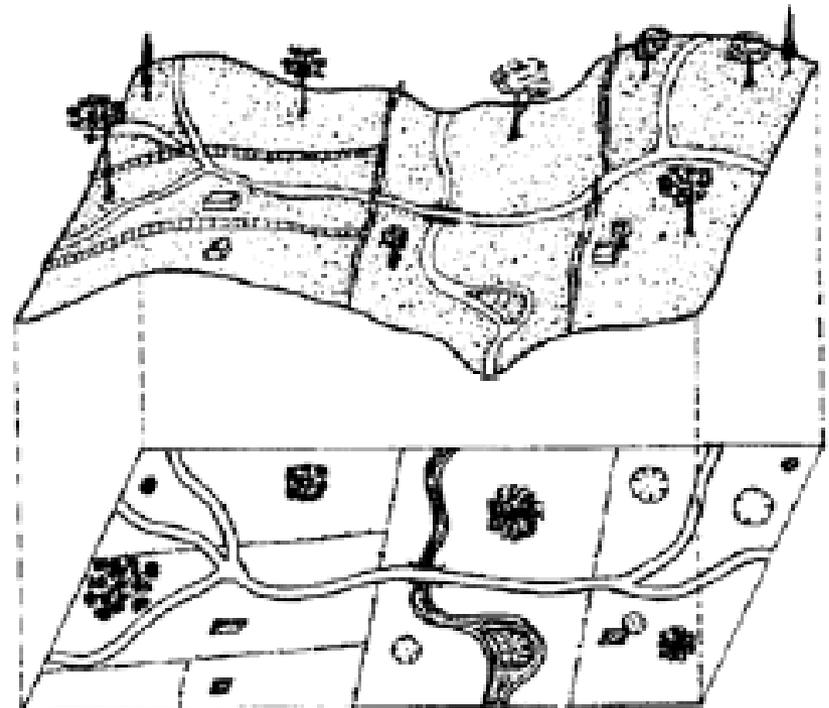


LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

A **topografia** é a ciência que permite representar graficamente uma parte suficientemente pequena da superfície terrestre para que esta possa ser substituída sem erro apreciável pelo **plano tangente** no centro da zona a representar (**em torno do ponto estação**).

Esta representação gráfica designa-se por **planta** ou **carta**, que se obtém projectando os pontos mais representativos do terreno sobre o plano horizontal considerado (normal à vertical do ponto estação).



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

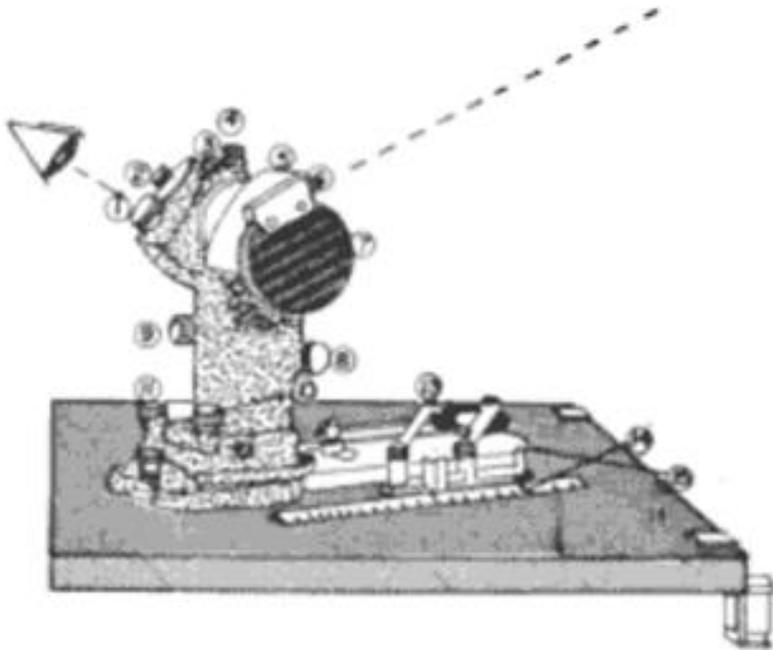
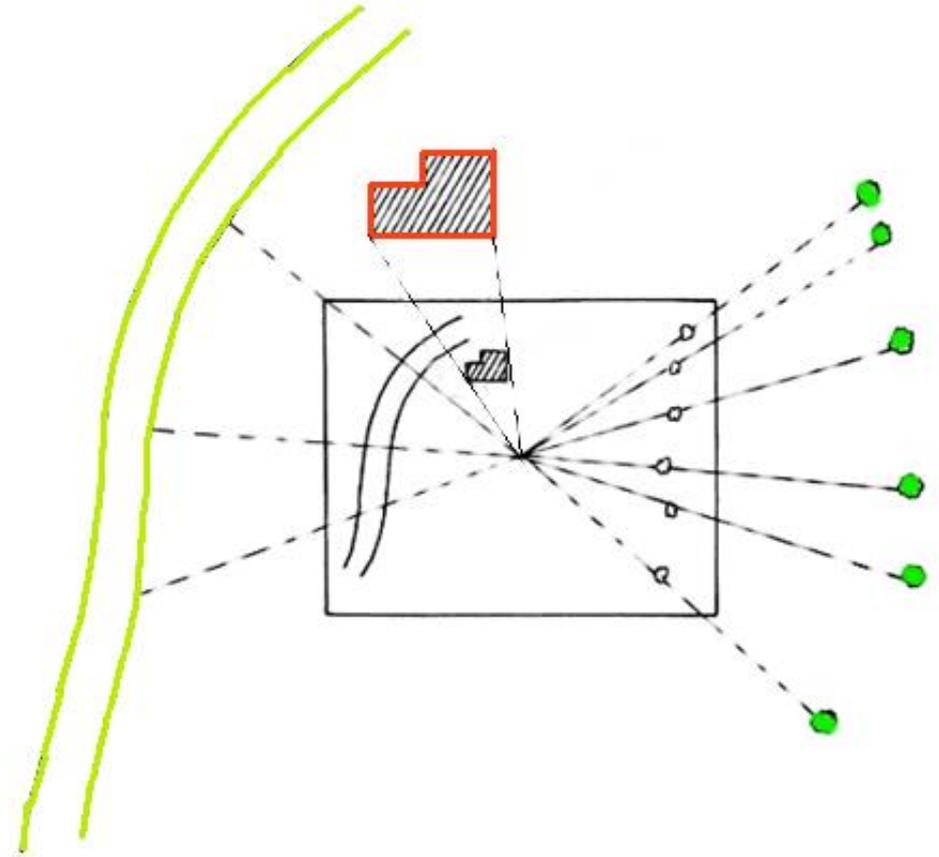
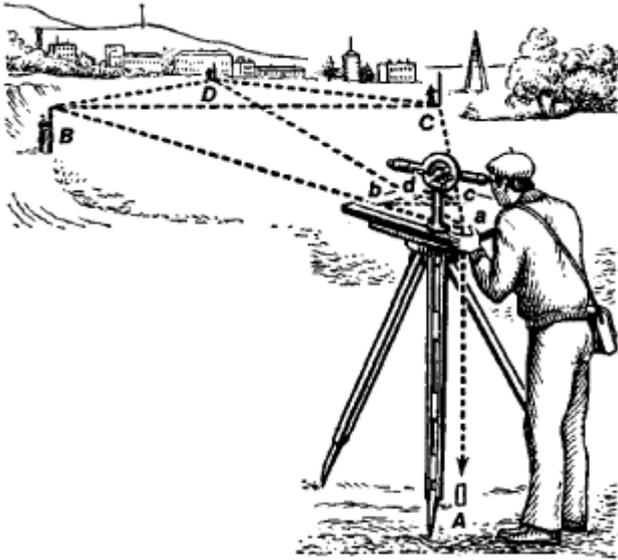
Prancheta com alidade

“plano horizontal” no ponto estação



O pormenor vai sendo desenhado no campo

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Prancheta com alidade

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Utilização de prancheta com alidade e mira, com as distâncias medidas por métodos taqueométricos

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Prisma reflector

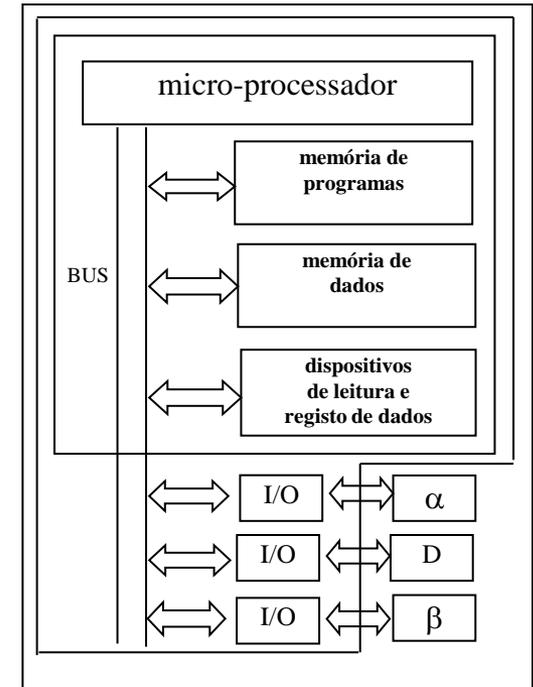
Estação total

**Teodolito com
distanciómetro
infravermelho e
prisma reflector**



Estação total

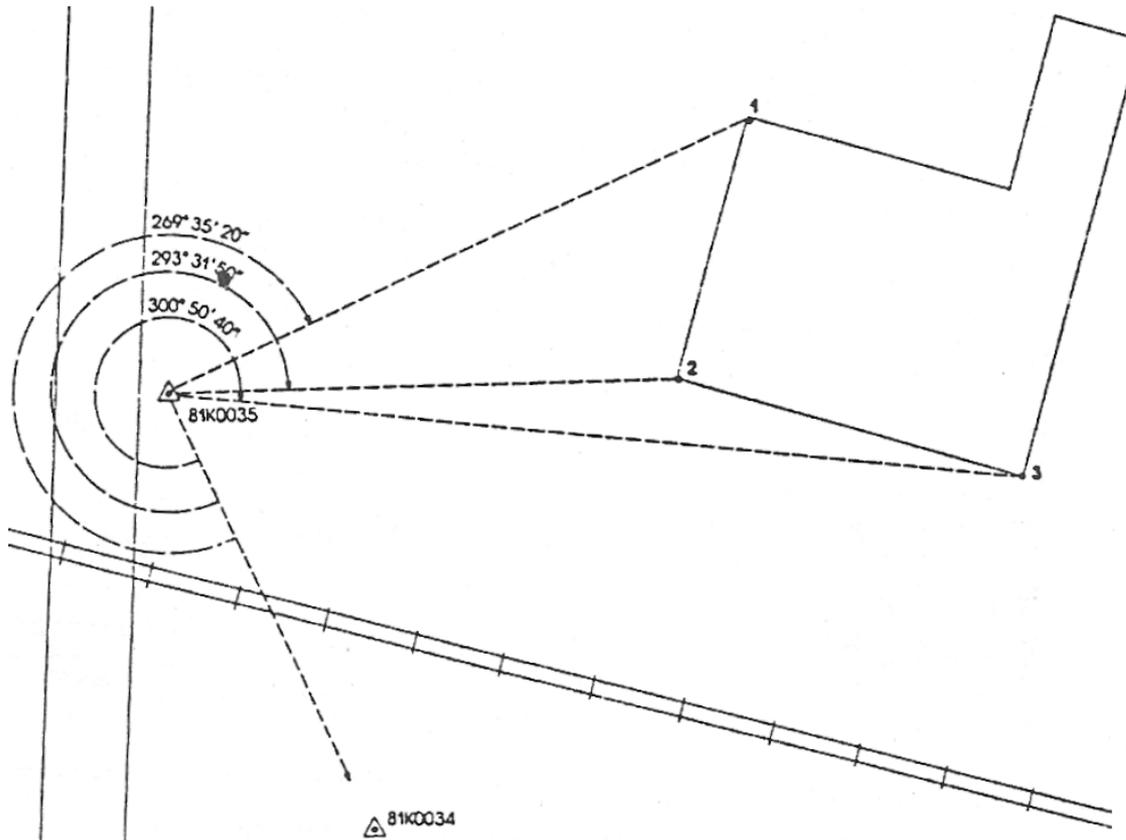
**Teodolito com
distanciómetro laser**



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

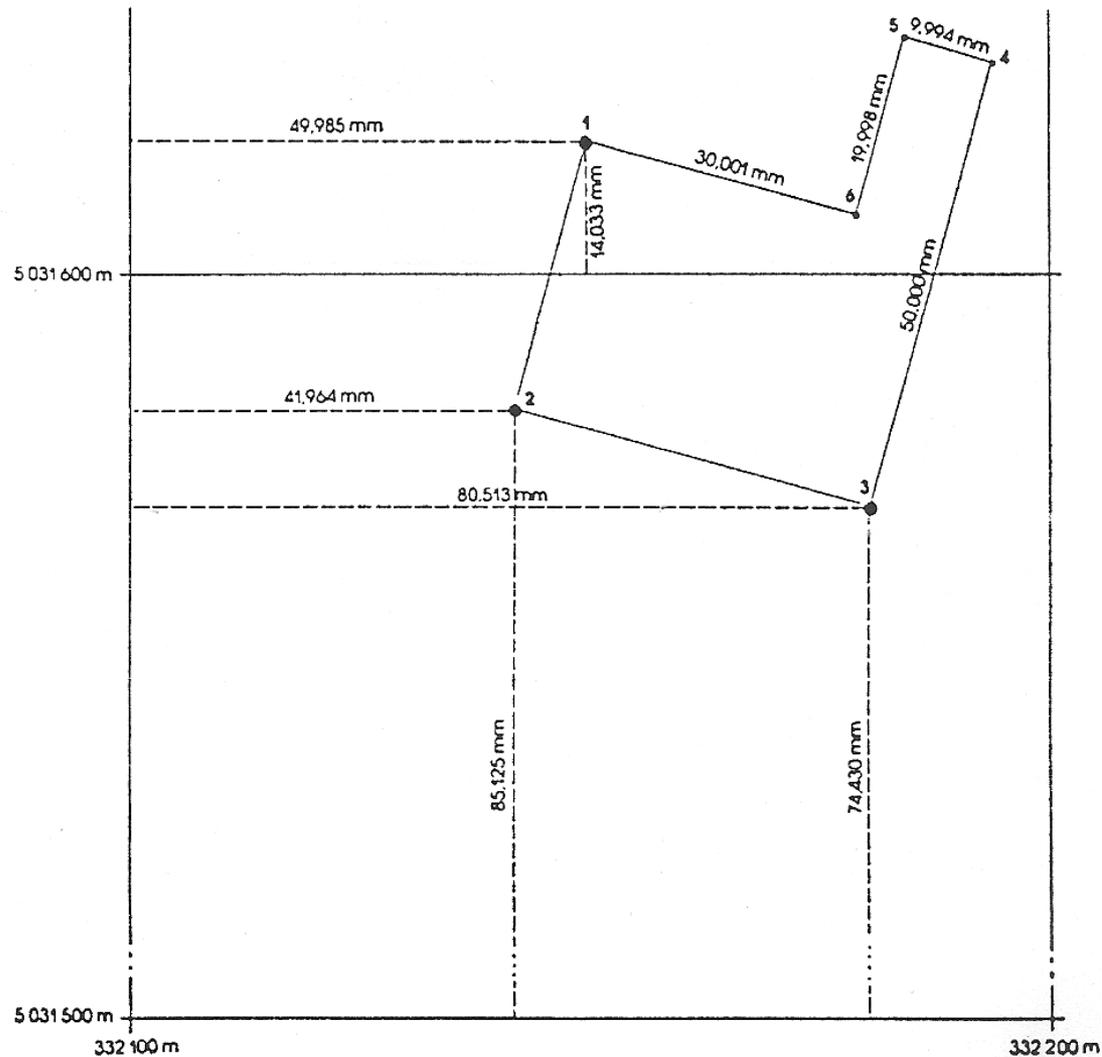


LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



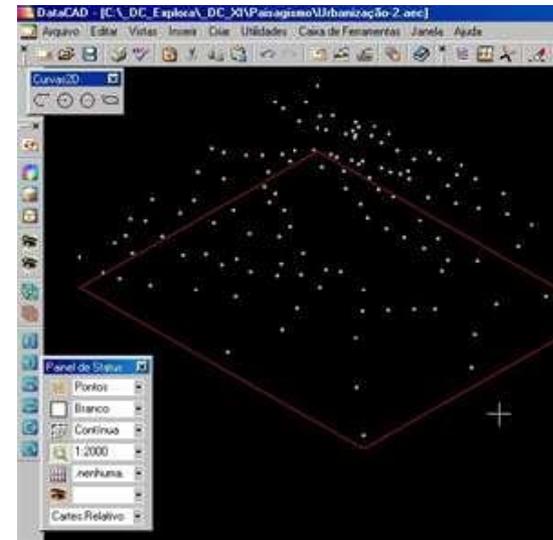
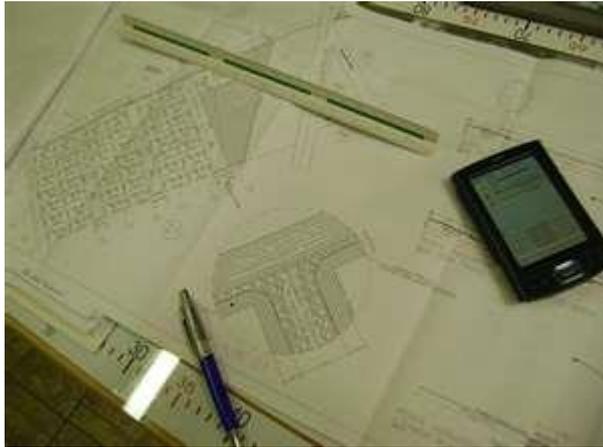
Trabalho de campo: observações (direcções + distâncias)

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

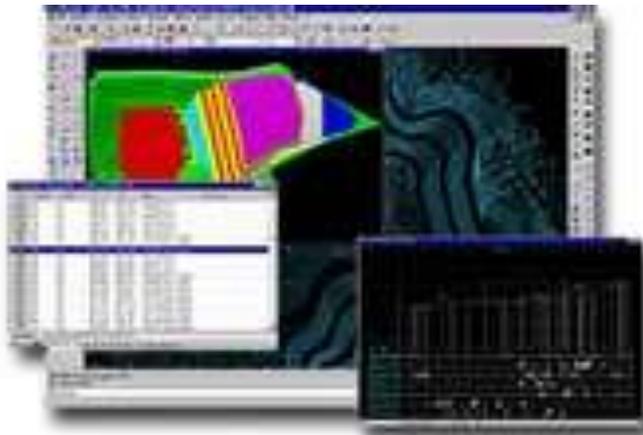


Trabalho de gabinete: cálculo de coordenadas + implantação

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

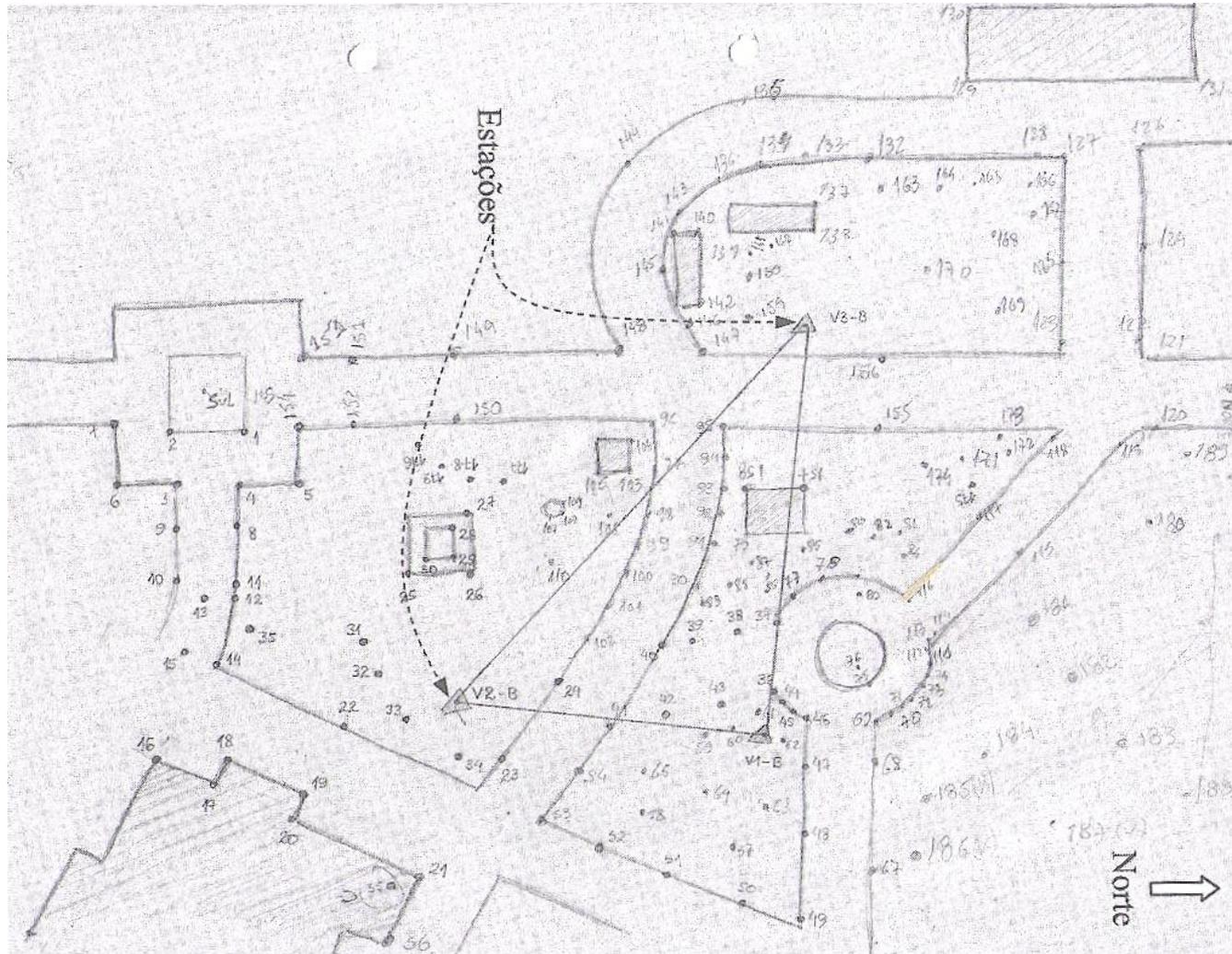


Nuvem de pontos



Cálculo, importação e implantação

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Esboço ou croquis

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Arquivo Editar Ver Inserir Formatar Ferramentas Dados S-PLUS Janela Ajuda

