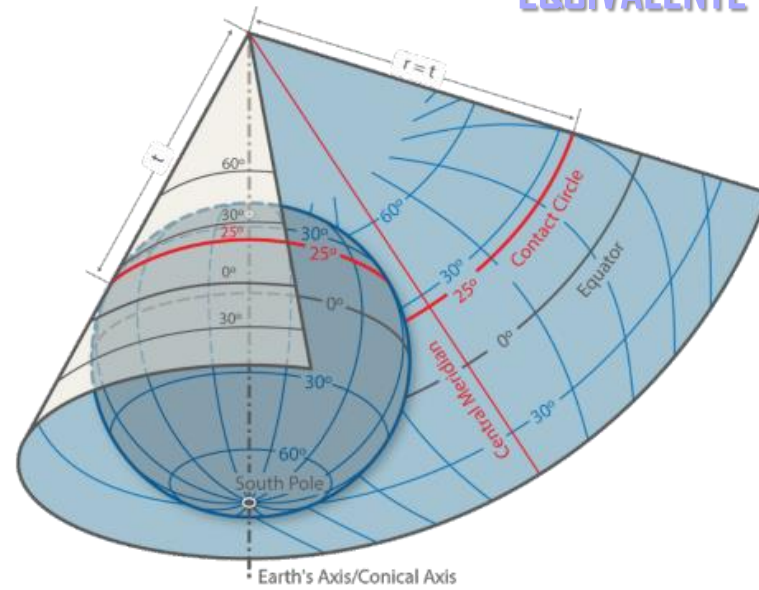
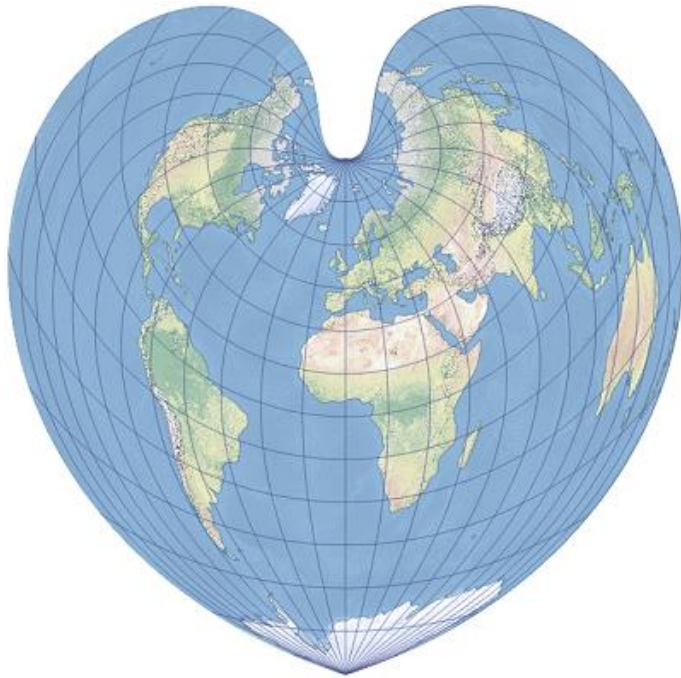
Projeção de Bonne	
DESCRIÇÃO	A projeção de Bonne é uma projeção equivalente pseudo-cónica normal, assumindo a sua quadrícula a forma de um coração. Foi usada com frequência para a representação de continentes, sendo que em Portugal foi adotada nas Cartas Corográficas de Portugal à escala 1:50 000 e 1:100 000 produzidas pela atual DGT até 2002 (tendo sido substituída pela projeção Transversa de Mercator - Gauss).
QUADRÍCULA	<ul style="list-style-type: none"><li>• O meridiano central é uma linha reta;</li><li>• Os meridianos são curvas complexas igualmente espaçadas ao longo dos paralelos e com a concavidade voltada para o meridiano central;</li><li>• Os paralelos são arcos de círculo concêntricos igualmente espaçados ao longo do meridiano central, com a concavidade voltada para o polo mais próximo;</li><li>• Os polos são representados por pontos;</li><li>• Existe simetria em torno do meridiano central.</li></ul>

## 4. Projeções equivalentes

Projeção de Bonne	
CARACTERÍSTICAS	<ul style="list-style-type: none"><li>• A curvatura do paralelo de referência é idêntica à de um cone tangente à superfície a essa latitude;</li><li>• A escala ao longo do meridiano central é preservada, assim como ao longo de todos os paralelos;</li><li>• O meridiano e paralelo central não apresentam distorção, no entanto o valor da distorção aumenta à medida que nos afastamos dessas linhas, sendo a distorção simétrica em relação ao meridiano central;</li><li>• Sendo uma projeção equivalente, as formas, direções, ângulos e distâncias são, em geral, distorcidas.</li></ul>
CURIOSIDADES	<p>A projeção foi inventada por Cláudio Ptolomeu após o ano 100 d.C., tendo sido posteriormente desenvolvida por Bernardus Sylvanus em 1511. O seu nome deve-se a Rigobert Bonne, que utilizou exaustivamente esta projeção em 1752.</p>

# 4. Projeções equivalentes

## 4.3. A PROJEÇÃO PSEUDO-CÔNICA EQUIVALENTE DE BONNE



# 5. PROJEÇÕES CONFORMES

**5.1. Considerações gerais**

**5.2. Projeção de Gauss (Transversa de Mercator)**

**5.3. Projeção de Mercator**

**5.4. Projeção de Lambert (Cónica Conforme)**

# 5. Projeções conformes

## 5.1.1. Introdução

Uma projeção diz-se conforme ou isogónica se a deformação linear  $k$  for independente do azimute, isto é, o seu valor terá de ser o mesmo em todas as direções. Foi anteriormente demonstrado que a combinação da matriz de transformação fundamental com a condição de conformidade conduz à equação (3.24):

$$k^2 = \frac{e_1}{E} = \frac{f_1}{F} = \frac{g_1}{G} \quad (3.24)$$

Assumindo dois sistemas ortogonais correspondentes ( $F_1 = F = f_1 = 0$ ):

$$\boxed{k^2 = \frac{e_1}{E} = \frac{g_1}{G}} \quad (5.1)$$

# 5. Projeções conformes

peço que, neste caso, as expressões (3.20) passam a ser:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = \left( \frac{\partial u_1}{\partial u} \right)^2 \cdot E_1 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial u} \right)^2 \cdot G_1 \\ f_1 = \frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot E_1 + \frac{\partial v_1}{\partial u} \frac{\partial v_1}{\partial v} \cdot G_1 = 0 \\ g_1 = \left( \frac{\partial u_1}{\partial v} \right)^2 \cdot E_1 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial v} \right)^2 \cdot G_1 \end{array} \right. \quad (5.2)$$

combinando (5.1) e (5.2) obtêm-se as seguintes condições de conformidade:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = \left( \frac{\partial u_1}{\partial u} \right)^2 \cdot E_1 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial u} \right)^2 \cdot G_1 = E \cdot k^2 \\ f_1 = \frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot E_1 + \frac{\partial v_1}{\partial u} \frac{\partial v_1}{\partial v} \cdot G_1 = 0 \\ g_1 = \left( \frac{\partial u_1}{\partial v} \right)^2 \cdot E_1 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial v} \right)^2 \cdot G_1 = G \cdot k^2 \end{array} \right. \quad (5.3)$$



## 5. Projeções conformes

Sendo a deformação linear dada pela expressão:

$$k^2 = e \cdot \cos^2 \alpha + 2f \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + g \cdot \sin^2 \alpha \quad (3.43)$$

para uma representação conforme a expressão (3.43) passa a escrever-se da seguinte forma:

$$k^2 = e \cdot \cos^2 \alpha + e \cdot \sin^2 \alpha = e \quad (5.5)$$

dado que a equação (3.46) tem de ser verificada para qualquer valor de  $\alpha$ , verifica-se, em particular, que para  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 45^\circ$ , o valor da expressão é igual a:

$$\tan 2\alpha = \frac{2f}{(e-g)} \quad (3.46)$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow \tan 2\alpha = 0 \Rightarrow f = 0$$

$$\alpha = 45^\circ \Rightarrow \tan 2\alpha = +\infty \Rightarrow e - g = 0 \Leftrightarrow e = g$$

## 5. Projeções conformes

A indicatriz da deformação linear será então uma circunferência; sendo  $k_1 = k_2$  a expressão da deformação angular (3.56) reduz-se a:

$$\boxed{\operatorname{tg} \delta = \left( \frac{k_1}{k_2} - 1 \right) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \frac{k_1}{k_2} \operatorname{tg}^2 \alpha} = 0} \quad (5.6)$$

ou seja, a deformação angular é nula para todos os azimutes. Sendo assim, o ângulo entre dois elementos não é alterado pela representação.