Helv 18 N I S

F1 Instituto Português de Cartografia e Cadastro

A B C D E F G H I J K L M N O

1 *Instituto Português de Cartografia e Cadastro*

2

3

4 NOME DO FICHEIRO

5 XXX_XCON

6 DIMENSÃO 2D

CÓDIGO	DESCRIÇÃO	CARACTERÍSTICAS GRÁFICAS DO ELEMENTO					REPRESENTAÇÃO EM FORMATO IGDS (DGN)	NOME DA CÉLULA	OBSERVAÇÕES	
		TIPO OBJECTO	NÍVEL	ESTILO	ESPESURA	COR				
Des	Sub	Fam	Obj							
CONSTRUÇÕES										
06	00	00	00	CONSTRUÇÕES EM GERAL	ÁREA	1	0	0	3	POLIGONAL FECHADA
EDIFÍCIOS PÚBLICOS E OFICIAIS										
ADMINISTRAÇÃO CENTRAL										
06	01	01	01	PARLAMENTO	ÁREA	2	0	0	10	POLIGONAL FECHADA
06	01	01	02	TRIBUNAL	"	2	0	0	11	-
06	01	01	11	PRISÃO	"	2	0	0	12	-
06	01	01	12	PENITENCIÁRIA	"	2	0	0	13	-
06	01	01	14	POSTO FRONTEIRIÇO	"	2	0	0	14	-
ADMINISTRAÇÃO REGIONAL										
06	01	02	01	CÂMARA MUNICIPAL, SECRETARIA REGIONAL	ÁREA	3	0	0	10	POLIGONAL FECHADA
06	01	02	02	ASSEMBLEIA MUNICIPAL	"	3	0	0	11	-
06	01	02	04	TRIBUNAL	"	3	0	0	12	-
06	01	02	06	GOVERNO CIVIL	"	3	0	0	13	-
EDUCAÇÃO/INVESTIGAÇÃO										
06	01	03	05	ESCOLA PRIMÁRIA	ÁREA	4	0	0	10	POLIGONAL FECHADA
06	01	03	07	ESCOLA PREPARATÓRIA E OU SECUNDÁRIA	"	4	0	0	11	-
06	01	03	17	ESTAÇÃO EXPERIMENTAL	"	4	0	0	12	-
SAÚDE / HIGIENE										
06	01	04	01	HOSPITAL	ÁREA	5	0	0	10	POLIGONAL FECHADA
06	01	04	04	SANATÓRIO	"	5	0	0	11	-
06	01	04	05	MATERINIDADE	"	5	0	0	12	-
CULTURA										
06	01	05	06	PLANETÁRIO	ÁREA	6	0	0	10	POLIGONAL FECHADA
06	01	05	07	OBSERVATÓRIO	"	6	0	0	11	-
06	01	05	11	CENTRO CULTURAL	"	6	0	0	12	-

H | GEO / FOT / LIM / AL3 / AL2 / REL / CON_1 / CON_2 / CON_3 / CON_4 / CON_5 / CON_6 / CON_7 / CON_8 / IND / EST / LAZ_1 / Lf |

Catálogo 1/10.000 do IGP

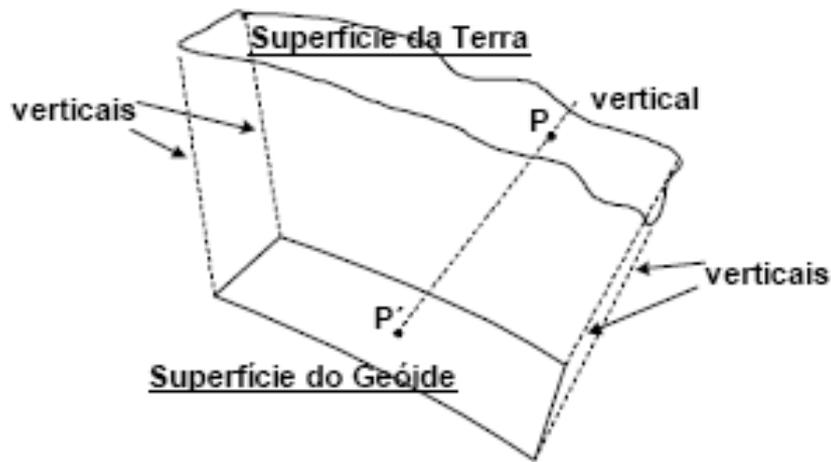
Catálogo de objectos

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



fcu

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

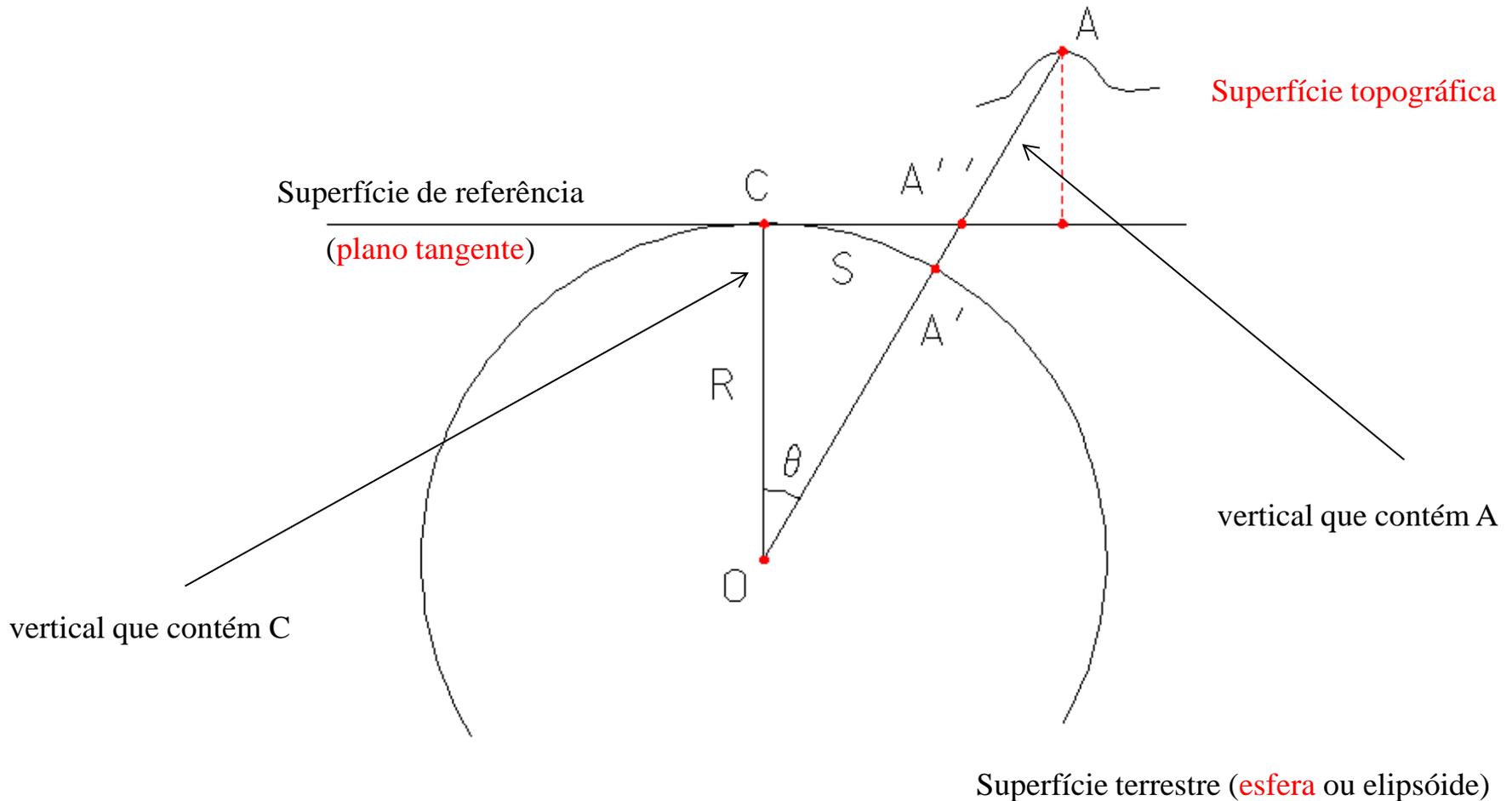


Quando se projeta verticalmente uma parte da superfície da Terra num **plano horizontal** supõe-se que todas as verticais (projetantes) são **paralelas**. Isto não é rigorosamente exacto pois na realidade as verticais são convergentes no centro da Terra.

Se a superfície a ser projectada for muito **extensa**, é necessário considerar a projectão não num plano horizontal mas numa superfície que seja sempre normal a qualquer vertical V contendo um ponto P qualquer da superfície considerada. Esta superfície ideal é o **geóide** (superfície de nível). Se a **Topografia**, para realizar seu objectivo, projecta os acidentes do terreno num plano, resta determinar **até onde isto é válido**, isto é, **até quando não se comete erro apreciável**.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Campo topográfico: superfície terrestre em torno do ponto C (estação) onde a esfera pode ser aproximada pelo plano tangente nesse ponto.



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Erro planimétrico (absoluto): $\epsilon_p = CA'' - CA'$

$$CA' = S = R\theta$$

$$\tan \theta = CA''/R \Rightarrow CA'' = R \tan \theta$$

$$\epsilon_p = R \tan \theta - R\theta = R(\tan \theta - \theta) \approx R(\theta + \theta^3/3 - \theta) = R\theta^3/3 = S^3/3R^2$$

Considerando $R=6371$ km tem-se:

distância horizontal ao
ponto estação

CA'' (m)	ϵ_p (mm)
1000	0.008
2000	0.066
3000	0.222
5000	1.027
10000	8.215

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Erro altimétrico (absoluto): $\epsilon_A = A'A - A''A = A'A''$

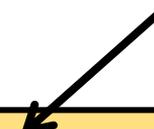
$$R^2 + CA''^2 = (R + \epsilon_A)^2$$

$$R^2 + CA''^2 = R^2 + \epsilon_A^2 + 2R\epsilon_A$$

$$\epsilon_A(\epsilon_A + 2R) = CA''^2$$

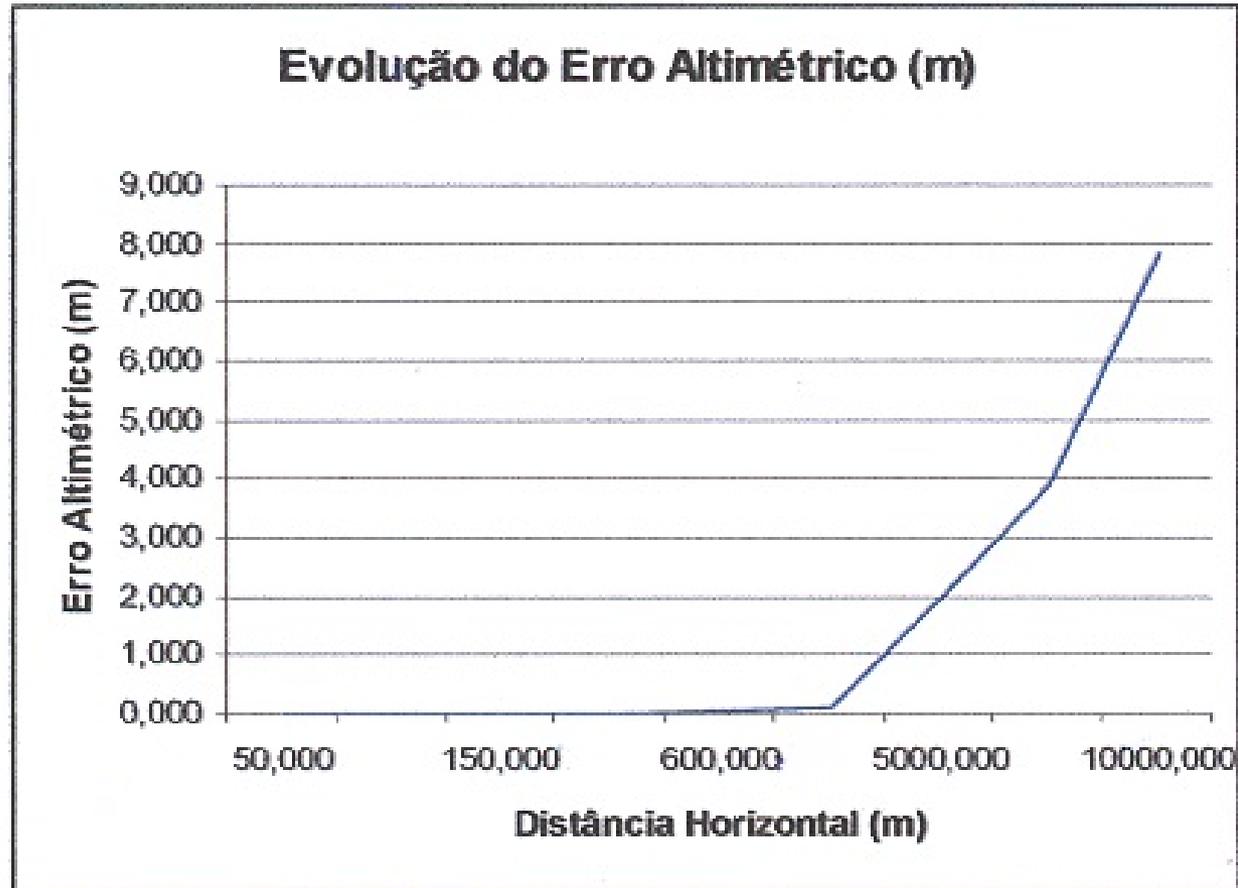
$$\epsilon_A = CA''^2 / (2R + \epsilon_A) \approx CA''^2 / 2R$$

Considerando $R=6371$ km tem-se:



CA'' (m)	ϵ_A (m)
1000	0.078
2000	0.314
3000	0.706
5000	1.962
10000	7.848

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Os valores **absolutos** dos erros podem ter pouco significado. Interessa assim comparar o valor absoluto do erro com a distância respectiva, obtendo o **erro relativo**.

No caso do erro planimétrico relativo, tem-se:

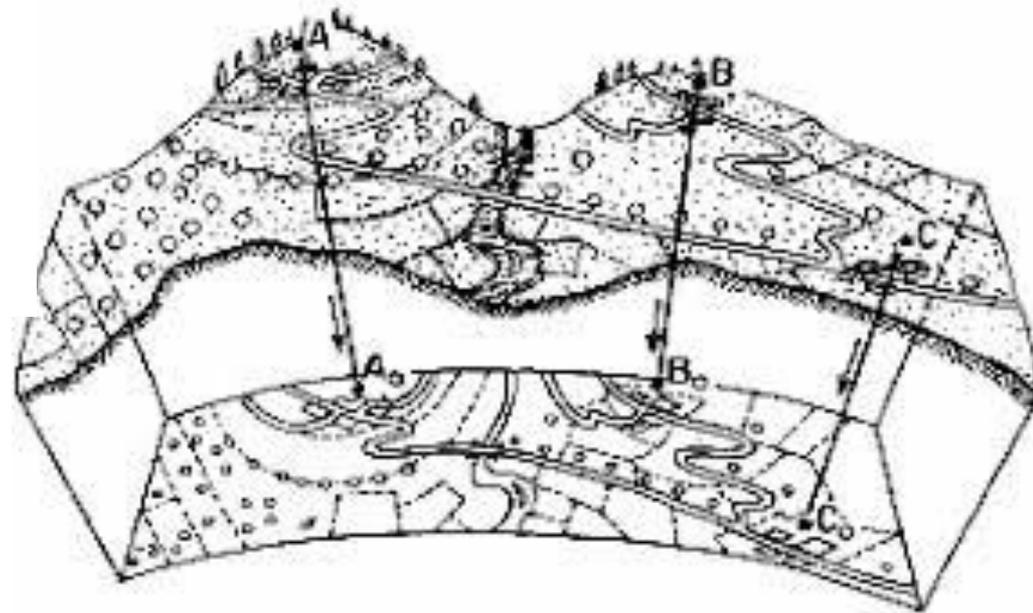
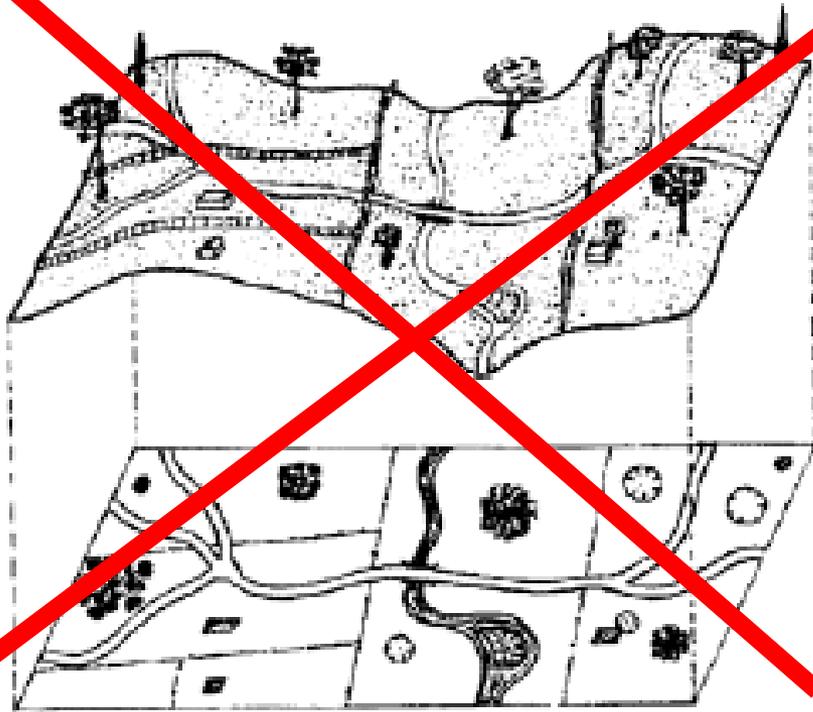
$$\frac{\epsilon_P}{S} = \frac{S^2}{3R^2}.$$

Distância horizontal (m)	Erro absoluto (m)	Distância curva (m)	Erro relativo (1/)
600.000	1.77441E-06	600.000	338140842
1000.000	8.21485E-06	1000.000	121730700
5000.000	0.001026858	4999.999	4869229
10000.000	0.008214842	9999.992	1217308
25000.000	0.128355917	24999.872	194770
50000.000	1.026818866	49998.973	48693
80000.000	4.205607561	79995.794	19021

O limite normalmente aceite para o erro relativo dos levantamentos topográficos planimétricos é igual a **1/50000**.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

E se a zona a representar for de grande extensão ?



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Se a zona a representar for de grande extensão, **não**
se pode desprezar a curvatura terrestre.

É então necessário recorrer à **geodesia**, ciência que se ocupa da determinação da forma e da dimensão do globo terrestre (neste sentido, a topografia é um ramo da geodesia).