# 5. Projeções conformes

## 5.1.2. Sistemas de coordenadas isométricas. A deformação linear

As unidades de medida ao longo dos eixos coordenados  $(u, v)$  podem tornar-se iguais conforme demonstrado na secção 3.3.2. Considerando as expressões do elemento linear sobre o elipsoide:

$$ds^2 = E \cdot du^2 + G \cdot dv^2$$

e sobre o plano:

$$ds_1^2 = E_1 \cdot du_1^2 + G_1 \cdot dv_1^2$$

tem-se que:

$$ds^2 = G \cdot (d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2)$$

$$ds_1^2 = G_1 \cdot (d\bar{u}_1^2 + d\bar{v}_1^2)$$

com:

$$\begin{cases} d\bar{u} = \sqrt{\frac{E}{G}} du \Leftrightarrow du = \sqrt{\frac{G}{E}} d\bar{u} \\ d\bar{v} = dv \end{cases} \quad (5.7)$$

$$\begin{cases} d\bar{u}_1 = \sqrt{\frac{E_1}{G_1}} du_1 \Leftrightarrow du_1 = \sqrt{\frac{G_1}{E_1}} d\bar{u}_1 \\ d\bar{v}_1 = dv_1 \end{cases} \quad (5.8)$$

## 5. Projeções conformes

substituindo (5.7) e (5.8) em (5.3):

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = \left( \frac{\sqrt{G_1} d\bar{u}_1}{\sqrt{E} d\bar{u}} \right)^2 \cdot E_1 + \left( \frac{\partial \bar{v}_1}{\sqrt{E} d\bar{u}} \right)^2 \cdot G_1 = E \cdot k^2 \\ f_1 = \frac{\sqrt{G_1} d\bar{u}_1}{\sqrt{E} d\bar{u}} \cdot \frac{\sqrt{G_1} d\bar{u}_1}{\partial \bar{v}} \cdot E_1 + \frac{\partial \bar{v}_1}{\sqrt{E} d\bar{u}} \cdot \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{v}} \cdot G_1 = 0 \\ g_1 = \left( \frac{\sqrt{G_1} d\bar{u}_1}{\partial \bar{v}} \right)^2 \cdot E_1 + \left( \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{v}} \right)^2 \cdot G_1 = G \cdot k^2 \end{array} \right.$$

obtem-se, após algumas transformações da primeira e da terceira equação, que:

$$\left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{u}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{u}} \right)^2 = \left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{v}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{v}} \right)^2 \quad (5.9)$$

e, da segunda equação, que:

$$\left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{u}} \right) \cdot \left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{v}} \right) = - \left( \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{u}} \right) \cdot \left( \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{v}} \right) \quad (5.10)$$

## 5. Projeções conformes

Transformando estas expressões, obtêm-se as seguintes igualdades (5.11) e (5.12):

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{u}} = \pm \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{v}} \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{u}} = \pm \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{v}} \quad (5.12)$$

que constituem as condições de conformidade.

Existindo parâmetros isométricos tanto na superfície datum como na superfície de projeção, então:

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = q_1(\bar{u}, \bar{v}) \\ \bar{v}_1 = q_2(\bar{u}, \bar{v}) \end{cases} \quad (5.13)$$

a projeção é conforme se forem verificadas as equações (5.11) e (5.12).

## 5. Projeções conformes

As equações (5.11) e (5.12) contêm as condições de Cauchy-Riemann que definem a condição necessária e suficiente para que uma qualquer função seja analítica, sendo por isso designadas por equações de Cauchy-Riemann. Deste modo, as derivadas parciais em (5.11) e (5.12) podem ser consideradas como as derivadas parciais da parte real e imaginária da equação:

$$\boxed{\bar{u}_1 + i \cdot \bar{v}_1 = q(\bar{u} + i \cdot \bar{v})} \quad (5.14)$$

sendo  $q_1(\bar{u}, \bar{v})$  e  $q_2(\bar{u}, \bar{v})$  a parte real e imaginária da expressão (5.13), respetivamente. A expressão (5.14) é designada por expressão geral das representações conformes. O termo da direita da expressão (5.14) pode ser expandido numa série de potências, obtendo-se:

$$\bar{u}_1 + i \cdot \bar{v}_1 = (\bar{u} + i \cdot \bar{v}) + (A + i \cdot B) \cdot (\bar{u} + i \cdot \bar{v})^2 + (C + i \cdot D) \cdot (\bar{u} + i \cdot \bar{v})^3 + \dots \quad (5.15)$$

## 5. Projeções conformes

A escolha desta expansão pressupõe que:

- 1) as origens em ambos os sistemas sejam pontos correspondentes;
- 2) a deformação linear  $k$  nas origens seja igual a 1 ( $k_0 = 1$ ), e;
- 3) ambos os sistemas tenham a mesma orientação.

Separando a parte real da imaginária em (5.15), resulta que:

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = \bar{u} + A \cdot (\bar{u}^2 - \bar{v}^2) - 2 \cdot B \cdot \bar{u} \cdot \bar{v} + C \cdot (\bar{u}^3 - 3 \cdot \bar{u} \cdot \bar{v}^2) + D \cdot (-3 \cdot \bar{u}^2 \cdot \bar{v} + \bar{v}^3) + \dots \\ \bar{v}_1 = \bar{v} + 2 \cdot A \cdot \bar{u} \cdot \bar{v} + B \cdot (\bar{u}^2 - \bar{v}^2) + C \cdot (3 \cdot \bar{u}^2 \cdot \bar{v} - \bar{v}^3) + D \cdot (\bar{u}^3 - 3 \cdot \bar{u} \cdot \bar{v}^2) + \dots \end{cases} \quad (5.16)$$

# 5. Projeções conformes

## 5.2.1. Introdução

A projeção de Gauss, também designada por transversa de Mercator, é uma projeção conforme, cilíndrica e transversa que se presta à representação de zonas alongadas na direção N-S e estreitas na direção E-W. Sendo uma projeção conforme, esta mantém a forma dos elementos infinitamente pequenos e, conseqüentemente, os ângulos (direções), no entanto esta mantém também os comprimentos ao longo do meridiano central da projeção.

A projeção de Gauss difere da de Mercator no que diz respeito à posição da superfície de projeção relativamente à superfície datum, sendo que nesta última o cilindro fica numa posição normal à superfície datum. Deste modo, a projeção de Mercator presta-se à representação de zonas alongadas na direção E-W e mantém os comprimentos ao longo do equador.

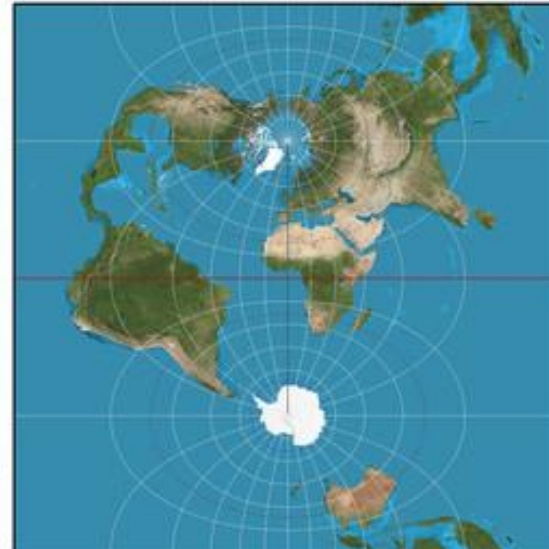
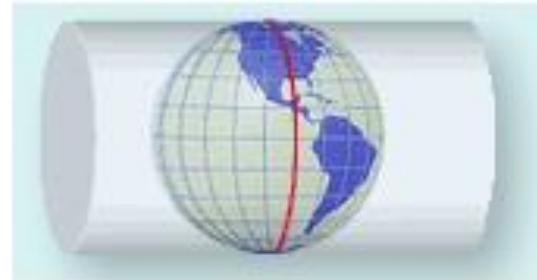


# 5. Projeções conformes

Mercator (Direct Mercator)



Transverse Mercator



## 5. Projeções conformes

### 5.2.2. Fórmulas de transformação direta

As expressões para o cálculo de  $x$  e de  $y$  ( $M$  e  $P$ , respetivamente), são:

$$\begin{aligned}
 y = & \sigma + \frac{\lambda^2}{2} \cdot N \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi + \frac{\lambda^4}{24} \cdot N \cdot \sin \phi \cdot \cos^3 \phi \cdot k_2 + \frac{\lambda^6}{720} \cdot N \cdot \sin \phi \cdot \cos^5 \phi \cdot k_4 \\
 & + \frac{\lambda^8}{40320} \cdot N \cdot \sin \phi \cdot \cos^7 \phi \cdot k_6 \\
 x = & \lambda \cdot N \cdot \cos \phi + \frac{\lambda^3}{6} \cdot N \cos^3 \phi \cdot k_1 + \frac{\lambda^5}{120} \cdot N \cos^5 \phi \cdot k_3 + \frac{\lambda^7}{5040} \cdot N \cos^7 \phi \cdot k_5
 \end{aligned}
 \tag{5.26}$$

sendo  $\sigma$  o arco de meridiano entre a latitude de um ponto ( $\phi$ ) e a latitude de origem da projeção,  $\lambda$  a diferença de longitude entre o ponto e o meridiano central da projeção,  $N$  o raio de curvatura segundo a primeira vertical e  $k_1$  a  $k_5$ , os coeficientes com as seguintes expressões:

# 5. Projeções conformes

$$k_1 = \frac{N}{\rho} - \operatorname{tg}^2 \phi$$

$$k_2 = \frac{N}{\rho} + 4 \cdot \frac{N^2}{\rho^2} - \operatorname{tg}^2 \phi$$

$$k_3 = 4 \cdot \frac{N^3}{\rho^3} \cdot (1 - 6 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi) + \frac{N^2}{\rho^2} \cdot (1 + 8 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi) - 2 \cdot \frac{N}{\rho} \cdot \operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^4 \phi$$

$$k_4 = 8 \cdot \frac{N^4}{\rho^4} \cdot (11 - 24 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi) - 28 \cdot \frac{N^3}{\rho^3} \cdot (1 - 6 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi) + \frac{N^2}{\rho^2} \cdot (1 - 32 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi) - 2 \cdot \frac{N}{\rho} \cdot \operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^4 \phi$$

$$k_5 = 61 - 479 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi + 179 \cdot \operatorname{tg}^4 \phi - \operatorname{tg}^6 \phi$$

$$k_6 = 1385 - 3111 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi + 543 \cdot \operatorname{tg}^4 \phi + \operatorname{tg}^6 \phi$$

sendo  $\rho$  o raio de curvatura do meridiano à latitude  $\phi$ .

# 5. Projeções conformes

## 5.2.3. Fórmulas de transformação inversa

As fórmulas de transformação inversa são as seguintes:

$$\begin{aligned}
 \phi = \phi' - & \left( \frac{t}{k_0 \cdot \rho} \right) \cdot \left( \frac{M^2}{2 \cdot k_0 \cdot N} \right) + \left( \frac{t}{k_0 \cdot \rho} \right) \cdot \left( \frac{M^4}{24 \cdot k_0^3 \cdot N^3} \right) \cdot (-4\psi^2 + 9\psi \cdot (1-t^2) + 12t^2) - \\
 & - \left( \frac{t}{k_0 \cdot \rho} \right) \cdot \left( \frac{M^6}{720 \cdot k_0^5 \cdot N^5} \right) \cdot (8\psi^4 \cdot (11-24t^2) - 12\psi^3 \cdot (21-71t^2) + 15\psi^2 \cdot (15-98t^2 + 15t^4) + \\
 & + 180\psi \cdot (5t^2 - 3t^4) - 360t^4) + \left( \frac{t}{k_0 \cdot \rho} \right) \cdot \left( \frac{M^8}{40320 \cdot k_0^7 \cdot N^7} \right) \cdot (1385 + 3633t^2 + 4095t^4 + 1575t^6) \\
 (\lambda - \lambda_0) \cdot \cos \phi' = & \left( \frac{M}{k_0 \cdot N} \right) - \left( \frac{M^3}{6 \cdot k_0^3 \cdot N^3} \right) \cdot (\psi + 2t^2) + \\
 & + \left( \frac{M^5}{120 \cdot k_0^5 \cdot N^5} \right) \cdot (-4\psi^3 \cdot (1-6t^2) + \psi^2 \cdot (9-68t^2) + 72\psi t^2 + 24t^4) - \\
 & - \left( \frac{M^7}{5040 \cdot k_0^7 \cdot N^7} \right) \cdot (61 + 662t^2 + 1320t^4 + 720t^6)
 \end{aligned}
 \tag{5.27}$$

sendo M a distância à meridiana,  $\psi = N/\rho$  com N e  $\rho$  calculados com um valor aproximado para a latitude  $\phi'$  e  $t = \tan \phi'$ . A determinação de  $\phi'$  é feita através de um processo iterativo.

## 5. Projeções conformes

### 5.2.4. A deformação linear

A deformação linear  $k$  em coordenadas retangulares é dada por:

$$k = 1 + \frac{x^2}{2 \cdot \rho \cdot N} \quad (5.32)$$

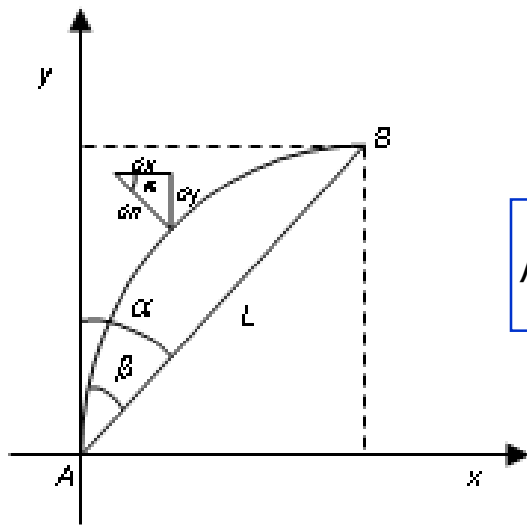
ou seja, a deformação linear é unicamente função do quadrado da distância ao meridiano central da projeção dado que o coeficiente  $\frac{1}{2 \cdot \rho \cdot N}$  varia pouco com a latitude. Esta é a razão pela qual a projeção de Gauss se adapta bem à representação de regiões alongadas na direção N-S. Se a zona a representar não for muito extensa na direção N-S, pode adotar-se o valor médio correspondente à latitude média  $\phi_0$  e então tem-se que:

$$k = 1 + \frac{x^2}{2 \cdot \rho_0 \cdot N_0} \quad (5.33)$$

## 5. Projeções conformes

### 5.2.5. Correção tangente à corda

As representações conformes mantêm o ângulo entre as tangentes, mas o que interessa para a aplicação das fórmulas da geometria plana é o ângulo entre as cordas, surgindo assim a necessidade de aplicar às direções azimutais elipsoidais a correção tangente à corda  $\beta$ , também designada por redução à corda.