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

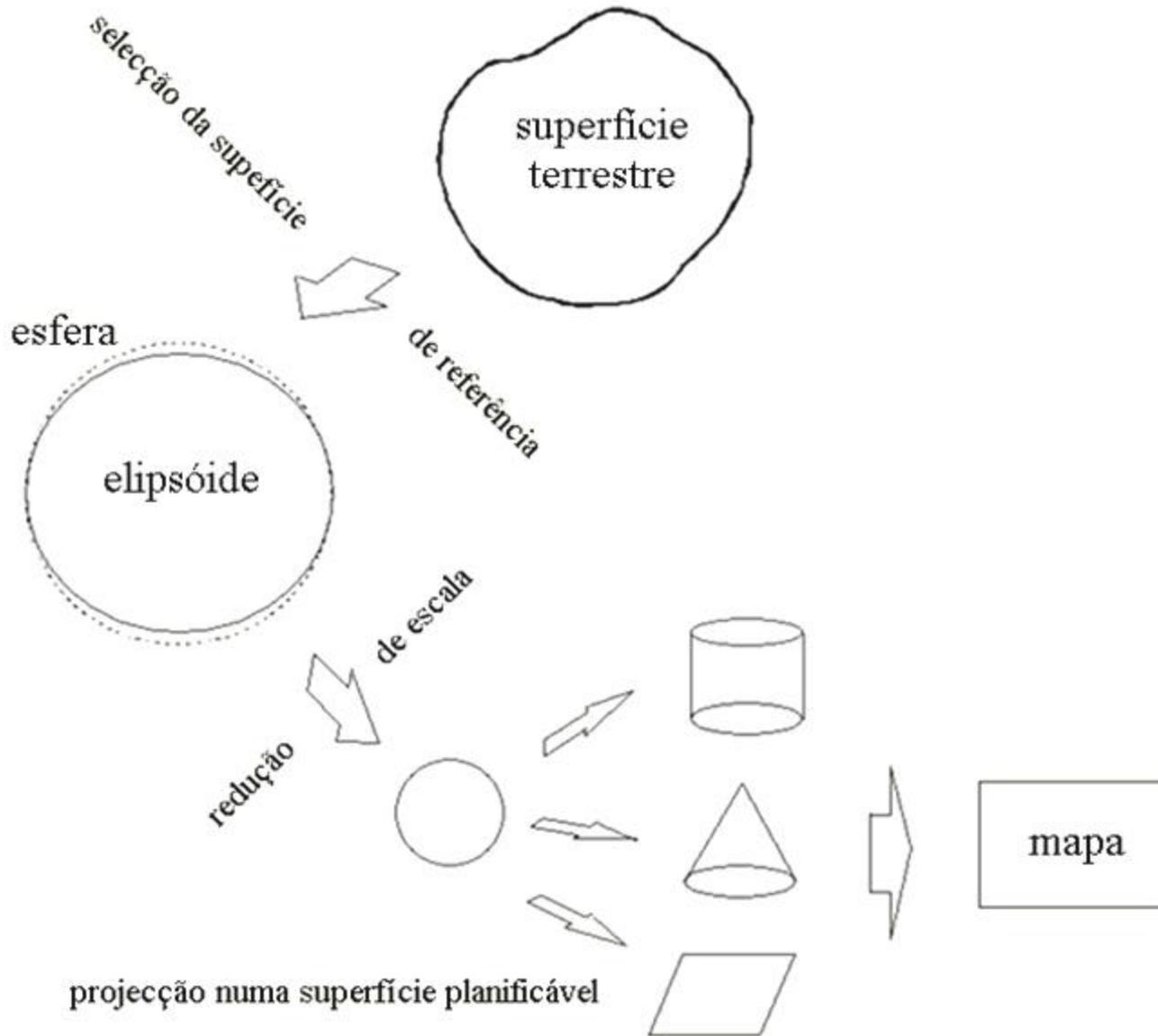
Revisão ...

Nivelamento geométrico ou directo

A altitude não é um conceito puramente geométrico, sem significado físico (a distância de um ponto a outro), pois é definida relativamente ao potencial gravítico.



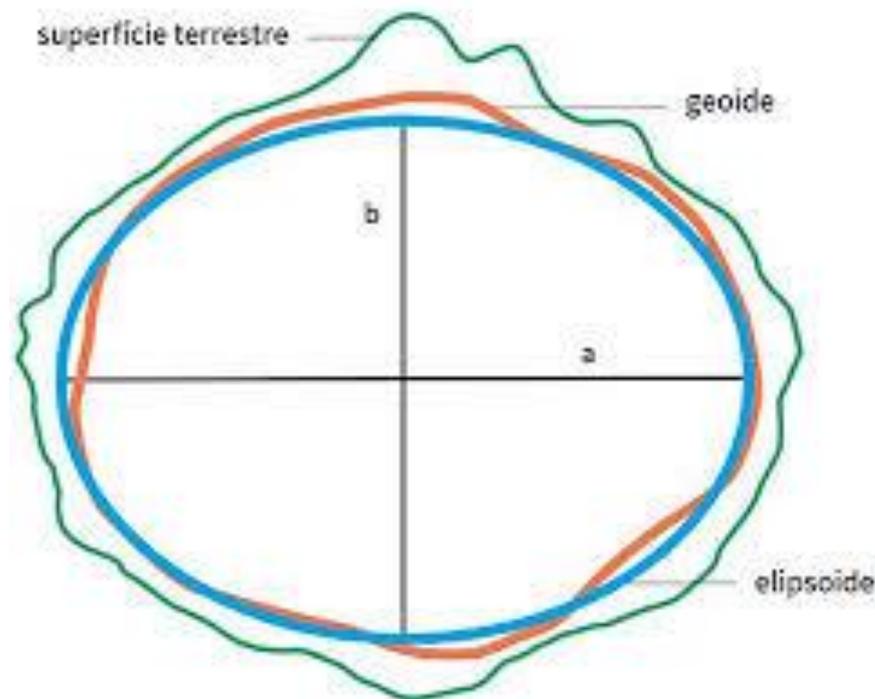
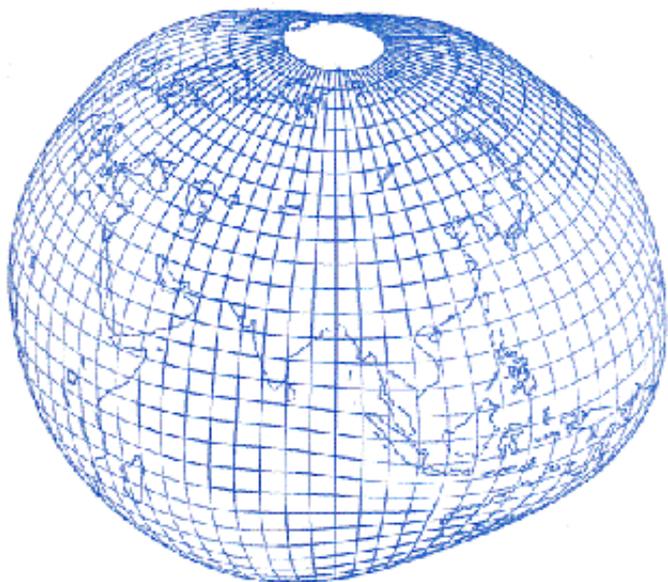
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

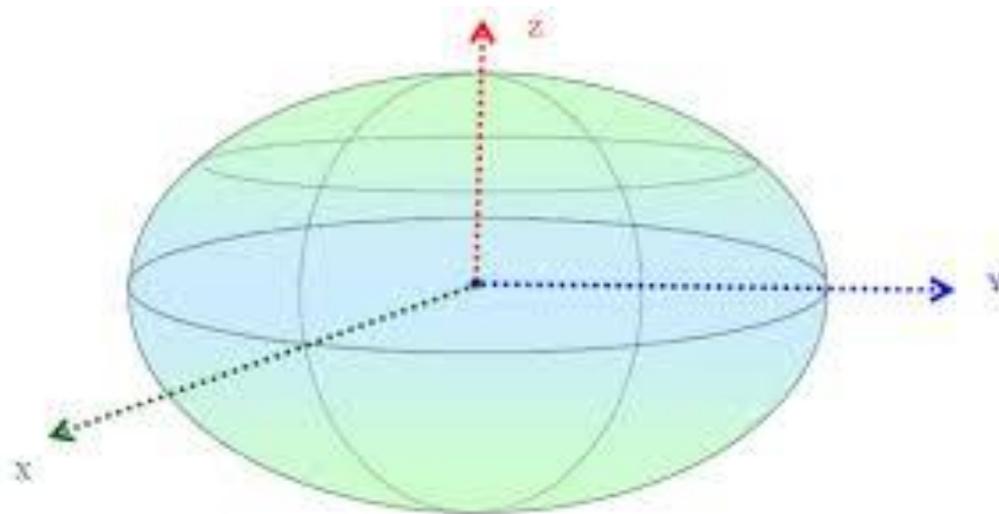
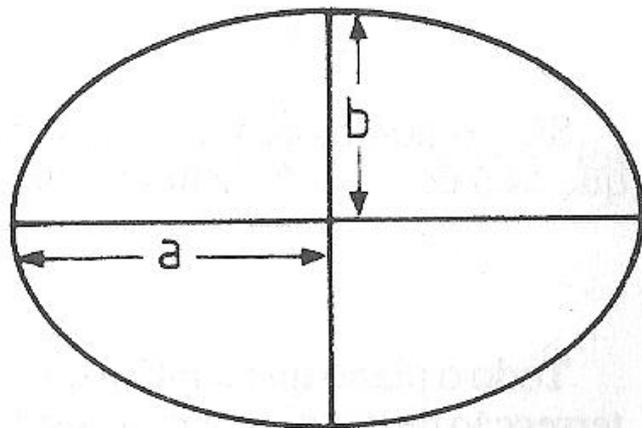
A Terra tem uma forma aproximadamente esférica, designada por **geóide**, superfície perpendicular em todos os seus pontos à direcção da gravidade, materializada pelo fio de prumo (**vertical**).

O geóide coincide com o nível médio das águas do oceano, consideradas em equilíbrio (extrai-se a acção dos ventos, marés e correntes), **não tendo uma representação matemática (analítica)**.



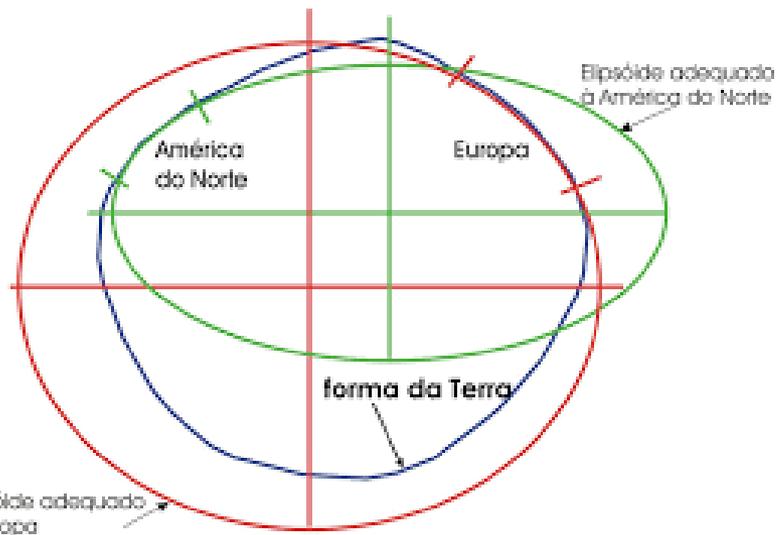
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Por não ter uma representação analítica, substitui-se o geóide por outra figura que tenha uma representação matemática conhecida e cuja forma seja próxima do geóide: um **elipsóide de revolução**, formado por rotação de uma elipse em torno do seu eixo menor:

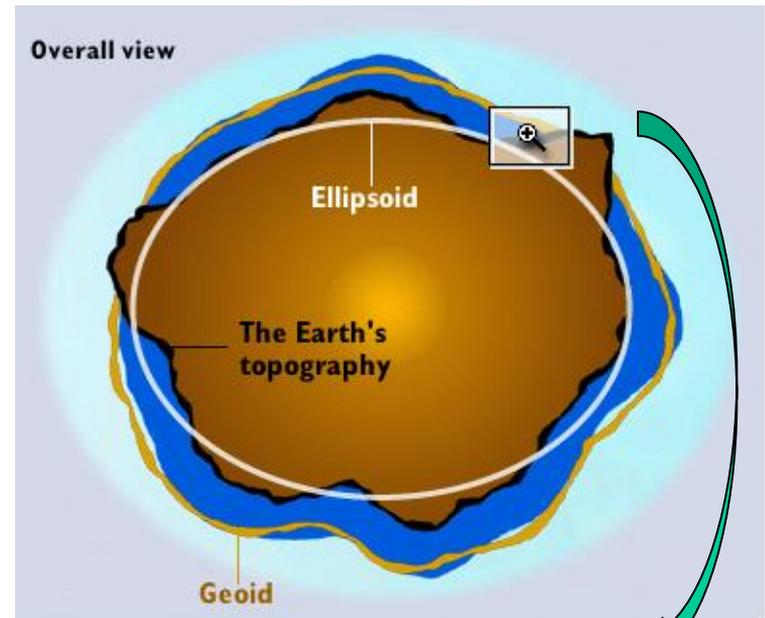


Parâmetros do elipsóide: a , b , $e^2=(a^2-b^2)/a^2$, $f=(a-b)/a$

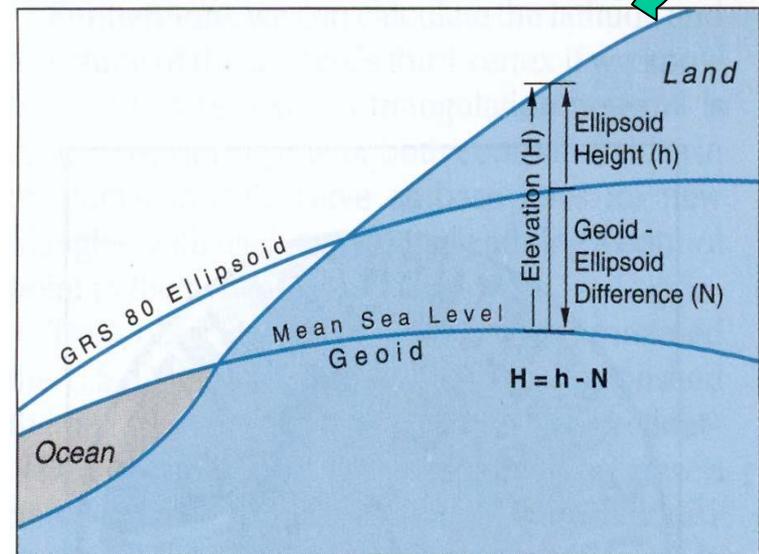
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



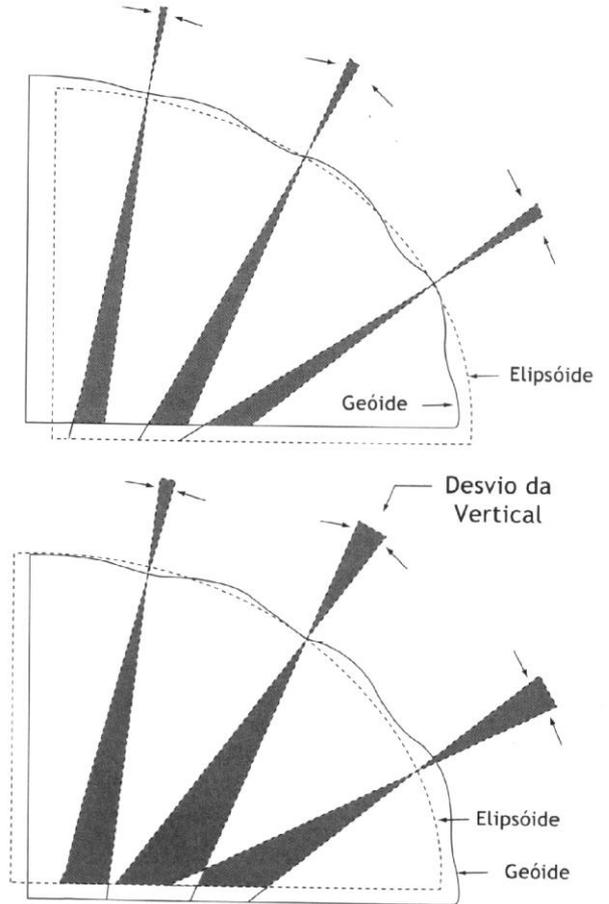
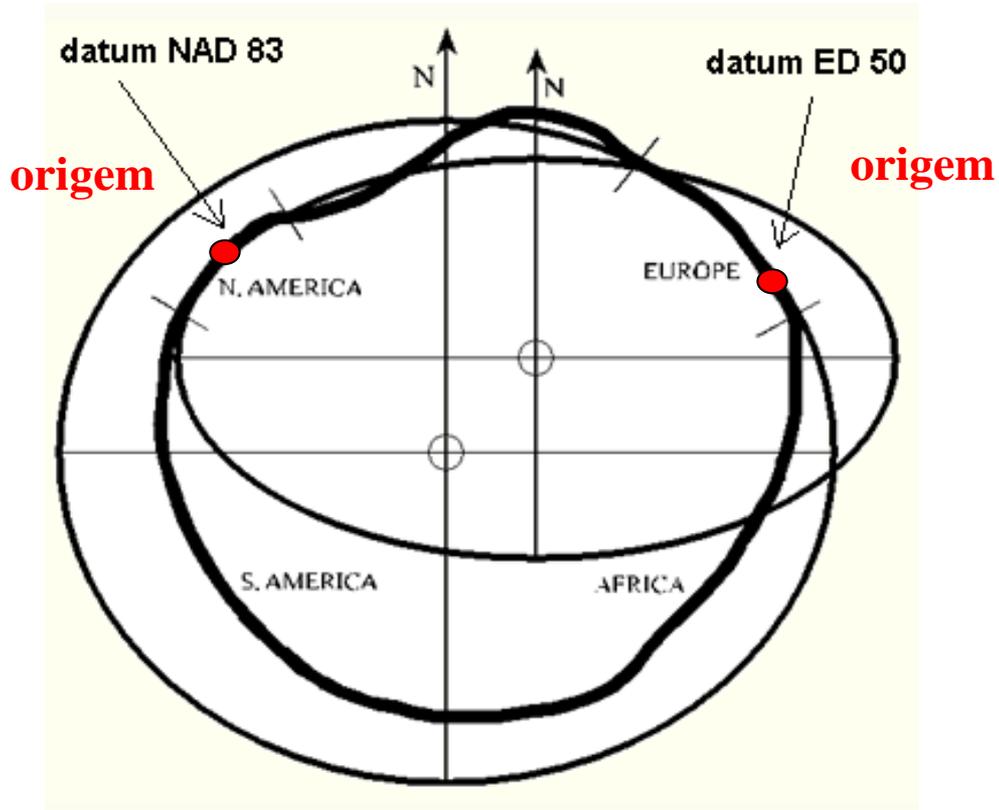
Estabelecimento do datum geodésico



Relação entre a superfície física da Terra, o geóide e o elipsóide



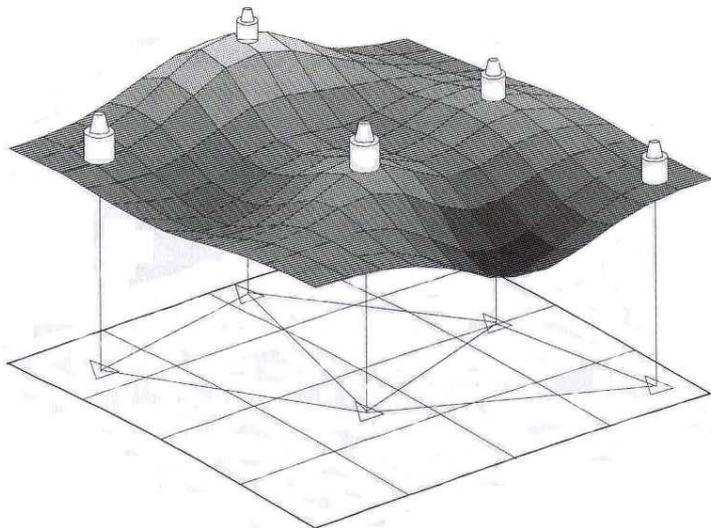
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Posicionamento do elipsóide em relação ao geóide (**datum geodésico**)

(a , e , φ_0 , λ_0 , N_0 , α_0 , η_0 , ζ_0)

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



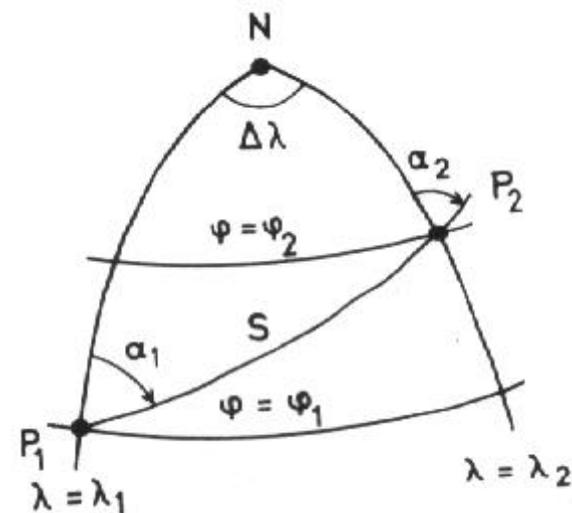
Triangulação de uma rede geodésica no terreno e na superfície de referência.