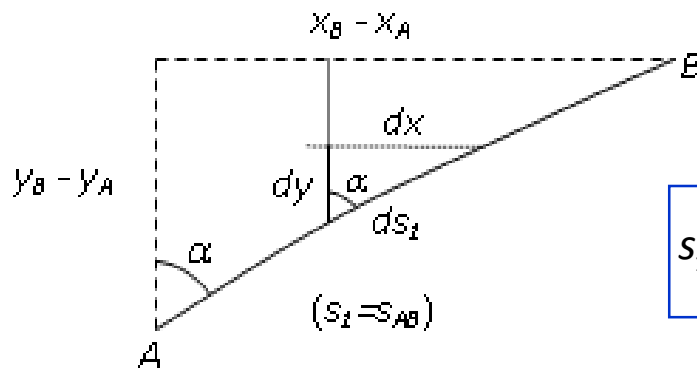
$$\beta'' = \frac{1}{6 \cdot \rho_0 \cdot N_0 \cdot \sin 1''} \cdot (2 \cdot x_A + x_B) \cdot (y_B - y_A) \quad (5.36)$$

No caso da projeção de Gauss a transformada de uma geodésica volta sempre a concavidade para o meridiano central.

# 5. Projeções conformes

## 5.2.6. Correção de redução dos comprimentos finitos

Esta correção é aplicada a um comprimento finito elipsoidal para se obter o correspondente comprimento cartográfico. Sendo  $ds_1$  o elemento linear sobre a carta, o elemento correspondente sobre o elipsoide será dado por:



$$s_1 - s = \frac{s_1}{6 \cdot \rho_0 \cdot N_0} \cdot (x_B^2 + x_B \cdot x_A + x_A^2) \quad (5.37)$$

# 5. Projeções conformes

Para Portugal continental considerando o sistema PT-TM06/ETRS89, com a latitude do Ponto Central perto do V.G. Melriça ( $\phi_0 = 39^\circ 40' 5.73''$  N), as expressões (5.33), (5.36) e (5.37) assumem os seguintes valores:

$$k = 1 + 12306 \cdot 10^{-18} \cdot x^2$$

$$\beta'' = 84612 \cdot 10^{-14} \cdot (2 \cdot x_A + x_B) \cdot (y_B - y_A)$$

$$s_1 - s = 41021 \cdot 10^{-19} \cdot s_1 \cdot (x_B^2 + x_B \cdot x_A + x_A^2)$$

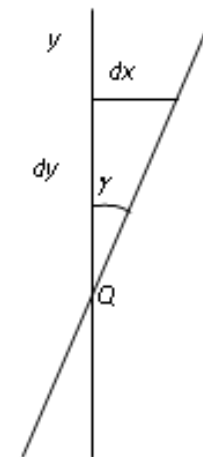


## 5. Projeções conformes

### 5.2.7. Convergência de meridianos

Seja P um ponto sobre o elipsoide e Q o seu homólogo num sistema cartográfico qualquer. Na figura está representado o ponto Q, uma reta paralela ao eixo das ordenadas e a transformada de um meridiano. Chama-se ângulo de convergência de meridianos, ou simplesmente convergência de meridianos, ao ângulo  $\gamma$  entre o meridiano cartográfico e o meridiano geodésico num dado ponto Q. A convergência de meridianos é calculada por:

$$\gamma = -(\lambda - \lambda_0) \cdot \sin \phi \quad (5.39)$$



# 5. Projeções conformes

## Projeção Transversa de Mercator (Gauss-Krüger)

<p><b>DESCRIÇÃO</b></p>	<p>A projeção Transversa de Mercator, também conhecida como Gauss-Krüger, é uma projeção conforme cilíndrica transversa, pelo que se adequa à representação de países com um maior desenvolvimento na direção Norte-Sul. É amplamente utilizada na cartografia topográfica Portuguesa, como por exemplo na Carta Militar de Portugal à escala 1:25 000 produzida pelo CIGeoE e na atual Carta Corográfica de Portugal às escalas 1:50 000 e 1:100 000 produzidas pela DGT. O sistema de coordenadas Universal Transversa de Mercator (UTM) tem por base esta projeção.</p>
<p><b>QUADRÍCULA</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• O meridiano central é representado por uma linha vertical no centro da projeção (região de interesse), por forma a minimizar as distorções nessa região;</li> <li>• Os meridianos e os paralelos são linhas curvas complexas, ortogonais entre si, e os meridianos convergem para os polos;</li> <li>• Os polos são projetados como pontos, estando cada um no centro do seu hemisfério.</li> </ul>

# 5. Projeções conformes

## Projeção Transversa de Mercator ou Projeção de Gauss-Krüger

CARACTERÍSTICAS	<ul style="list-style-type: none"><li>• A escala é constante ao longo do meridiano central, aumentado para este e oeste a partir dessa linha (ou dos dois círculos padrão na versão do cilindro secante, como no caso da projeção UTM), provocando grandes deformações lineares e areais;</li><li>• As deformações são muito grandes nos extremos direito e esquerdo, e simétricas em relação ao meridiano central e ao paralelo central (o equador, no caso da UTM);</li><li>• A projeção utilizada no sistema UTM é semelhante à projeção de Gauss-Krüger, apenas diferindo pela aplicação de um fator de redução da escala igual a 0.9996, dada a utilização de uma superfície de projeção secante, em que os dois círculos menores, paralelos ao meridiano central, estão distanciados de 180 km deste.</li></ul>
CURIOSIDADES	<p>A versão esférica desta projeção foi inicialmente apresentada por Johann H. Lambert em 1772, no entanto, as primeiras fórmulas com correção elipsoidal foram desenvolvidas por Carl F. Gauss em 1822. A denominação Gauss-Krüger refere-se à reavaliação da formulação elipsoidal efetuada por Louis Krüger em 1912.</p>

# 5. Projeções conformes

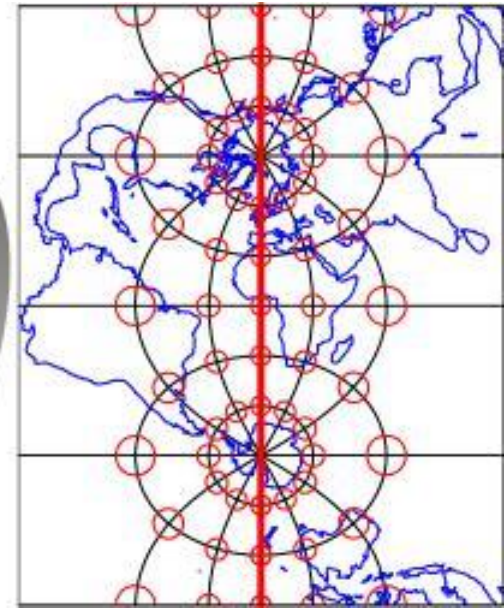
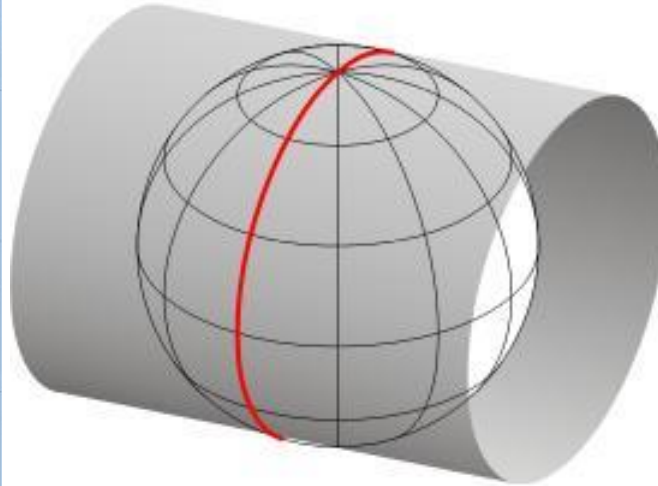
## Projeção Transversa de Mercator ou Projeção de Gauss-Krüger

### LIMITAÇÕES

A projeção, recorrendo a um elipsóide, não pode ser aplicada para além dos  $90^\circ$  a partir do meridiano central, devendo ser limitada a  $10$  ou  $20^\circ$  para ambos os lados, dado que a partir desses valores a projeção já apresenta grandes deformações. A projeção recorrendo à esfera não apresenta estas limitações.