Redução das observações ao elipsóide

Transporte de coordenadas a partir da origem do datum:

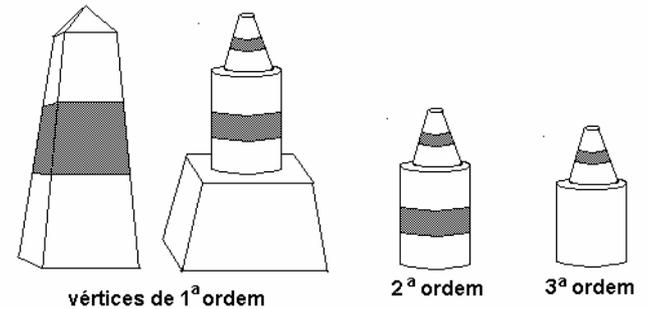
Problema directo: dados (φ_1, λ_1) , S , α_1 determinar (φ_2, λ_2)

Problema inverso: dados (φ_1, λ_1) , (φ_2, λ_2) determinar S , α_1

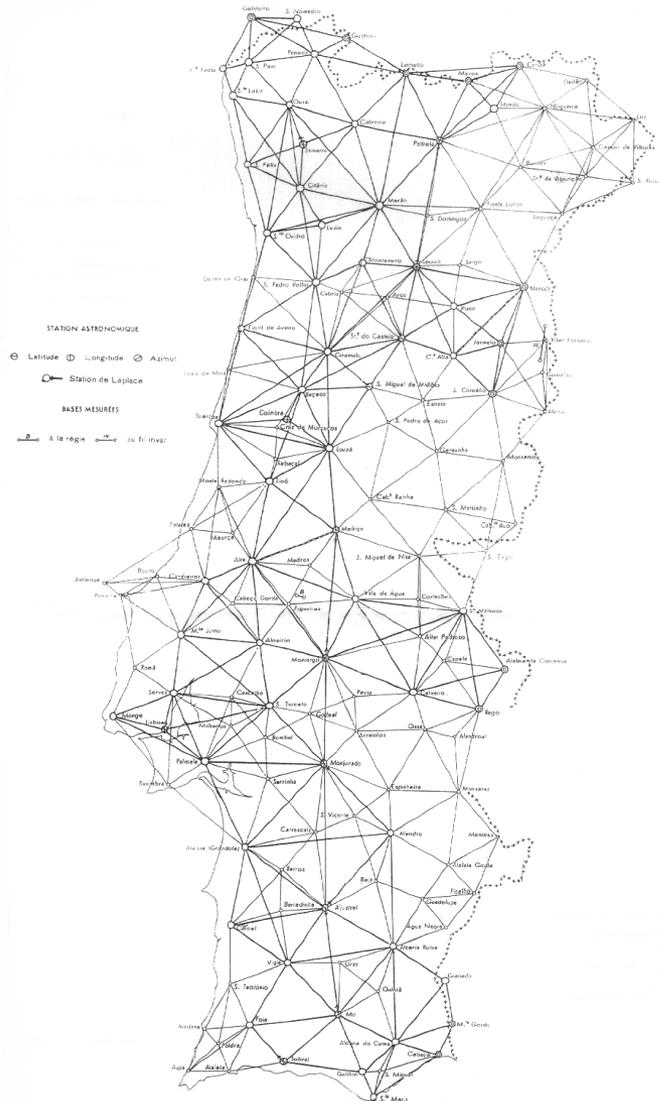


LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Uma **triangulação** é o método geodésico que visa cobrir um território extenso com uma rede de figuras geométricas cuja dimensão é conhecida com precisão, devendo os vértices dessas figuras, em geral triângulos, ser materializados no terreno através de construções estáveis (vértices geodésicos). Para efeitos de implementação de uma rede geodésica, é necessário efectuar **observações angulares e de distância** de forma a relacionar os vértices entre si.



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Numa rede geodésica de **1ª ordem**, onde os vértices estão distanciados de 40 a 60 km uns dos outros, os erros na medição dos ângulos devem estar compreendidos entre **0.3''** e **1.0''** (para tornar estes valores mais claros, $\sin 1'' = 1/206265$, o que equivale a, para uma distância de 206.265 m, um arco de 1 mm, correspondente a um erro relativo de **4.8×10^{-6}**), enquanto que os erros relativos nas distâncias devem ser inferiores a **10^{-6}** (para uma base de 10 km de comprimento, este valor representa um erro de 1 cm).

Rede geodésica de 1ª ordem

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Devido aos erros cometidos na observação das distâncias e dos ângulos, verifica-se uma propagação e acumulação de **erros de escala e de orientação** ao longo da rede; para limitar a influência destes erros, devem evitar-se triângulos obtusos (nenhum ângulo deve ser inferior a 30 graus nem superior a 140 graus), embora o método de controlo mais evidente consiste em estabelecer em diversos locais da rede **novas bases** (possibilitando assim a re-escalagem da rede), assim como **pontos de Laplace** (que permitem comparar as coordenadas astronómicas com as coordenadas geodésicas, possibilitando assim a re-orientação da rede).

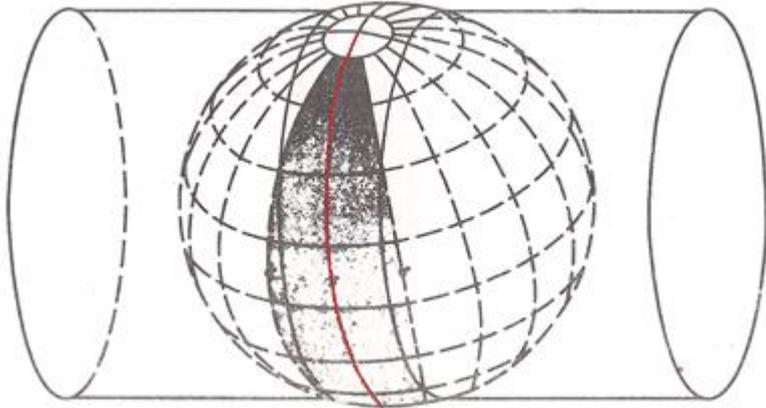
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Projeção de Mercator:

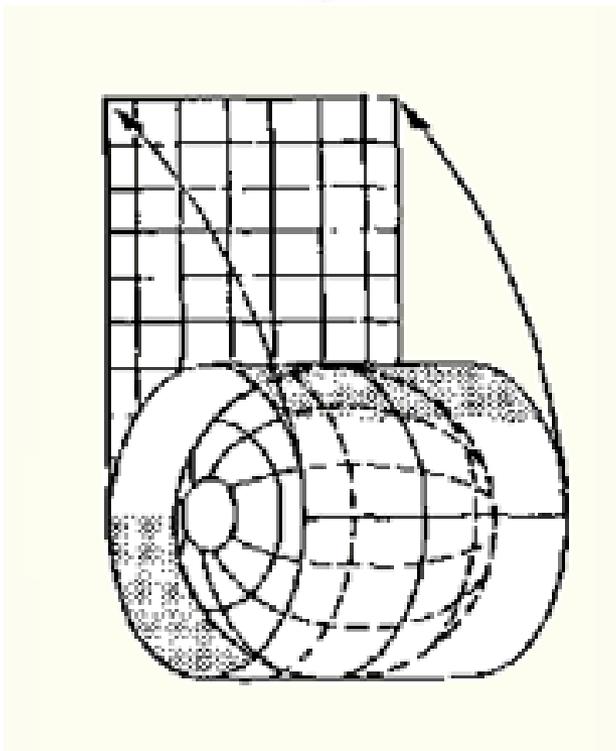
cilindro tangente ao elipsóide no equador
os meridianos são representados como rectas paralelas

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



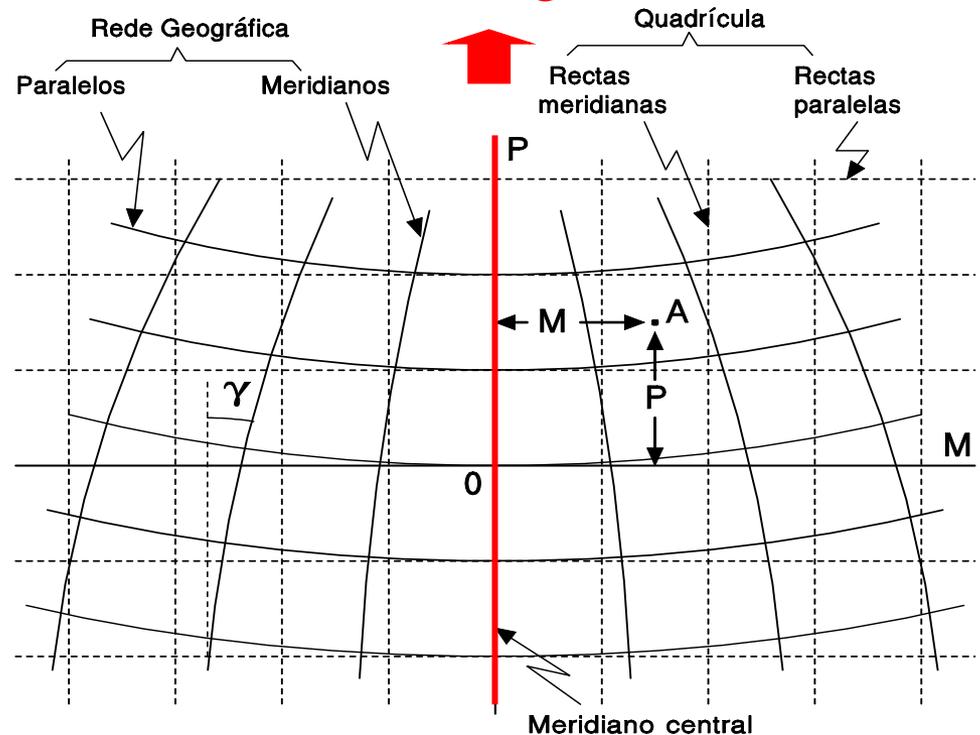
Projeção de Gauss:

cilindro tangente ao elipsóide no **meridiano central**: os restantes meridianos são representados como curvas de curvatura crescente à medida que se afastam do meridiano central



Planificação do cilindro

Norte cartográfico



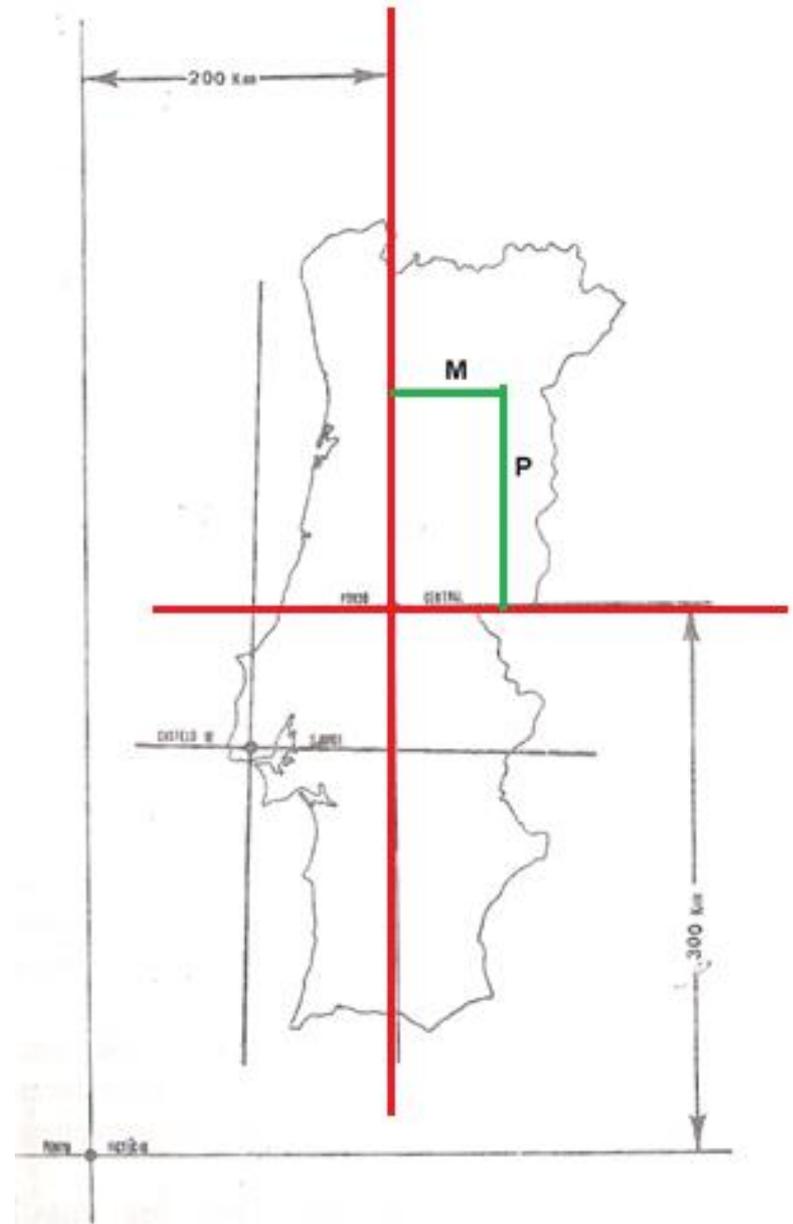
γ = convergência dos meridianos

quadrícula

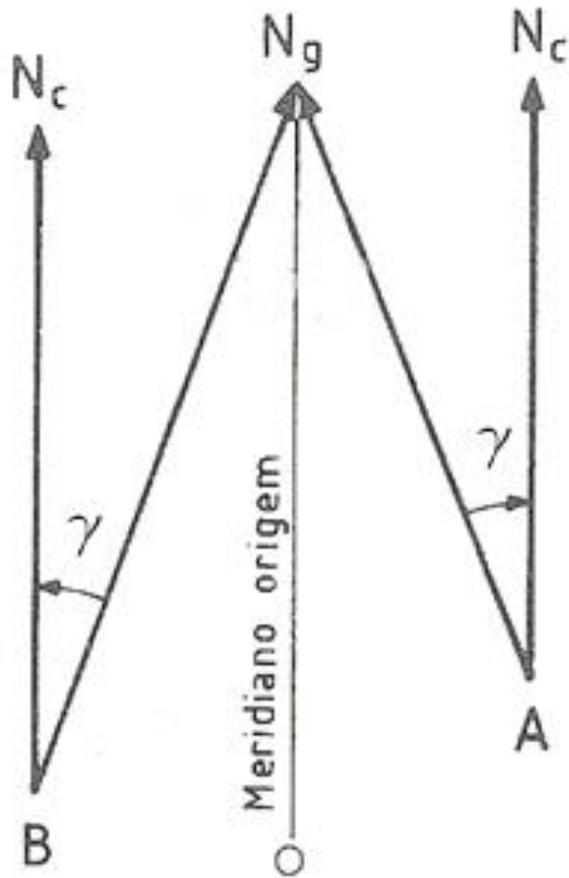
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Projeção de Gauss: a cada ponto (φ, λ) do elipsóide faz corresponder o ponto (M, P) do plano

(M=distância à meridiana, projeção do meridiano central da projeção, P=distância à perpendicular)

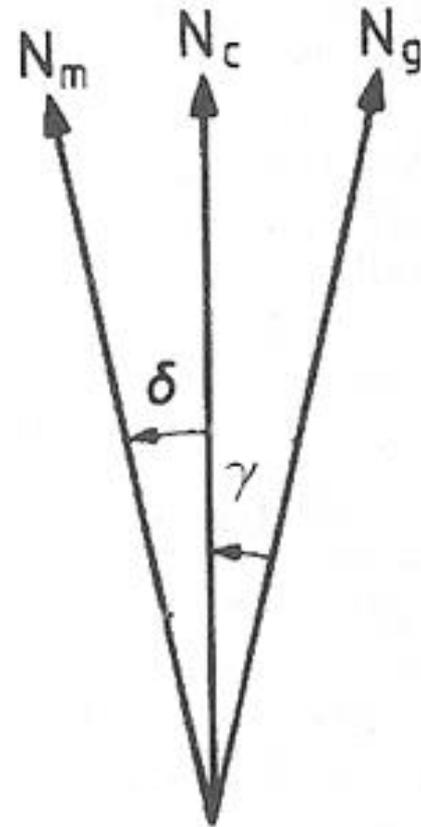


LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Convergência de meridianos γ

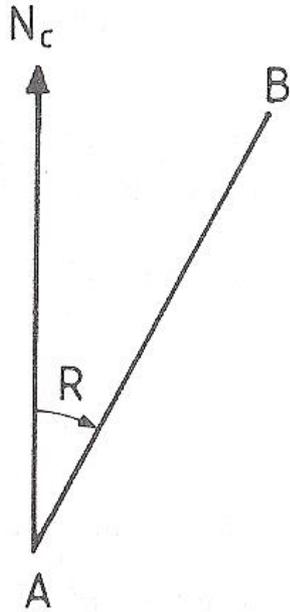
na projecção de Gauss: $\gamma = -(\lambda - \lambda_0) \sin \varphi$



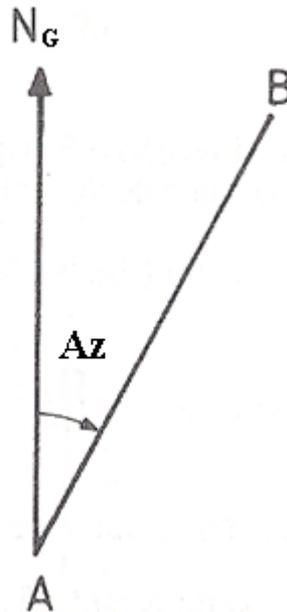
Relação entre os N_C , N_G e N_m

(δ = declinação magnética)

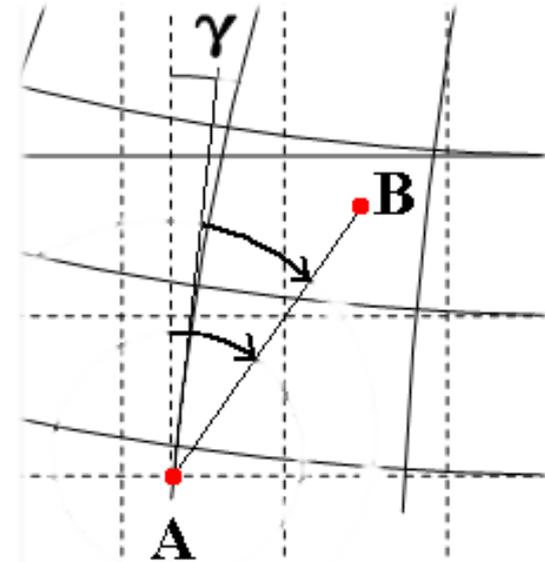
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Rumo de uma direcção

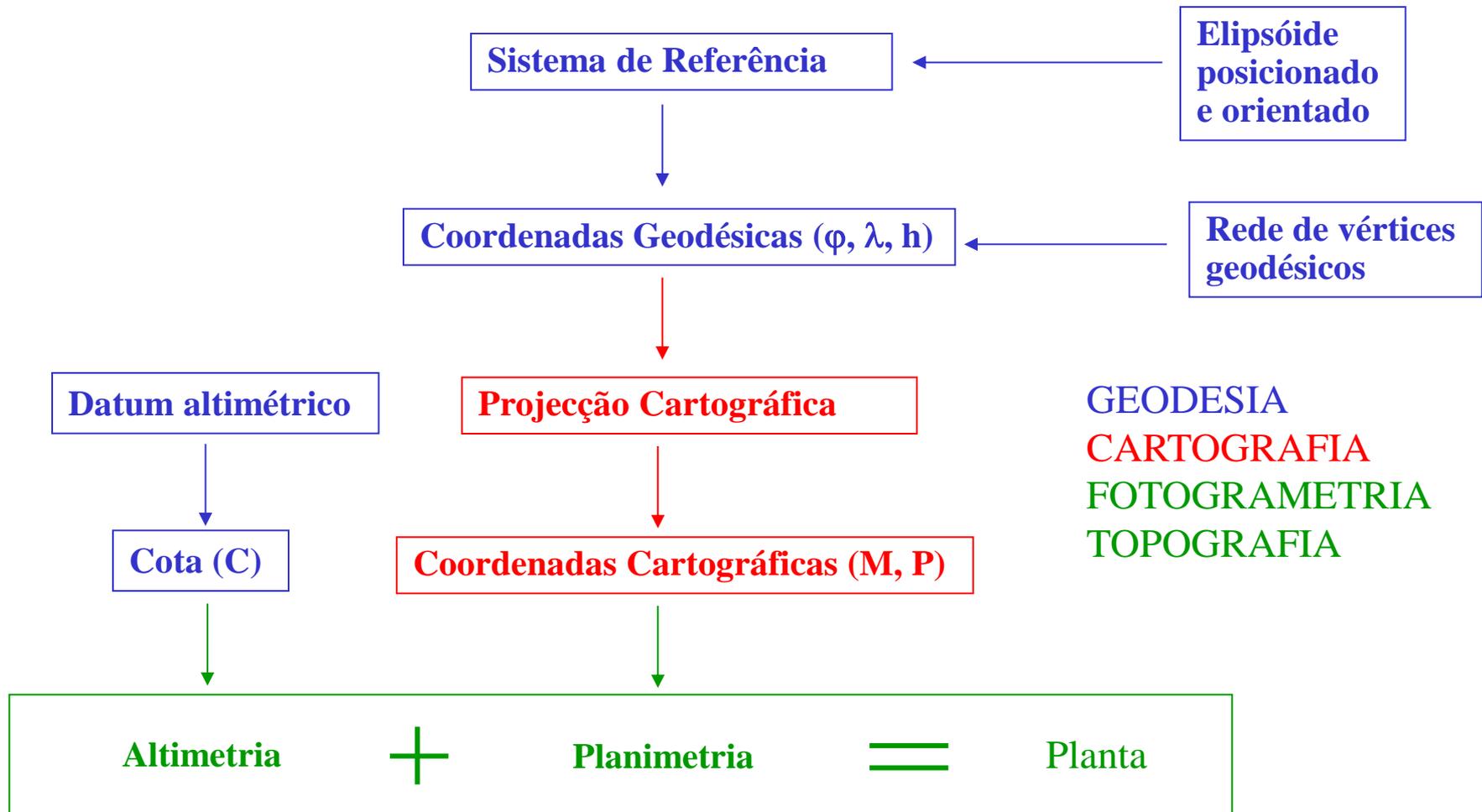


Azimute de uma direcção



$$R_{AB} = Az_{AB} + \gamma_A$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

PT-TM06/ETRS89 - European Terrestrial Reference System 1989

O ETRS89 é um sistema global de referência recomendado pela EUREF (European Reference Frame, subcomissão da IAG - Associação Internacional de Geodesia) estabelecido através de técnicas espaciais de observação. No simpósio da EUREF realizado em Itália em 1990 foi adoptada a seguinte resolução: "A Sub-comissão da IAG para o Referencial Geodésico Europeu (EUREF) recomenda que o sistema a ser adoptado pela EUREF seja coincidente com o ITRS na época de 1989.0 e fixado à parte estável da Placa Euro-Asiática, sendo designado por Sistema de Referência Terrestre Europeu 1989 (European Terrestrial Reference System – ETRS89)".

O estabelecimento do ETRS89 em Portugal Continental foi efectuado com base em campanhas internacionais (realizadas em 1989, 1995 e 1997), que tiveram como objectivo ligar convenientemente a rede portuguesa à rede europeia. Nos anos subsequentes, toda a Rede Geodésica de 1ª e 2ª ordens do Continente foi observada com GPS, tendo o seu ajustamento sido realizado fixando as coordenadas dos pontos estacionados nas anteriores campanhas internacionais.

A agência EuroGeographics recomenda a utilização das seguintes projecções cartográficas: Transversa de Mercator, para escalas superiores a 1/500 000; cónica conforme de Lambert, com dois paralelos de escala conservada, para escalas inferiores a 1/500 000

Desde 2006, para o Território Continental, os parâmetros da projecção Transversa de Mercator referida são os que no quadro abaixo se listam.

Este sistema deverá substituir completamente os anteriormente usados, que se consideram obsoletos.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

PT-TM06/ETRS89 - European Terrestrial Reference System 1989

Elipsóide de referência:	GRS80	Semi-eixo maior: $a = 6\,378\,137\text{ m}$ Achatamento: $f = 1 / 298,257\,222\,101$
Projeção cartográfica:	Transversa de Mercator	
Latitude da origem das coordenadas rectangulares:	$39^{\circ} 40' 05'',73\text{ N}$	
Longitude da origem das coordenadas rectangulares:	$08^{\circ} 07' 59'',19\text{ W}$	
Falsa origem das coordenadas rectangulares:	Em M (distância à Meridiana): 0 m Em P (distância à Perpendicular): 0 m	
Coeficiente de redução de escala no meridiano central:	1,0	

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Fim da revisão ...

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Para se obter as coordenadas (M, P, C) é necessário recorrer a um conjunto de pontos de referência - vértices geodésicos, com coordenadas conhecidas.

Redes

- Geodésicas e topográficas (vértices)

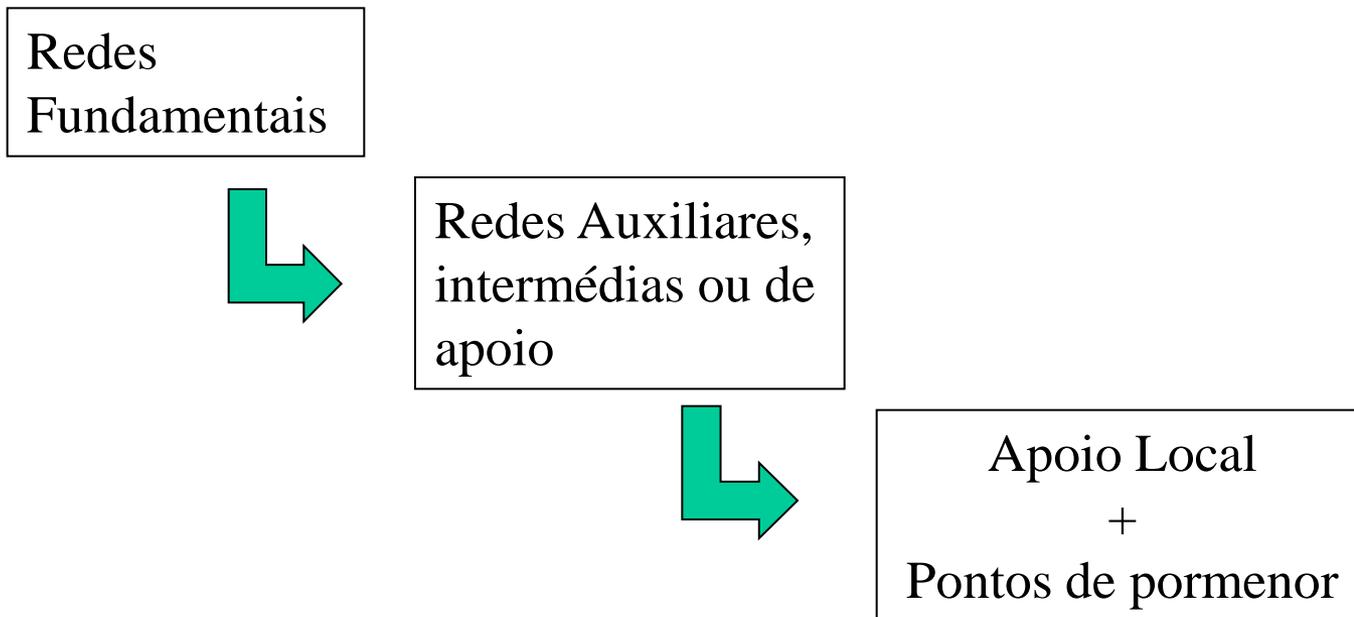
- Nivelamento geométrico (marcas)

Sistema de Referência Topográfico \equiv **Plano Cartográfico**

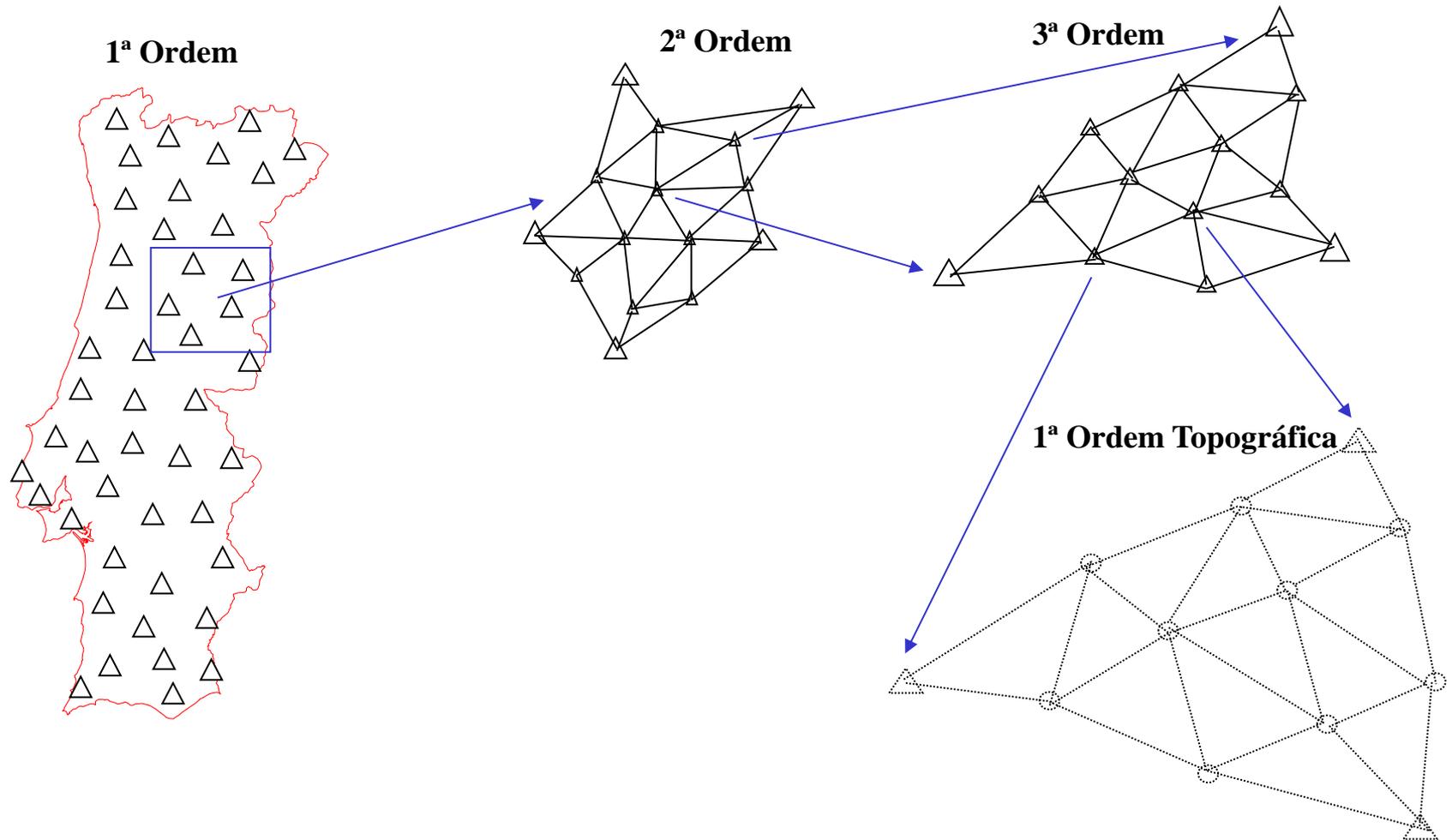
Referencial topográfico \equiv **Rede Geodésica**

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Adensamento: processo que permite obter um levantamento perfeitamente referenciado e enquadrado em qualquer sistema cartográfico.



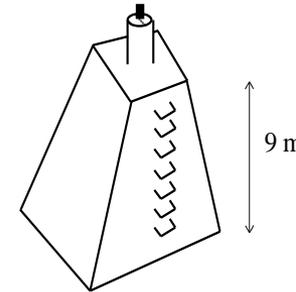
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

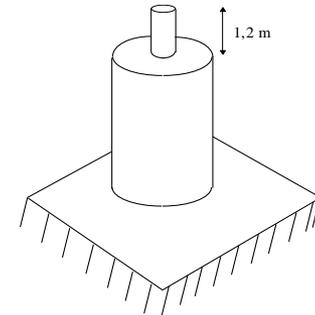
1ª Ordem geodésica

- Cobertura geral do Território
- Lados de 30-40 km
- Torres encimadas por pilares



2ª Ordem geodésica

- Adensamento intermédio
- Lados de 10-20 km
- Pilares circulares ou marcos ("Bolembreanas")
- moinhos, depósitos de água e terraços, etc



3ª Ordem geodésica

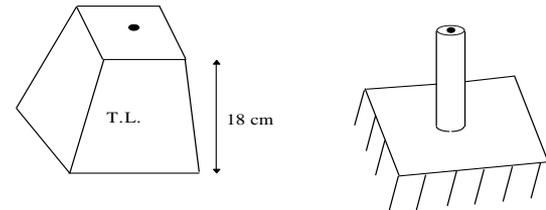
- Adensamento local
- Lados de 4-5 km (ev. 10 km)
- Bolembreanas
- torres de igrejas, antenas, etc.

Cada triângulo é suficientemente pequeno para que no seu interior a superfície terrestre possa ser considerada plana.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

1ª Ordem cadastral

- Adensamento topográfico
- Lados de 1,5 a 2 km
- pequenos marcos ao nível do solo ou sobre construções (torres de igrejas, antenas, etc.)



2ª Ordem cadastral

- Lados de 0,5 a 1,5 km;
- marcos provisórios, ou estaca ou marcas cravadas no solo.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Redes Geodésicas	{	- marcos geodésicos - elementos proeminentes em construções; - marcos ao nível do solo;
Apoio local	{	- marcas provisórias no solo; - pontos notáveis do terreno ou de estacionamento momentâneo (sem sinalização específica)

Esqueleto do Levantamento:

- pontos de apoio existentes;
- materialização de novos pontos de apoio;
- definição de visadas

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O Levantamento Topográfico consiste nas seguintes operações de campo:

- 1 – Reconhecimento, escolha, implementação da rede local**
- 2 – Ligação da rede local à rede geodésica**
- 3 – Levantamento de pormenor apoiado na rede local**
- 4 – Elaboração da Planta – desenho gráfico num CAD**

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O objectivo desta disciplina é a aprendizagem de **métodos e técnicas de aquisição de dados** que possibilitem a determinação das **coordenadas cartográficas** de um conjunto de pontos que **representem geometricamente uma parcela** da superfície do terreno, com rigor e aproximação adequados.

**Representação
Geométrica do
Terreno**

⇒

- Determinação das coordenadas cartográficas (M,P) dos elementos sobre a superfície
- Determinação do relevo da superfície através da coordenada altimétrica $C=C(M,P)$ de um conjunto representativo de pontos

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Os trabalhos topográficos dividem-se em **levantamentos** e **implantações** (piquetagens).

Os levantamentos consistem na recolha no terreno dos elementos necessários à elaboração dos modelos desse terreno.

As implantações consistem na materialização, sobre o terreno, das representações esquemáticas projectadas previamente sobre os modelos.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Método topográficos: áreas pequenas e **escalas grandes** ($\geq 1/500$); método clássico que recorre à medição “directa” no terreno usando os instrumento topográficos (teodolito, distanciómetro, níveis e GPS).

Método fotogramétrico: áreas grandes e **escalas pequenas** ($< 1/500$); método remoto que recorre à medição indirecta sobre modelos fotográficos adquiridos por avião (necessita de Pontos Fotogramétricos coordenados pela Topografia).

Factores que influenciam a escolha: economia, tempo e recursos (relação custo/benefício;)

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Escala é a relação constante entre a dimensão ℓ de um modelo (levantamento topográfico) e a dimensão correspondente L do objecto representado por esse modelo. Usualmente representa-se a escala por uma fracção com numerador igual à unidade,

$$E = \frac{\ell}{L} = \frac{1}{\frac{L}{\ell}} = \frac{1}{M}$$

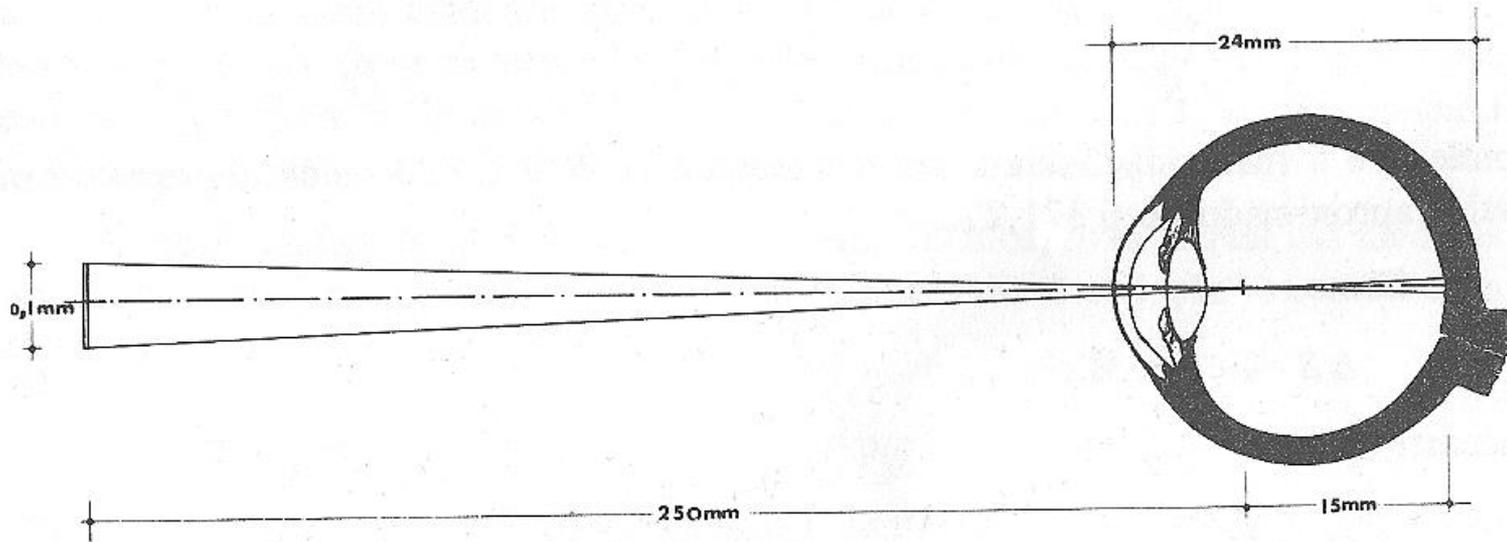
onde M é o **módulo** da escala.

Uma escala é tanto maior quanto menor for o seu módulo

(ex: 1/500 é uma escala grande, 1/100000 é uma escala pequena)

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O diâmetro médio dos elementos sensíveis da retina é da ordem de 4.5 micron, que corresponde a um **poder separador** do olho humano de aproximadamente 1'; este ângulo, à distância de 25 cm corresponde a um círculo de 0.1 mm de diâmetro.

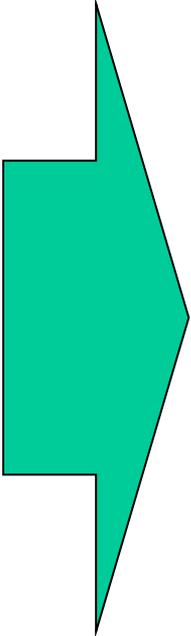


LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O erro de graficismo define-se como o raio do menor círculo no interior do qual se pode distintamente marcar um ponto (isto é, admite-se que um ser humano não distingue um segmento de um ponto se este tiver um comprimento igual ou menor a **0.1 mm**, valor que corresponde ao limite da percepção visual).
Depende da acuidade visual e da habilidade do desenhador, assim como dos recursos técnicos de que dispõe.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Da definição de limite de percepção visual decorre que o erro de graficismo ϵ_g é independente da escala (**valor fixo**); qualquer medição de comprimento efectuada numa representação cartográfica tem associado um erro absoluto de ± 0.1 mm.



Como consequência, toda a distância ou pormenor do terreno cuja dimensão reduzida à escala seja igual ou menor ao erro de graficismo ou **não é representada** ou **é representada com simbologia convencional**.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Exemplo: que **distâncias** entre pontos no terreno são desprezáveis se a escala da carta for **E=1/500**?

Convertendo o erro de graficismo para a distância correspondente no terreno, tem-se:

$$E = \frac{\ell}{L} = \frac{1}{\frac{L}{\ell}} = \frac{1}{M} \Rightarrow L = \ell \times M = 0.1 \text{ mm} \times 500 = 50 \text{ mm} = 0.05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$$

e se a escala da carta for **1/2000**?