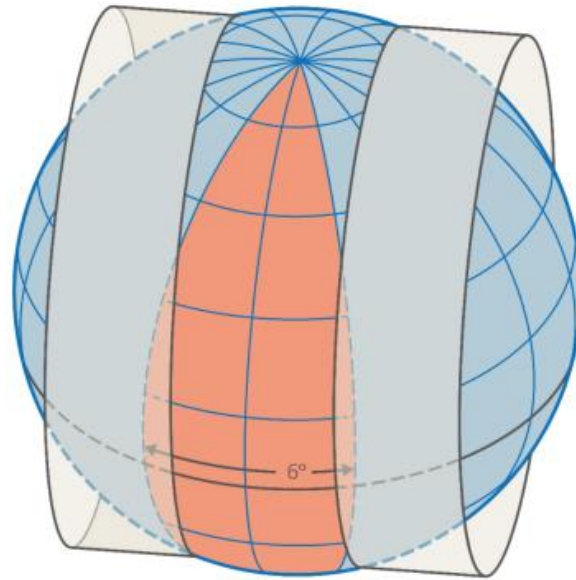
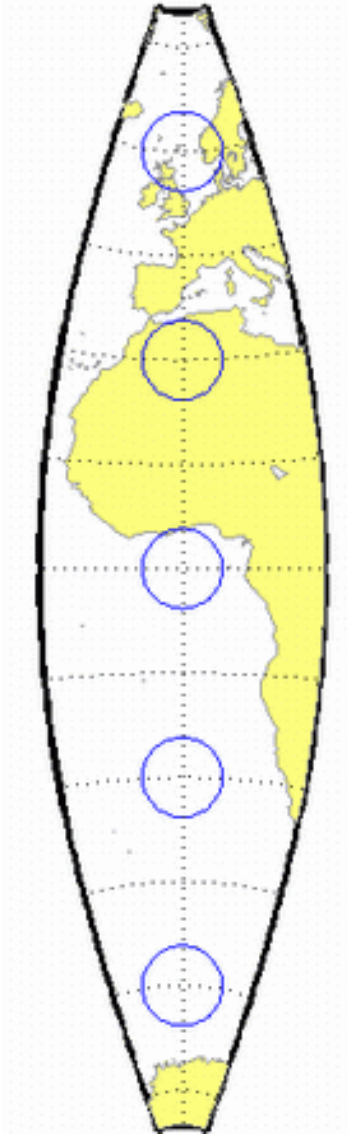
# 5. Projeções conformes