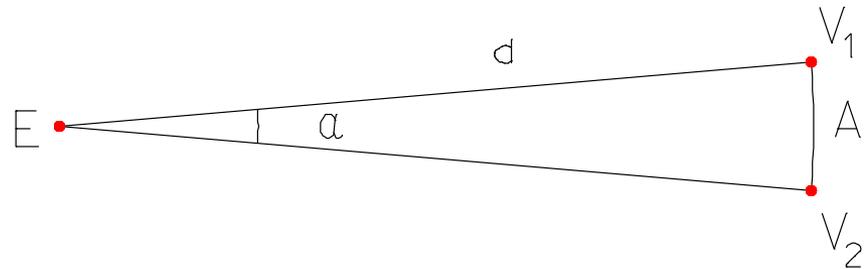
$$E = \frac{\ell}{L} = \frac{1}{\frac{L}{\ell}} = \frac{1}{M} \Rightarrow L = \ell \times M = 0.1 \text{ mm} \times 2000 = 200 \text{ mm} = 0.20 \text{ m} = 20 \text{ cm}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Exemplo: que **ângulos** subtendidos entre pontos no terreno são desprezáveis se a escala da carta for **$E=1/M$** ?

Neste caso é necessário considerar a **distância d** entre o ponto estação E e os pontos visados V_1 e V_2 pois para um mesmo ângulo α o comprimento do arco A subtendido depende de d, podendo estabelecer-se a relação:

$$\frac{2\pi \times d}{A} = \frac{360^\circ}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{360^\circ}{2\pi} \frac{A}{d}$$



Como A deve ser maior que 0.1 mm, sendo D a distância no terreno entre o ponto estação e os pontos visados, tal que $d=D/M$, tem-se:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{2\pi} \frac{0.0001 \text{ m} \times M}{D} = 0.005729 \times \frac{M}{D}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Se o comprimento dos lados for igual a **10 m** e se $E=1/500$, tem-se:

$$\alpha = 0.005729 \times \frac{M}{D} = 0.005729 \times \frac{500}{10} = 0.28654^\circ$$

Para a mesma escala, se o comprimento dos lados for igual a **100 m**, tem-se

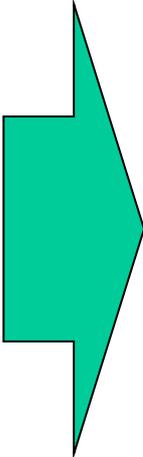
$$\alpha = 0.005729 \times \frac{M}{D} = 0.005729 \times \frac{500}{100} = 0.028654^\circ$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Designa-se **erro tolerável (ou tolerância)** ε_t para a escala E como sendo a menor distância do terreno que pode ser medida sobre a planta,

$$\varepsilon_t = \varepsilon_g \cdot M$$

Quanto maior é o erro tolerável de uma escala, menor é a sua precisão e como ε_t é proporcional a M, pode dizer-se que **uma escala é tanto mais precisa quanto menor for M.**



A escala seleccionada para representar uma dada zona deve ser tal que **a incerteza do levantamento não apareça na planta**, ou seja, o erro tolerável deve ser maior do que a incerteza do levantamento (**devido aos erros cometidos nas observações, que dependem em grande parte dos aparelhos utilizados**).

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Fixada a escala do levantamento:

1. calcula-se a menor dimensão no terreno representável a essa escala, ficando igualmente **implícita a precisão** com que o levantamento deve ser efectuado, de tal forma que a incerteza associada à posição de cada ponto seja inferior ao erro tolerável.
2. a precisão do **equipamento** adoptado para realizar o levantamento tem que ser **compatível** com a precisão pretendida para as coordenadas.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Um levantamento efectuado com equipamento cuja precisão seja maior (incerteza menor) do que o erro tolerável designa-se por **levantamento regular**.

Sendo a carta regular, é lícito inferir que um comprimento $(l \pm \epsilon_g)$ medido sobre a carta corresponde a um comprimento $(l \pm \epsilon_g) \cdot M$ no terreno.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

De $\varepsilon_p \leq \varepsilon_g \cdot M \Rightarrow M \geq \varepsilon_p / \varepsilon_g$ ou $M \geq S^3 / 3R^2\varepsilon_g$, de onde se obtém a **maior distância representável sem deformação** para a escala de módulo M:

$$S = \sqrt[3]{3R^2\varepsilon_g M}$$

E = 1/500	E = 1/1000	E = 1/2000
S < 18260 m	S < 23006 m	S < 28986 m

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$$\varepsilon_L \leq \varepsilon_t = \varepsilon_g \cdot M$$

$$\text{Exemplos } (\varepsilon_g = 0.1\text{mm}) \left\{ \begin{array}{l} M=1000; \varepsilon_L \leq 10\text{cm} \\ M=500; \varepsilon_L \leq 5\text{cm} \\ M=250; \varepsilon_L \leq 2.5\text{cm} \end{array} \right.$$

O limite imposto pelo erro tolerável do levantamento obriga a uma escolha adequada do equipamento.

Crítérios:

$$1) \quad \varepsilon_L = 2.6 \cdot \sigma_D \quad , \text{ com } \sigma_D^2 = p^2 + D^2 q^2 \quad \text{ou} \quad \varepsilon_L = 2.6 \cdot \sigma_\alpha^{\text{rad}} \cdot D$$

$$2) \quad \varepsilon_L = \max \{ \sigma_{M_i}, \sigma_{P_i} \}$$

Em 1), no caso de $E=1/500$, tem-se:

$$\varepsilon_L \leq 5\text{cm} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_D \leq 5\text{ cm} / 2.6 = 1.9\text{ cm} \\ \sigma_\alpha \leq 5\text{ cm} / 2.6 D; \text{ para } D = 100\text{ m tem-se } \sigma_\alpha = \frac{5\text{ cm}}{2.6 \times 100\text{ m}} \frac{180}{\pi} \times 3600 = 40'' \end{array} \right.$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Instrumentos

- Receptores GPS;
- Níveis;
- Teodolitos ou goniómetros;
- Distanciómetros e taqueómetros;
- Estações totais;

Acessórios

- Tripés;
- Alvos, reflectores e prismas;
- Bastões ou varas de pontaria;
- Réguas ou miras;
- Bases de centragem;
- Nivelas tóricas e circulares;
- Fitas métricas;
- Sapatas
- Etc.

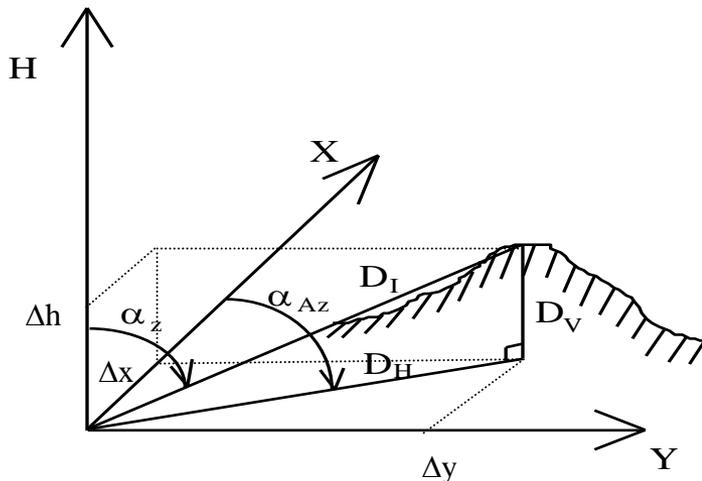
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Os aparelhos destinados à medição de **ângulos (mais exactamente direcções)** têm o nome genérico de goniómetros.

Em topografia apenas se consideram ângulos medidos em dois planos: **horizontal ou azimutal** nas operações planimétricas e **vertical** nas operações altimétricas.

Na avaliação de ângulos devem distinguir-se duas espécies:

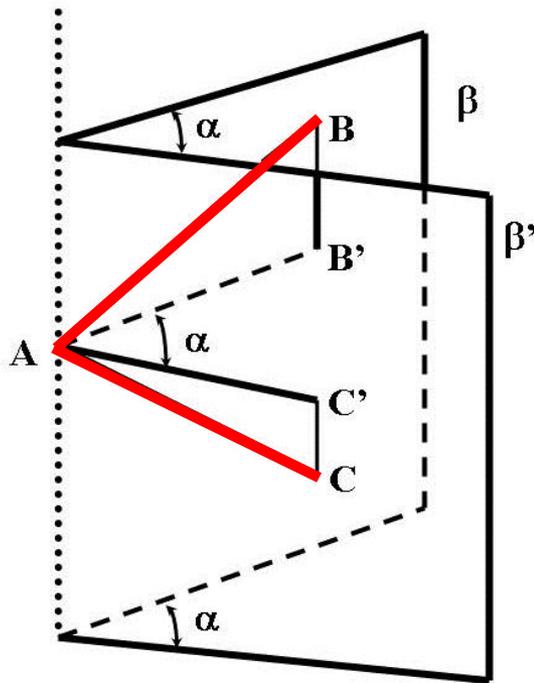
- ângulo entre **duas direcções quaisquer**
- ângulo entre **uma direcção de referência e uma direcção qualquer**



- { Teodolitos ou goniómetros (**Norte cartográfico**)
- { Bússolas (**Norte magnético**)
- { Giroscópios (**Norte geográfico**)

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Vertical do lugar



α é o ângulo diedro entre os dois planos verticais.

o ângulo horizontal contido entre as duas direções AB e AC que pertencem aos planos β e β' , coincide com o ângulo α diedro entre os dois planos.

Ângulo horizontal ou azimutal α de duas direcções que passam por um ponto A (materializadas pelas visadas AB e AC) é o rectilíneo do diedro formado pelos planos verticais que contêm essas direcções, ou seja, o ângulo das projecções dessas direcções sobre o plano horizontal.

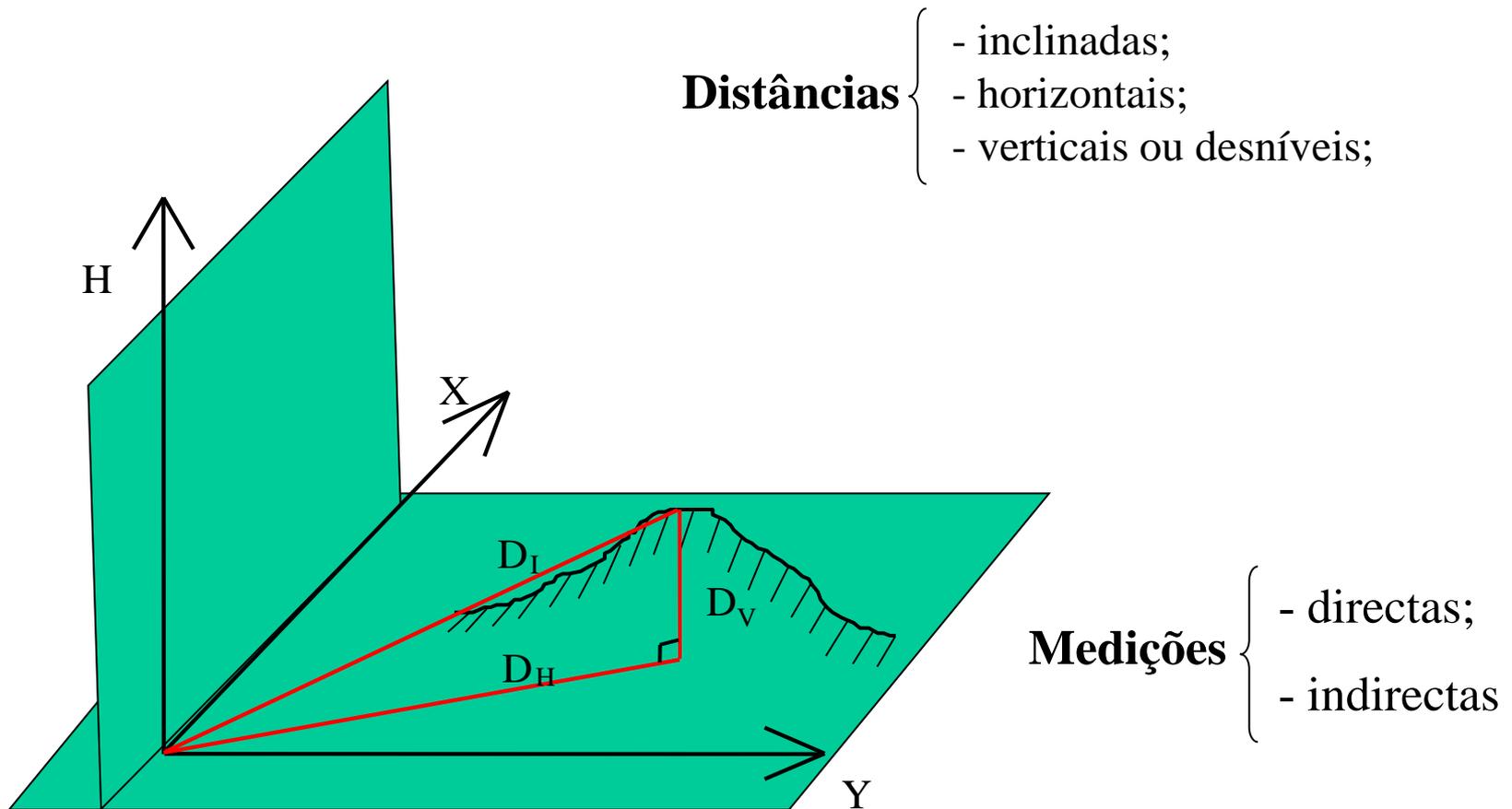
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Os ângulos verticais podem classificar-se como:

- ângulos de **inclinação**, em que a direcção de referência ou origem das leituras é o plano horizontal
- ângulos **zenitais**, em que a direcção de referência ou origem das leituras é a vertical para o zénite
- ângulos **nadirais**, em que a direcção de referência ou origem das leituras é a vertical para o nadir

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

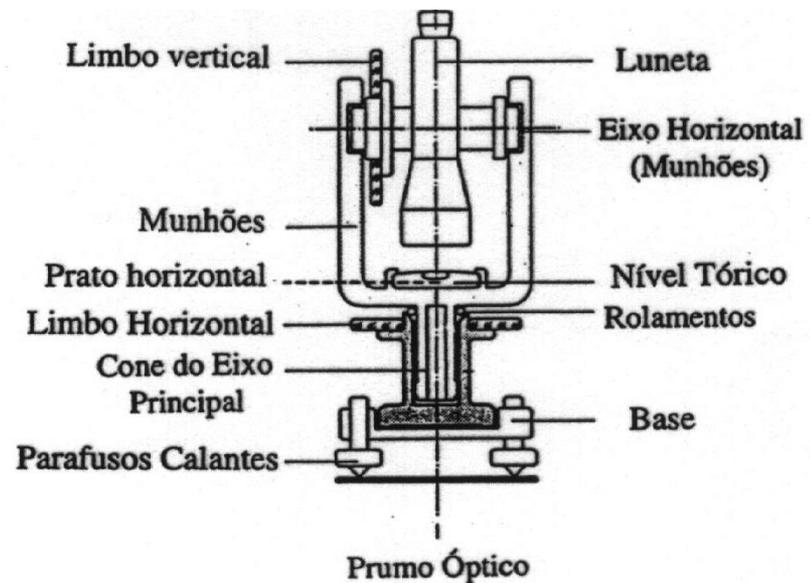
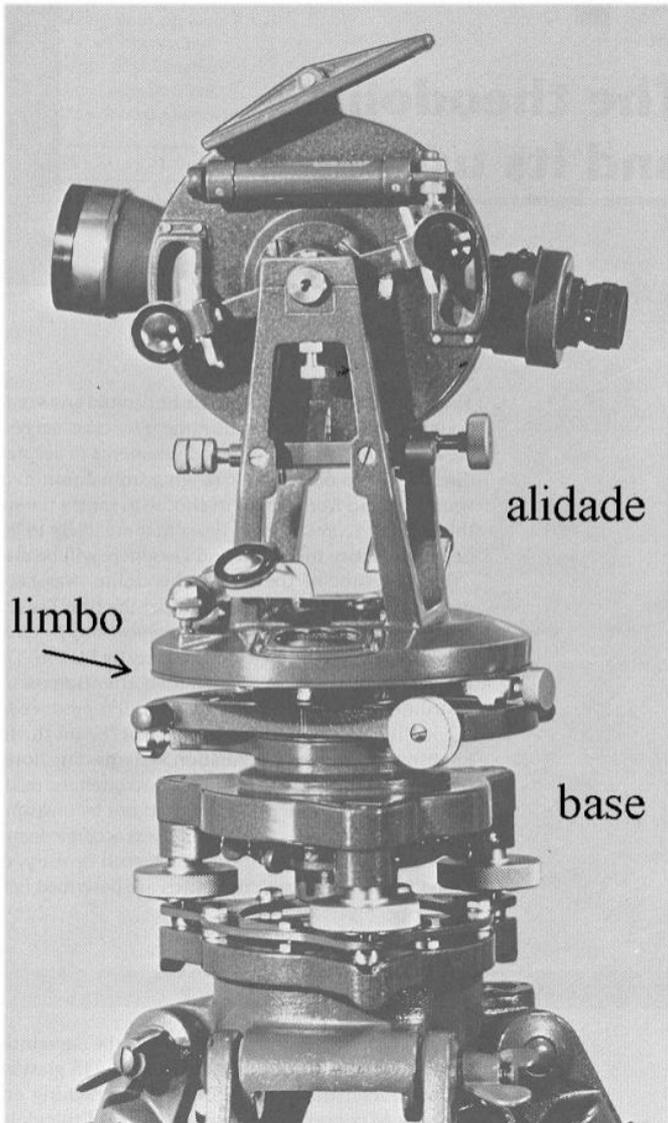
Os aparelhos destinados à medição de **distâncias** têm o nome genérico de taqueómetros ou distanciómetros.



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

As 3 peças fundamentais em que um instrumento se pode decompor são:

1. Base
2. Limbo
3. Alidade

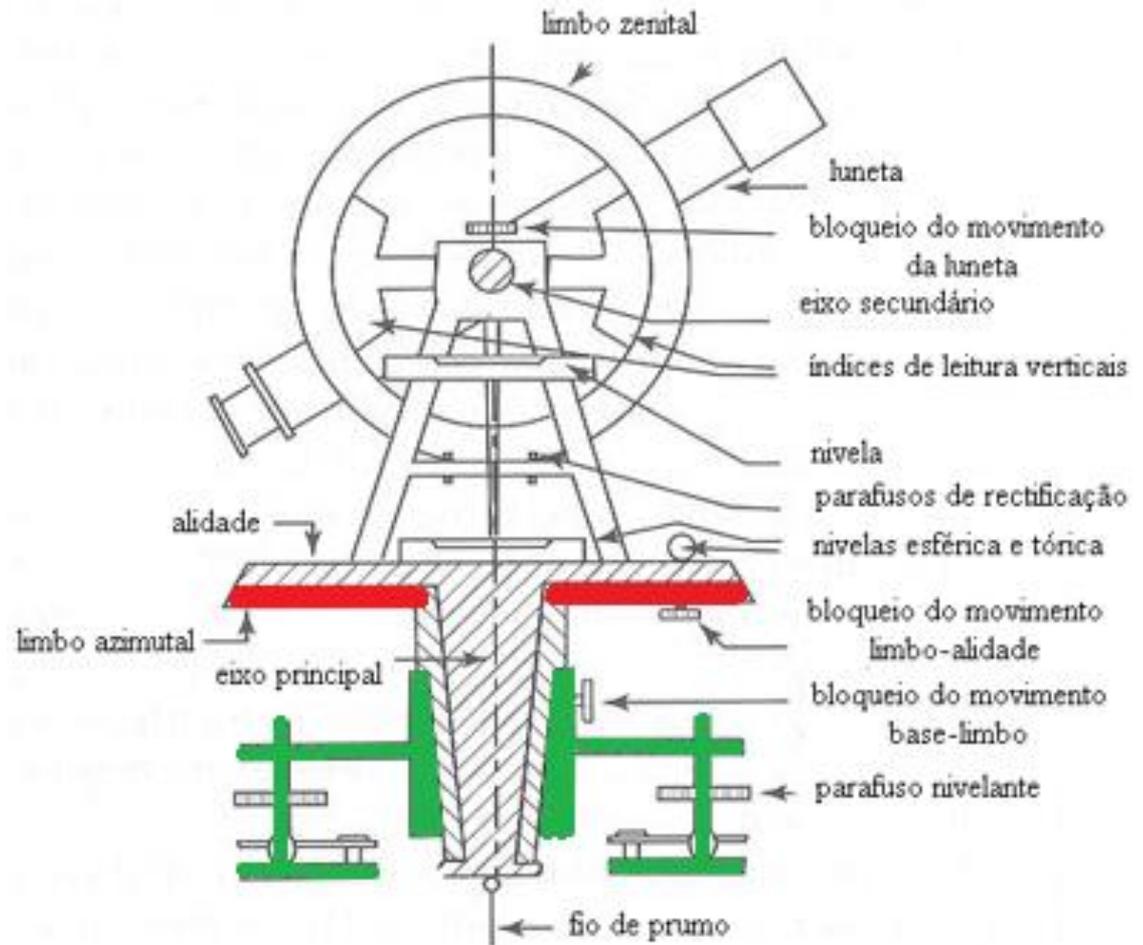
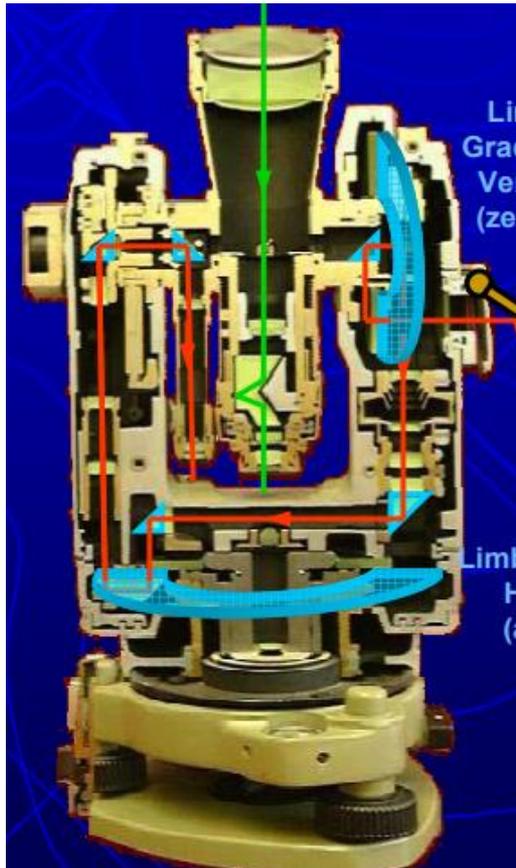


LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



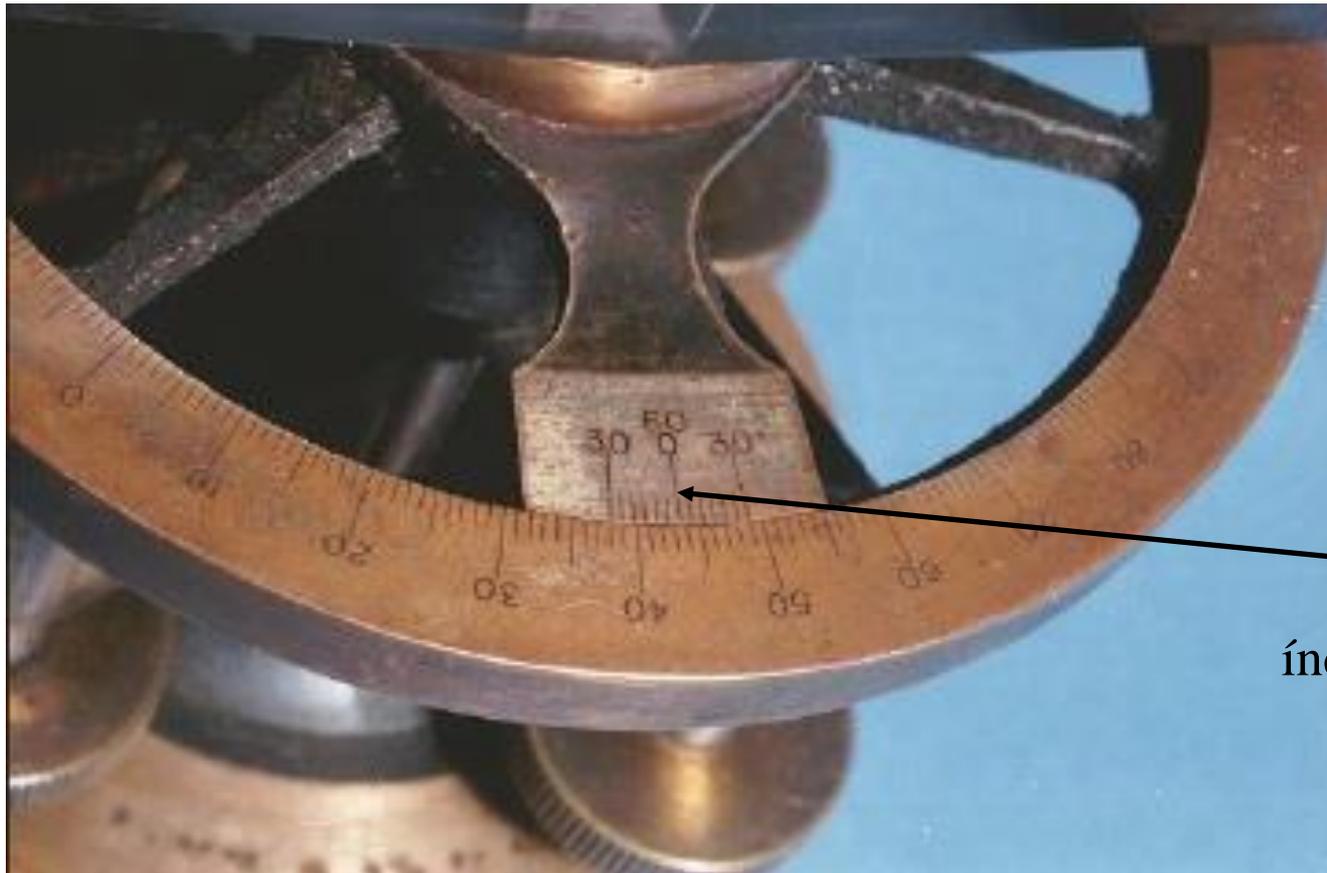
1. A base é constituída por um cilindro apoiado em 3 braços, em cujas extremidades se encontram 3 parafusos nivelantes destinados a horizontalizar a base (e por construção a verticalizar o eixo principal).

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



2. Sobre a parte superior da base apoia-se o **limbo graduado**. Conforme o tipo de teodolito, o limbo pode ser colocado solidário com a base, solidário com a alidade ou mover-se independentemente destas 2 peças.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



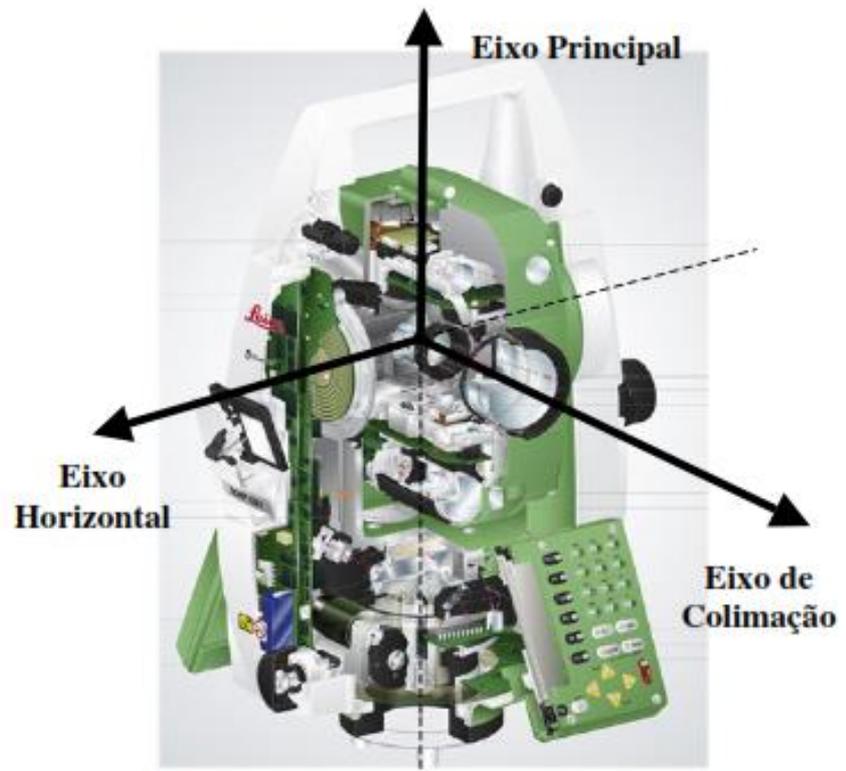
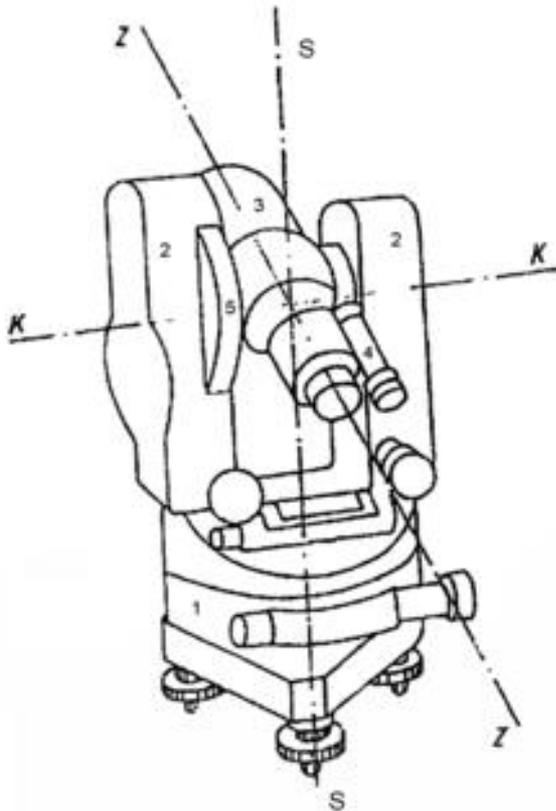
índice de leitura

3. Apoiada num tronco cónico que gira no interior da base encontra-se a **alidade**, que transporta o índice de leitura. Sobre a alidade existem 2 montantes nos quais assenta o **eixo secundário**, que por sua vez suporta a luneta (**eixo de colimação**).

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Referencial Instrumental: (sistema triortogonal associado ao **instrumento** de medida)

- *Plano primário:* plano perpendicular ao **eixo principal**;
- *Eixo principal:* eixo de rotação da alidade;
- *Plano secundário :* plano que contém o eixo principal e o plano de referência azimutal;



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

As condições geométricas de **construção** para que um teodolito forneça medidas correctas de ângulos azimutais são:

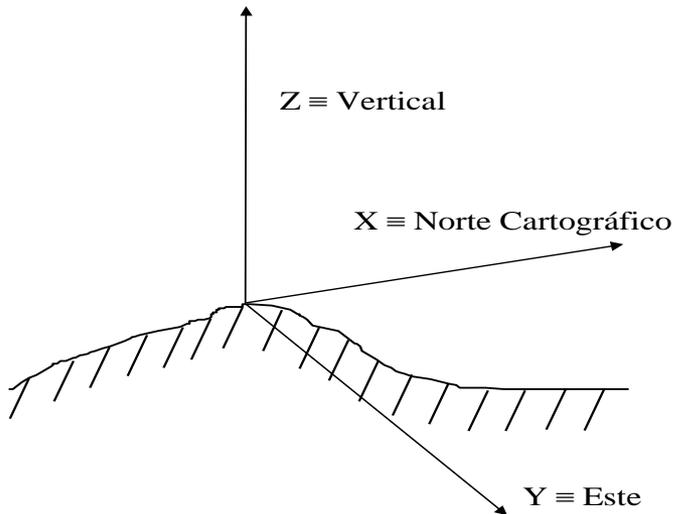
1. A linha de pontaria tem de ser perpendicular ao eixo secundário (se esta condição não se verificar, a superfície gerada pelo movimento da luneta não é um plano).
2. O eixo óptico da luneta deve intersectar o eixo principal.
3. O eixo secundário deve ser perpendicular ao eixo principal.
4. O eixo principal deve ser normal ao plano do limbo horizontal.
5. O eixo principal deve intersectar o limbo azimutal no centro da graduação.
6. O limbo azimutal deve estar correctamente graduado.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Para além disso, quando se coloca o aparelho em **estação**, devem ser respeitadas outras 2 condições:

1. O plano do limbo deve estar horizontal.
2. O eixo principal tem que conter a estação e ficar vertical (assim, todos os planos de pontaria contêm a vertical da estação).

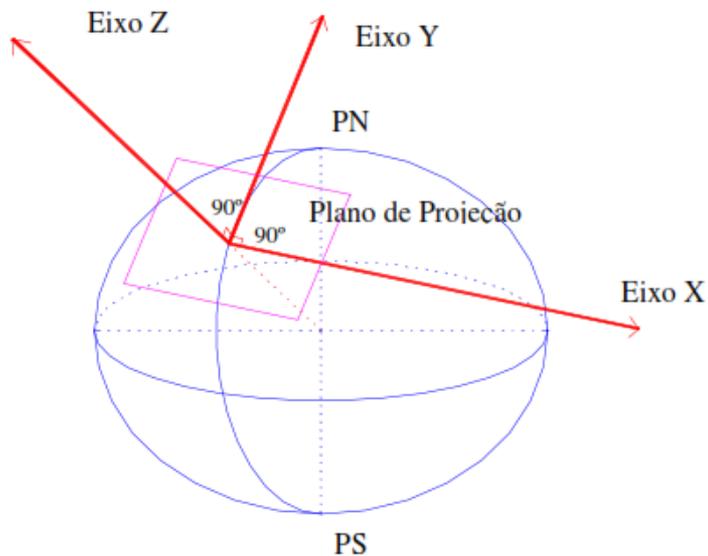
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Referencial Topocêntrico-horizonta

(sistema triortogonal associado ao **ponto estação**)

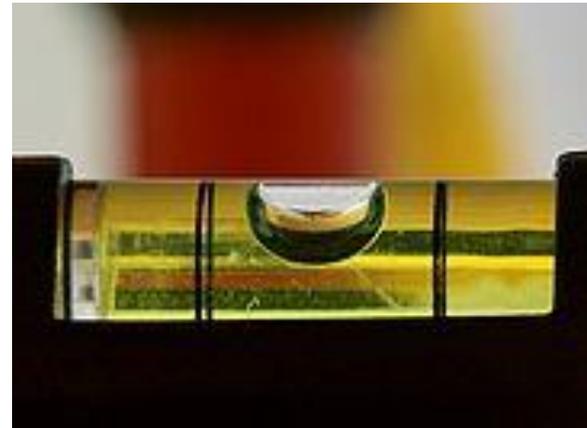
- *Plano primário*: plano horizontal;
- *Plano secundário*: plano vertical do meridiano de lugar;
- *Primeiro eixo horizontal*: direcção do **Norte Cartográfico**;
- *Segundo eixo horizontal*: normal ao plano secundário, formando um sistema angular dextrógiro;



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



nivela esférica para definir
um plano horizontal

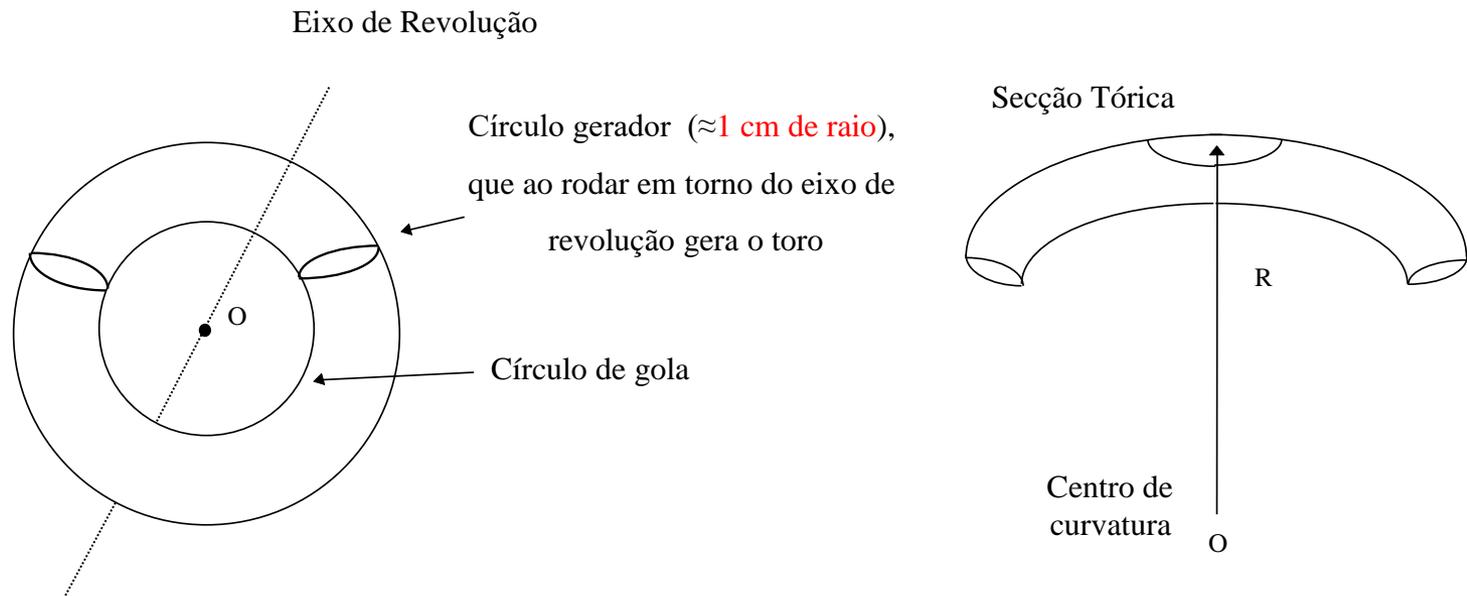


nivela tórica para definir
uma direcção horizontal

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

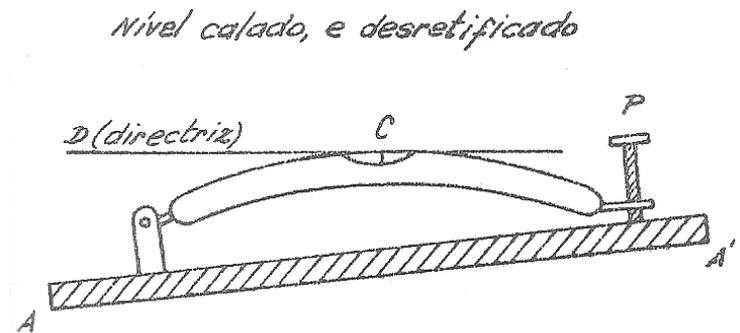
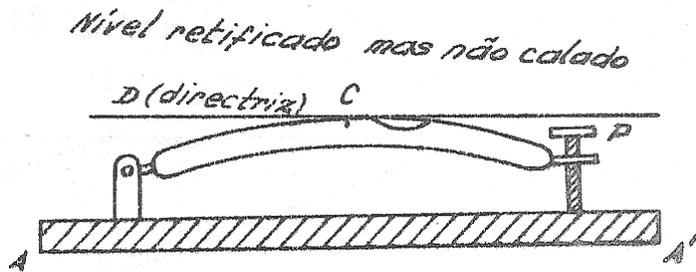
As **nivelas** de bolha são acessórios de que permitem a horizontalização de um plano ou a horizontalização de uma direcção. As nivelas tóricas são **secções de toros de revolução** com círculo de gola de **20 a 100 metros de raio**.

Normalmente os teodolitos possuem 1 ou 2 níveis solidários com a alidade. Quando uma nivela gira em torno do eixo principal e a bolha permanece centrada, isto confirma a perpendicularidade do **eixo de rotação** em relação à **diretriz** da nivela, dentro do respectivo limite de sensibilidade. Se ocorrer um **rectificação** do nível torna-se necessária.



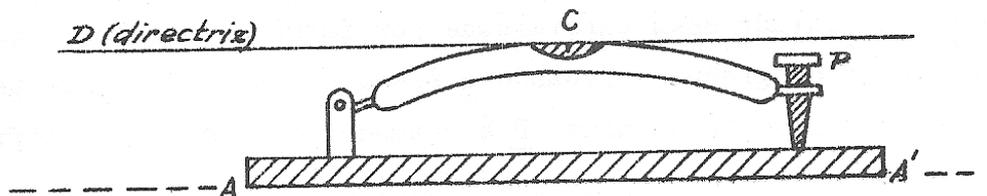
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

A nivela apoia-se na **base AA'**, de um lado por uma charneira e do outro através de um parafuso **P** que se destina a levantar ou baixar essa extremidade por forma a levar a bolha a ocupar o **centro C** da graduação. Chama-se **directriz D** de uma nivela à tangente à linha média no centro da graduação.



Diz-se que uma nivela está **rectificada** quando a sua directriz **D** é paralela à linha de apoio **AA'**.

Diz-se que uma nivela está **calada** quando o centro da bolha coincide com o centro da graduação.