## 5.2. PROJEÇÃO DE GAUSS

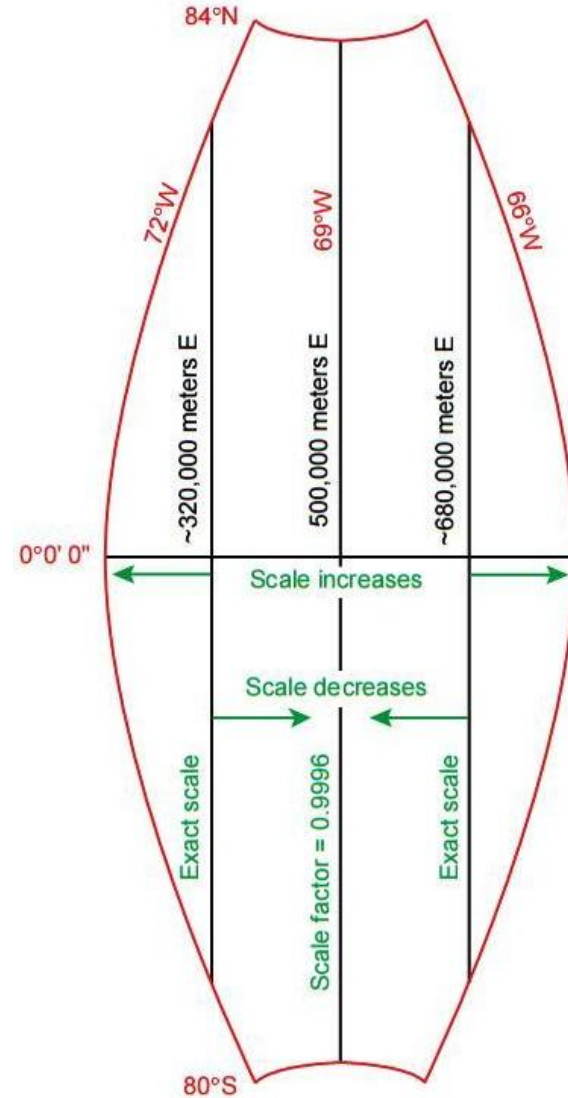


**Gauss-Krüger**

# 5. Projeções conformes



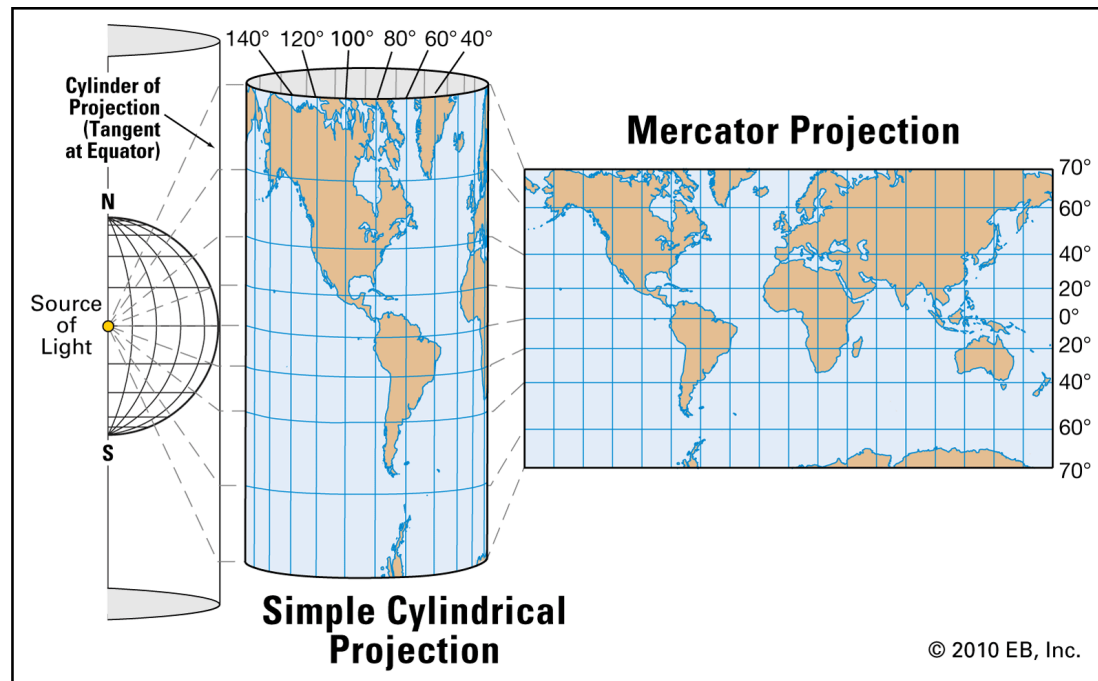
UTM



# 5. Projeções conformes

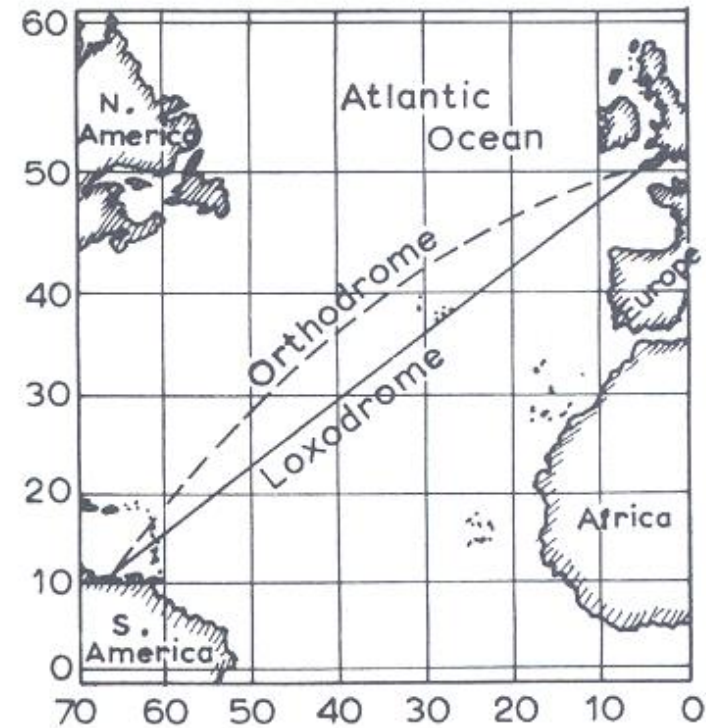
## 5.3.1. Introdução

A projeção de Mercator é uma projeção cilíndrica conforme. Gerardo Kramer (1512-1591), cartógrafo flamengo, tenta corrigir a representação do Mediterrâneo de Ptolomeu e constrói um Mapa Mundo com base numa projeção matemática, em que os paralelos e os meridianos se projetam num plano perpendiculares entre si.



## 5. Projeções conformes

A projeção de Mercator foi concebida para reduzir os problemas de orientação no decorrer da navegação. O principal problema de um navegador é saber como orientar o navio para que, partindo de um determinado lugar, consiga atingir um destino previamente definido. Combinando o ser uma projeção conforme com o facto de ter os meridianos e paralelos retilíneos faz com que as loxodrócias, ou seja as linhas com um rumo constante, sejam representadas por segmentos de reta.





## 5. Projeções conformes

Para sabermos qual o azimute  $\alpha$  da loxodrômica que une dois pontos, dispondo de uma carta com esta projeção basta unir os dois pontos por uma reta e medir o ângulo  $\alpha$ .



# 5. Projeções conformes

A formulação existente na projeção de Mercator baseia-se fundamentalmente no elipsoide sobre o qual escolhemos as coordenadas  $\Phi$  e  $\lambda$ , respetivamente a latitude isométrica e a longitude, e nas coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  sobre o plano, cuja relação com a latitude isométrica e longitude é obtida por uma função analítica qualquer  $f$  que obedece à condição geral das projeções conformes.

## 5. Projeções conformes

### 5.3.2. Fórmulas de transformação direta

As fórmulas de transformação direta são as seguintes:

$$\begin{cases} y = a \cdot \Phi \\ x = a \cdot \lambda \end{cases} \quad (5.47)$$

sendo  $a$  o raio equatorial do elipsoide (semieixo maior). Como as deformações aumentam com a distância ao equador é frequente a utilização de um artifício que se baseia em multiplicar todos os comprimentos da carta por  $k_0 < 1$ , pelo que as fórmulas de transformação direta (5.47) passam a ser:

$$\begin{cases} y = k_0 \cdot a \cdot \Phi \\ x = k_0 \cdot a \cdot \lambda \end{cases}$$

## 5. Projeções conformes

As deformação linear é calculada usando a seguinte expressão:

$$k = 1 + \frac{y^2}{2a\rho_0} \quad (5.53)$$

que mostra que  $k$  cresce muito rapidamente com a distância ao equador pelo que o sistema é indicado para zonas equatoriais alongadas na direção E-W mas estreitas na direção N-S. Dado o artifício referido no slide anterior, a deformação linear passa a ser dada por:

$$k = k_0 \cdot \left( 1 + \frac{y^2}{2a\rho_0} \right)$$

## 5. Projeções conformes

### 5.3.3. Fórmulas de transformação inversa

Partindo das expressões da transformação direta (5.47), facilmente se obtêm as expressões para a transformação inversa:

$$\begin{cases} \Phi = \frac{y}{a} \\ \lambda = \frac{x}{a} \end{cases} \quad (5.55)$$

## 5. Projeções conformes

### 5.3.4. Correção tangente à corda

$$\beta'' = \frac{1}{6 \cdot a \cdot \rho_0 \cdot \sin 1''} \cdot (2 \cdot y_A + y_B) \cdot (x_B - x_A) \quad (5.56)$$

### 5.3.5. Correção de redução dos comprimentos finitos

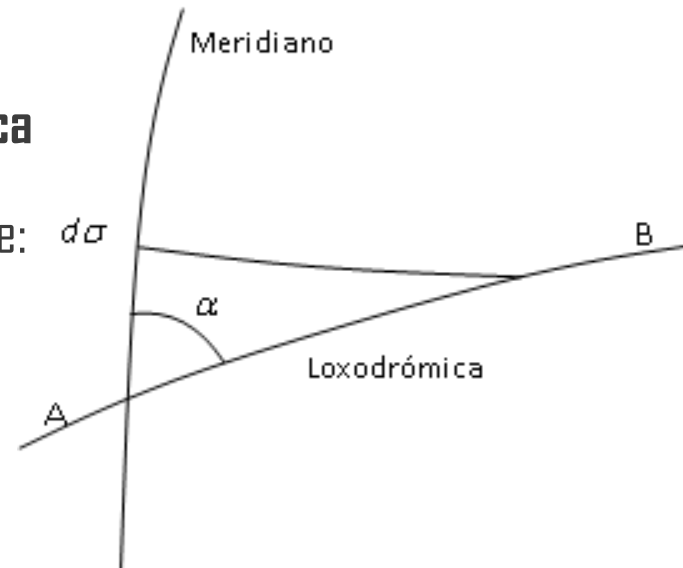
$$s_1 - s = \frac{s_1}{6 \cdot a \cdot \rho_0} \cdot (y_B^2 + y_B \cdot y_A + y_A^2) \quad (5.57)$$

## 5. Projeções conformes

### 5.3.6. Comprimento de um arco de loxodrómica

Considerando a figura e a lei dos senos temos que:

$$ds = \frac{1}{\cos \alpha} d\sigma$$



fazendo o integral desta expressão obtém-se a seguinte expressão:

$$s = \frac{1}{\cos \alpha} \int d\sigma = \frac{\sigma}{\cos \alpha} \quad (5.58)$$

que permite determinar o comprimento de um arco de loxodrómica bastando para isso dividir o comprimento do arco de meridiano, entre duas latitudes, pelo coseno do azimute da loxodrómica.

# 5. Projeções conformes

## Projeção de Mercator

### DESCRIÇÃO

A projeção de Mercator é uma projeção conforme cilíndrica normal especialmente apropriada para a representação de regiões equatoriais ou, de um modo geral, de regiões com pequeno desenvolvimento em latitude, desde que a latitude seja pequena. A partir dos  $60^\circ$ , a escala aumenta rapidamente, o que leva a que as deformações areais aumentem ainda mais (uma vez que a escala areal varia com o quadrado da escala linear). É a projeção utilizada pelo Instituto Hidrográfico para a produção da Cartografia Náutica utilizada para a segurança da navegação.

### QUADRÍCULA

- Os meridianos são linhas retas paralelas e igualmente espaçadas, enquanto que os paralelos, embora sejam linhas retas paralelas e perpendiculares aos meridianos, não são igualmente espaçadas, aumentando o espaçamento na direção dos polos;
- Os polos não podem ser representados;
- Existe simetria relativamente a cada meridiano e em torno de Equador.



# 5. Projeções conformes

Projeção de Mercator	
CARACTERÍSTICAS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• O espaçamento dos paralelos é calculado de modo a manter a conformidade;</li> <li>• A escala é mantida ao longo do paralelo standard e é constante entre 2 paralelos, sendo também constante em todas as direções um dado ponto, no entanto torna-se infinita nos polos;</li> <li>• As loxodrómicas (linhas de azimute constante relativamente a todos os meridianos) são representadas como linhas retas (sendo apropriada para efeitos de navegação);</li> <li>• A extrema distorção areal torna-a inadequada para a representação de áreas vastas da superfície Terrestre.</li> </ul>
CURIOSIDADES	<p>A projeção de Mercator é assim designada por ter sido Gerardus Mercator que a apresentou para efeitos de navegação em 1569. É também designada por projeção de Wright, embora que raramente, depois de Edward Wright ter desenvolvido a formulação matemática desta projeção em 1599.</p>

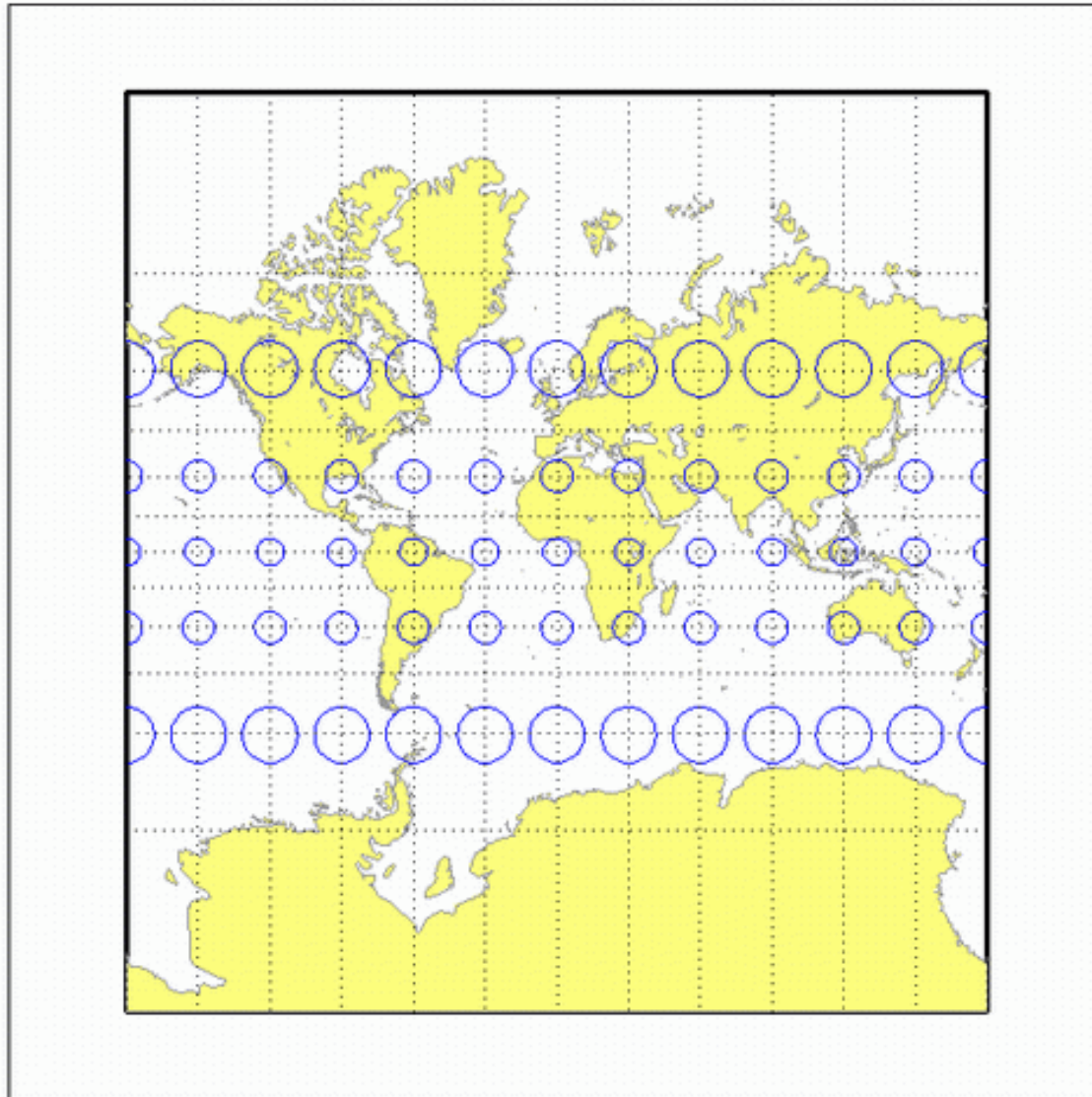
# 5. Projeções conformes

### Projeção de Mercator (continuação)

#### LIMITAÇÕES

Os dados relativos a regiões a latitudes superiores a  $86^\circ$  têm de ser ajustados para evitar que os valores de  $y$  dominem a representação.

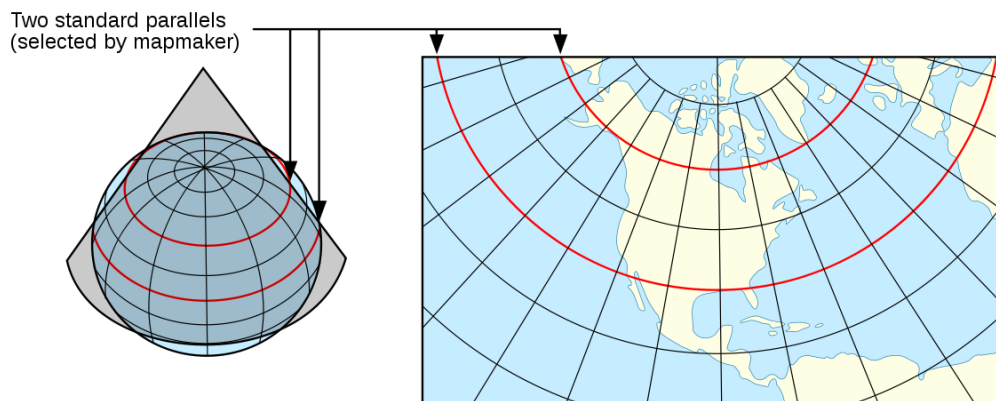
# 5. Projeções conformes



# 5. Projeções conformes

### 5.4.1. Introdução

Abandonando esta condição de paralelismo entre os meridianos (verificada na projeção de Mercator), é possível construir um sistema conforme em que os meridianos sejam retas não paralelas. Sendo os meridianos convergentes nos polos, estas retas hão-de ser concorrentes, tendo como ponto de convergência o polo norte ou polo sul. Dada a conformidade do sistema, os paralelos são representados por circunferências concêntricas com centro no ponto de concorrência daquelas retas, correspondendo esta projeção à projeção cónica conforme de Lambert.



## 5. Projeções conformes

### 5.4.2. Fórmulas de transformação direta

As equações de transformação em coordenadas cartesianas retangulares são:

$$\begin{aligned} x &= (R_0 - Y) \cdot \sin \theta \\ y &= R_0 - (R_0 - Y) \cdot \cos \theta \end{aligned} \quad (5.78)$$

COM:

$$R_0 = N_0 \cdot |\cot g \phi_0|$$

$$\theta = -\sin \phi_0 \cdot \lambda$$

## 5. Projeções conformes

A deformação linear é calculada utilizando a seguinte expressão:

$$k = 1 + \frac{y^2}{2 \cdot \rho_0 \cdot N_0} \quad (5.80)$$

pelo que  $k$  cresce rapidamente com o afastamento ao paralelo central, pelo que este sistema é conveniente para zonas alongadas na direção EW, mas estreitas da direção NS.

Esta projeção pode ser tangente ou secante, conforme se adote um só paralelo de escala conservada ou dois, respetivamente. No segundo caso, o valor de  $k$  é dado por:

$$k = k_0 \cdot \left( 1 + \frac{y^2}{2 \cdot \rho_0 \cdot N_0} \right)$$

## 5. Projeções conformes

### 5.4.3. Fórmulas de transformação inversa

As fórmulas de transformação inversa são obtidas sem dificuldade de maior, através das seguintes equações:

$$\begin{aligned} R &= \frac{x}{\sin \theta} \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{x}{R_0 - y} \end{aligned} \quad (5.82)$$

sendo que:

$$\lambda = \frac{\theta}{\sin \phi_0}$$

no entanto, a latitude  $\phi$  tem que ser obtida por um processo iterativo, muito idêntico ao utilizado na projeção de Gauss.

## 5. Projeções conformes

### 5.4.4. Correção tangente à corda

$$\beta'' = \frac{1}{6 \cdot a \cdot \rho_0 \cdot \sin 1''} \cdot (2 \cdot y_A + y_B) \cdot (x_B - x_A) \quad (5.84)$$

### 5.4.5. Correção de redução dos comprimentos finitos

$$s_1 - s = \frac{s_1}{6 \cdot a \cdot \rho_0} \cdot (y_B^2 + y_B \cdot y_A + y_A^2) \quad (5.85)$$



## 5. Projeções conformes

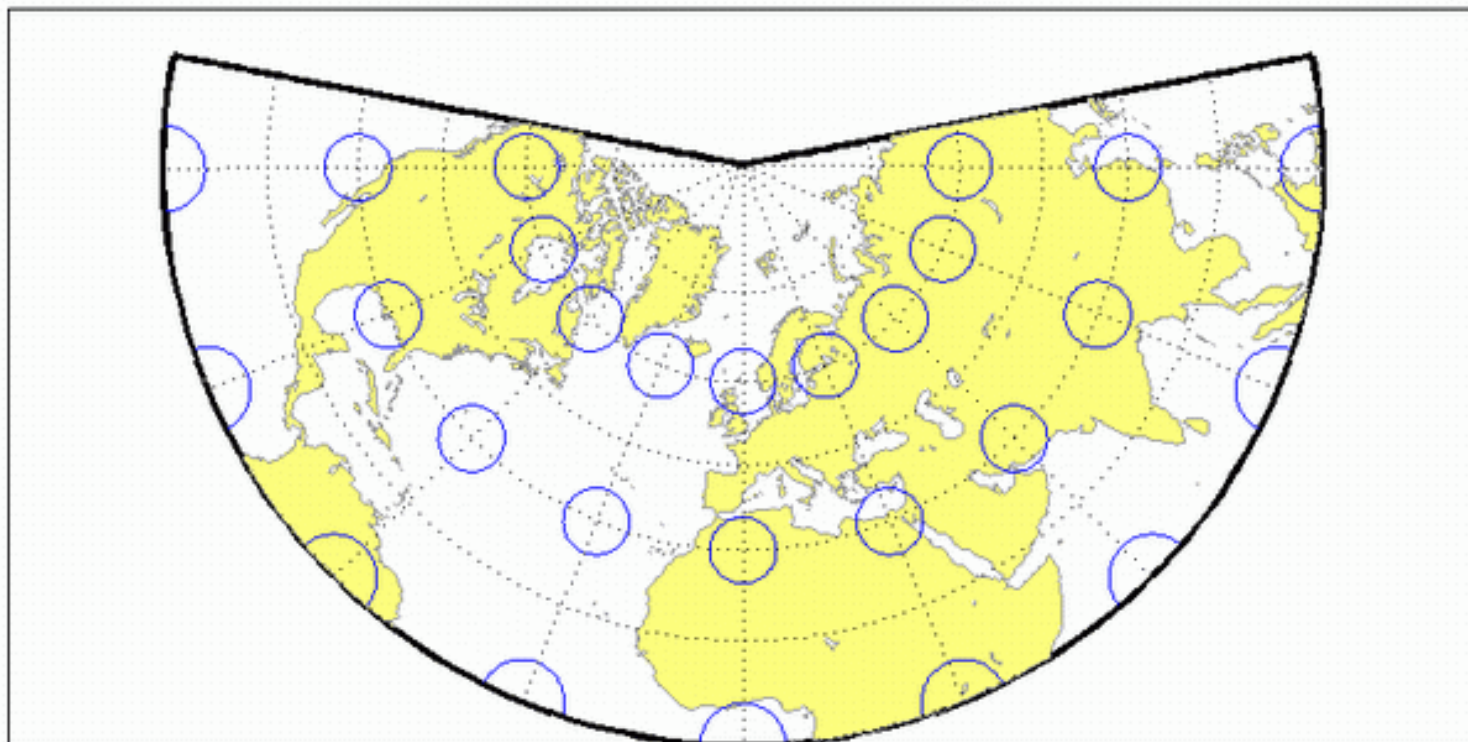
### Projeção de Lambert Cónica Conforme

DESCRIÇÃO	<p>A projeção cónica (normal) conforme secante de Lambert é adequada para a representação de regiões alongadas na direção EW, mas estreitas da direção NS, sendo utilizada pela DGT para a produção da Carta de Portugal à escala 1:2 500 000, na qual todo o território de Portugal é representado, incluindo as regiões autónomas dos Açores e da Madeira.</p>
QUADRÍCULA	<ul style="list-style-type: none"><li>• Os meridianos são linhas retas igualmente espaçadas a convergir para um dos polos, sendo os ângulos entre os meridianos ligeiramente inferiores aos ângulos verdadeiros;</li><li>• Os paralelos são círculos concêntricos centrados no polo de convergência, cujo espaçamento vai aumentando com a distância às latitudes centrais;</li><li>• O polo mais próximo ao paralelo standard é representado por um ponto, mas o outro polo não é visível;</li><li>• Existe simetria em torno de qualquer meridiano.</li></ul>

## 5. Projeções conformes

Projeção de Lambert Cónica Conforme	
CARACTERÍSTICAS	<ul style="list-style-type: none"><li>• A escala é mantida ao longo do paralelo, ou dos 2 paralelos standard, dependendo da tangência ou secância, sendo também constante ao longo de qualquer paralelo;</li><li>• A projeção é conforme em todos os pontos, exceto nos polos;</li><li>• No caso de haver 2 paralelos standard, estes não podem ser simétricos relativamente ao Equador, sendo que os paralelos utilizados na carta à escala 1: 2 500 000 são 40° N e 32° N.</li></ul>
CURIOSIDADES	Esta projeção foi apresentada por Joham Heinrich Lambert em 1772, sendo também conhecida como projeção cónica ortomórfica.
LIMITAÇÕES	As longitudes superiores a 135° Este ou Oeste do meridiano central são ajustadas, correspondendo os limites dos mapas a 90° para evitar deformações areais extremas.

## 5. Projeções conformes



# Bibliografia

Catalão, J. (2007). *Projeções cartográficas*, FCUL-DEGGE, 76 pp.

Gaspar, J. A. (2000). *Cartas e projeções cartográficas*, 2ª edição, Lidel-Edições Técnicas, Lda., 292 pp.

Instituto Geográfico e Cadastral (1972). *Cartografia Matemática*, Cadernos Técnicos e de Informação, nº 31, 135 pp.

Maling, D. H. (1992). *Coordinate systems and map projections*, 2nd edition, Pergamon Press, Oxford.

Richardus, P. and R. K. Adler (1972). *Map projections*, North-Holland Publishing Company, Amesterdam, 174 pp.

<https://www.mathworks.com/help/map/summary-and-guide-to-projections.html>, consultado em abril de 2021.

<https://pro.arcgis.com/en/pro-app/latest/help/mapping/properties/list-of-supported-map-projections.htm>, consultado em abril de 2021.