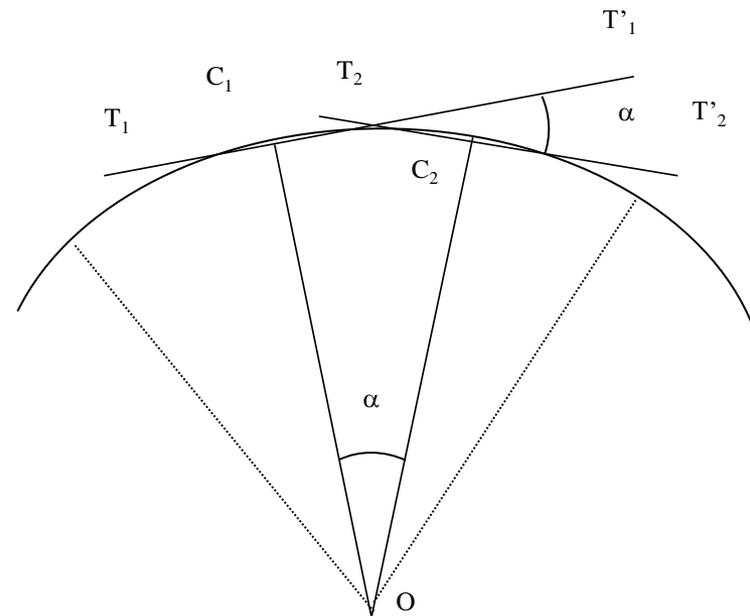
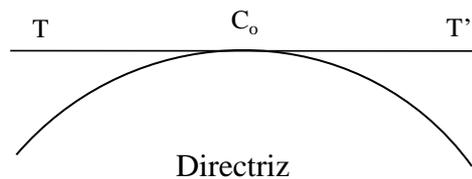


LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Constatada a **necessidade de rectificação** o procedimento é o seguinte: colocar a diretriz do eixo da nivela a ser retificada mais ou menos na direção de dois parafusos calantes e centrar a bolha com rigor; girar a alidade 180°, prender o movimento da alidade e deixar a bolha estabilizar e observar a magnitude do deslocamento da bolha em relação ao centro da graduação existente no tubo da nivela. Mantendo fixa a alidade efectuar a correcção do deslocamento da bolha, fazendo com que ela volte ao centro do tubo: esta correcção é efectuada em duas etapas, **metade** do deslocamento deve ser introduzida actuando nos parafusos de ajuste existente na própria nivela e a outra **metade** num dos dois parafusos calantes que ainda continuam paralelos à directriz do eixo da nivela.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

A sensibilidade da nivela é dada pela variação de inclinação da directriz (TT') do nível de valor α correspondente ao deslocamento da bolha de uma divisão (2mm)



Em topografia :

T16 = 30"

T2 = 20"

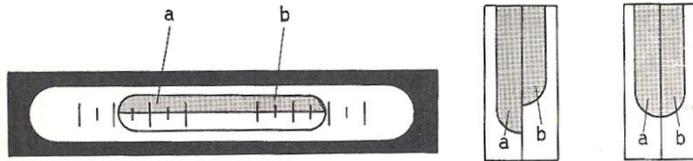
Em geodesia:

T3 = 6,5"

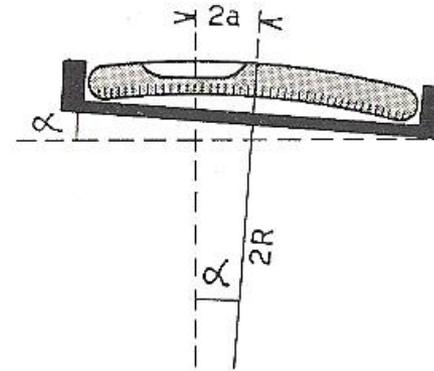
T4 = 1 a 2"

DKM3 = 2"

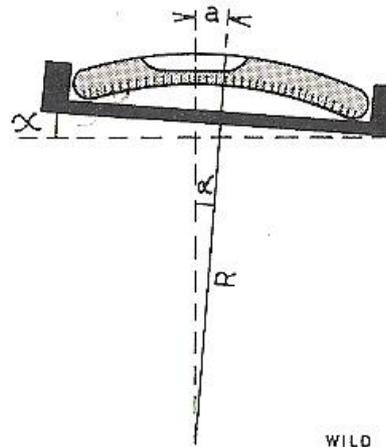
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



calagem da bolha por
coincidência das imagens das
duas extremidades



mais sensível



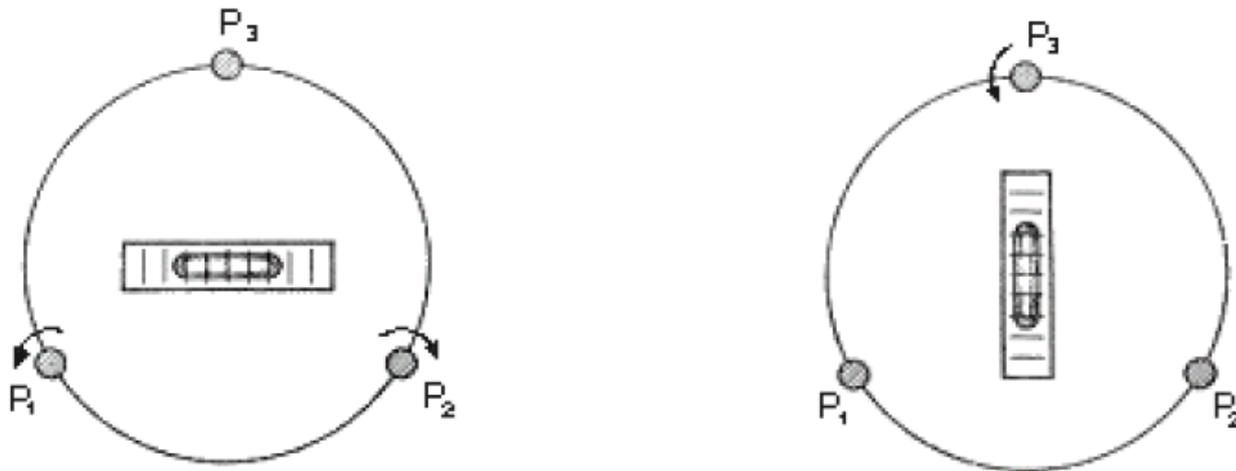
menos sensível

WILD

a mesma inclinação α provoca um deslocamento **a** na nivela
menos sensível e um deslocamento **2a** na nivela mais sensível

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

- 1) Colocar a nivela de modo que a directriz desta fique aproximadamente paralela ao plano vertical que passa por dois dos parafusos nivelantes;
- 2) Rodar esses dois parafusos em sentidos contrários até calar a nivela;
- 3) Rodar a nivela de 100 graus em torno do eixo principal;
- 4) Voltar a calar a nivela rodando agora apenas o terceiro parafuso nivelante.



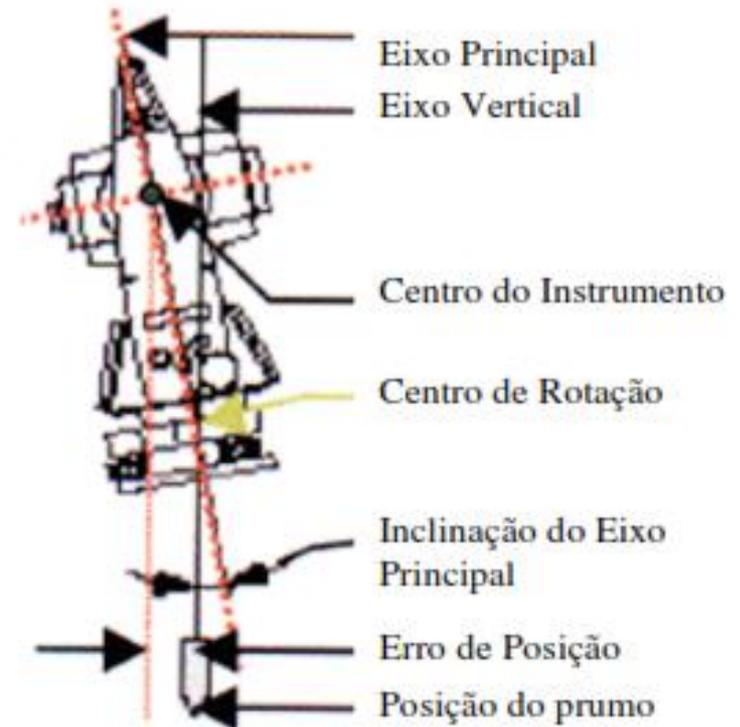
Representação esquemática dos parafusos nivelantes de um teodolito e da nivela tórica, durante o procedimento de verticalização do eixo principal.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Estacionar: É colocar o referencial do instrumento o mais próximo possível do referencial topocêntrico do ponto estação

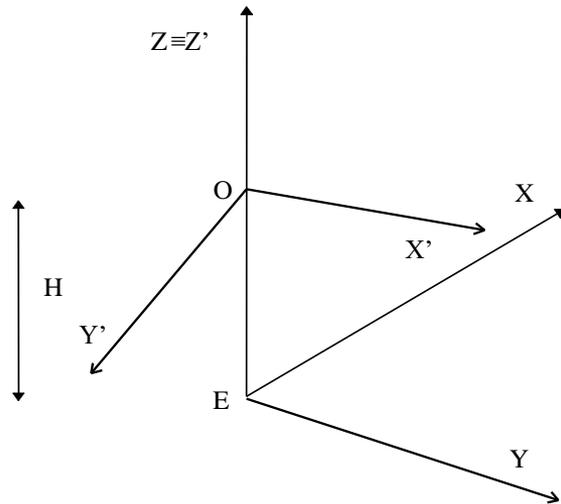
Na prática, é executar com precisão necessária 3 rotações e 3 translações com o sistema de eixos do instrumento.

Não sendo possível colocar o centro do instrumento sobre o ponto, tem que se medir sempre a sua **altura** sobre a direcção vertical.



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

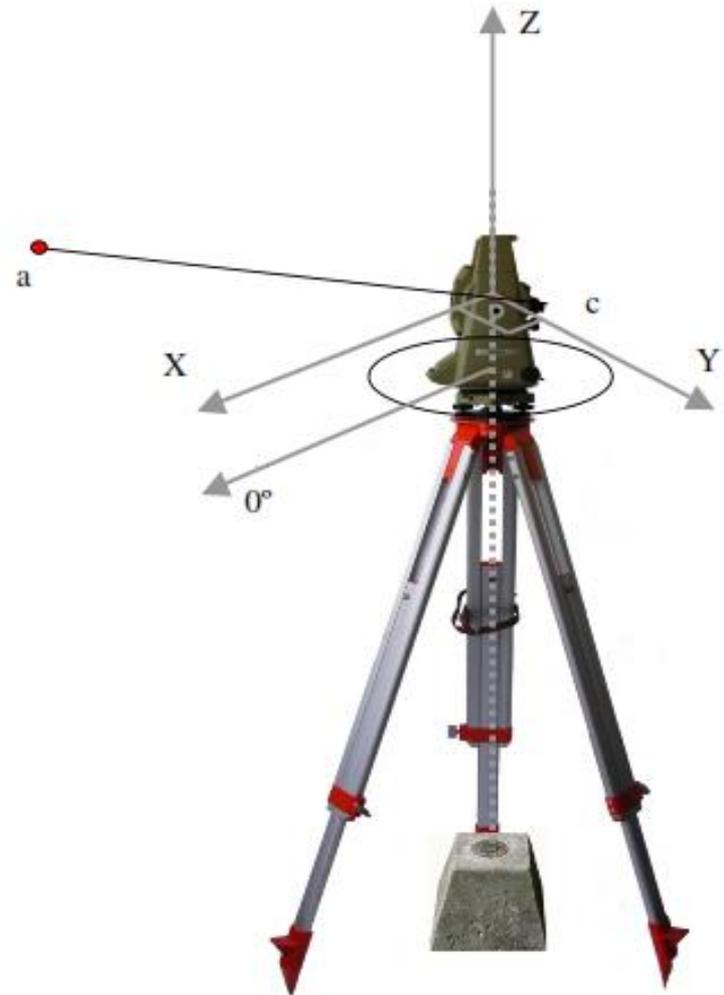
As condições ideais são as que fazem coincidir o referencial do instrumento com o referencial local de origem no ponto estação.



$OZ' \equiv EZ$; $X'OY' \equiv XEY$; $OX' \equiv EX$



$O \equiv E$; $OZ' \parallel EZ$; $OX' \parallel EX$

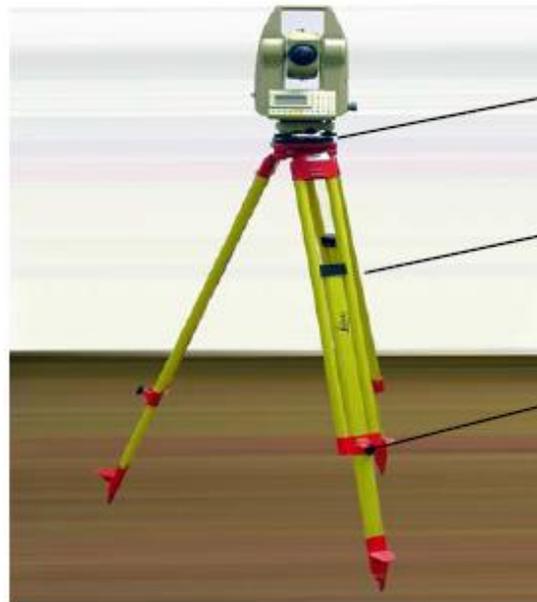


LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

As **pernas** do tripé, extensíveis ou não, são terminadas pelo **pedal** e pelo **ferrão** para permitir uma boa fixação ao terreno.



tripés



Base do Tripé

Tripé

Parafusos de fixação das pernas do Tripé

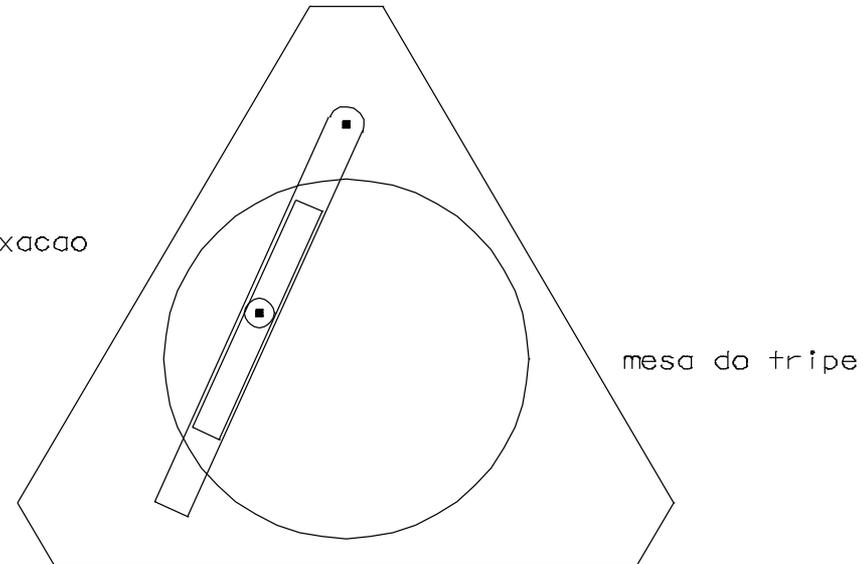


LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Para colocar um goniómetro de modo a poder medir ângulos, isto é, para colocá-lo em estação, há que ligá-lo solidamente a um suporte que geralmente é um tripé. A ligação faz-se à **mesa**, peça de madeira ou metal, por um **parafuso** que a atravessa na parte central. As mesas metálicas que permitem variar a posição do centro do goniómetro são chamadas mesas de translação.

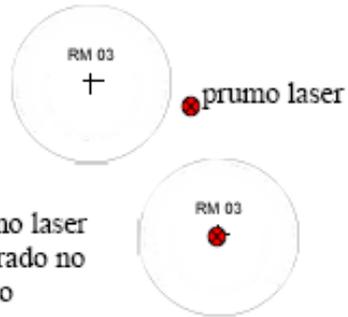


parafuso de fixação



mesa do tripe

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



1. Cravar o tripé no solo



2. Fixar o equipamento ao tripé

3. Eixo principal do aparelho passando pelo ponto estação utilizando o prumo óptico ou laser

4. Calar a nivela esférica utilizando os movimentos de extensão do tripé



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Fases do estacionamento:

- 1º Centragem - fazer coincidir a origem com a vertical do ponto;
- 2º Horizontalização do plano XOY (verticalizar o eixo principal);
- 3º Orientação – rodar o instrumento (alidade) tornando os eixos horizontais paralelos

Execução prática:

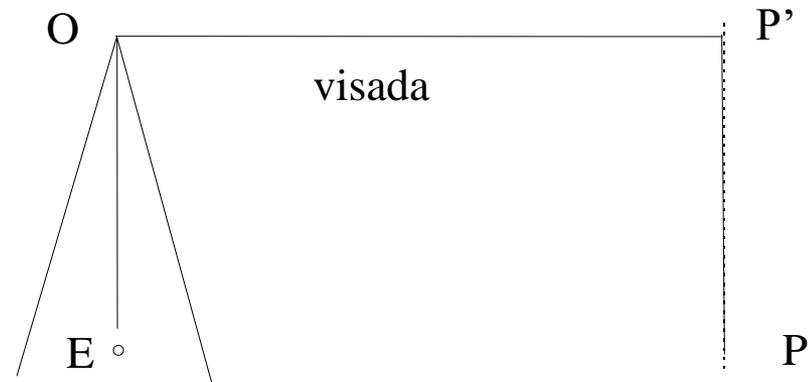
- 1º Centragem grosseira do tripé c/ mirada;
- 2º Centragem aproximada c/ prumo óptico;
- 3º Calagem aproximada c/ nivela esférica;
- 4º Calagem rigorosa c/ nivela tórica;
- 5º Centragem rigorosa c/ prumo óptico;
- 6º Verificação e correcção da calagem
- 7º Verificação da centragem

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Visada: segmento de recta definido no espaço, entre o centro do aparelho colocado no *ponto estação (E)* e o alvo colocado no *ponto visado (P)*.

Ponto estação – ponto de estacionamento do instrumento de medida

Ponto visado – materializado por alvos naturais ou artificiais



Alvos:

Naturais – marco, construção existente, chaminé, para-raios, etc.;

Artificiais – dispositivos estacionado sobre o ponto no terreno.

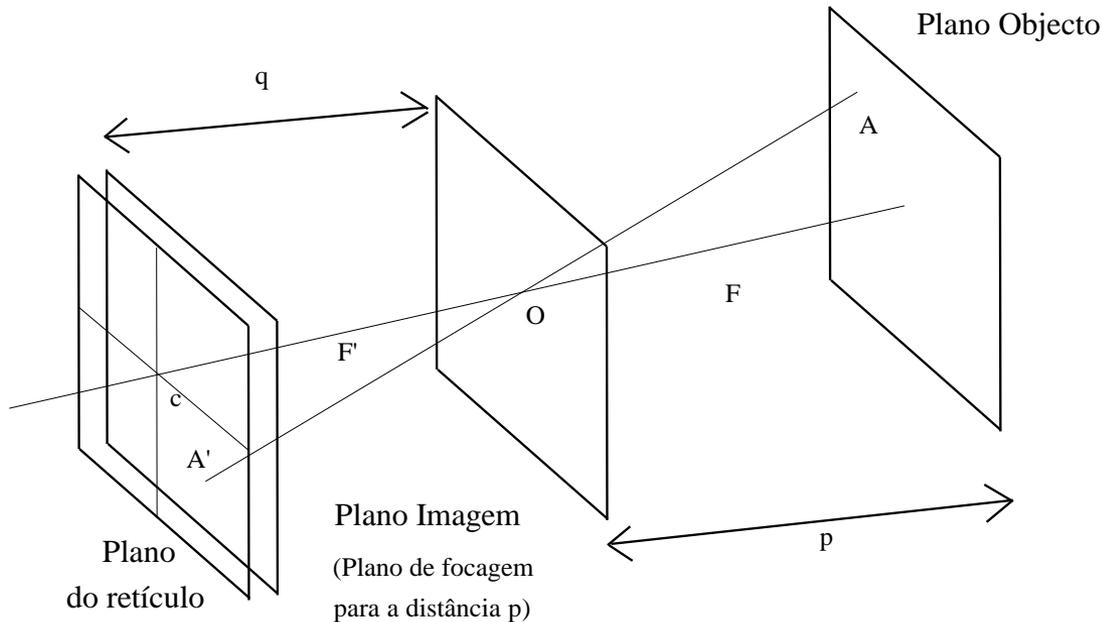
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Os fios de retículo empregados em instrumentos topográficos são linhas ou traços muito finos. Alguns fabricantes de instrumentos utilizavam fios de platina extremamente finos, e outros utilizam traços gravados com diamante diretamente sobre o vidro. Alguns instrumentos possuem dois fios de retículo, um horizontal e um vertical. Os instrumentos que são utilizados em trabalhos mais precisos têm dois fios de retículo horizontais adicionais, um acima e um abaixo do fio horizontal usual. Estes fios de retículos adicionais são chamados de fios estadimétricos.



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Princípio da luneta com retículo



Existe paralaxe da imagem quando a imagem do objecto, dada pela objectiva, não se forma sobre o plano do retículo.

Os fios do retículo, que definem a linha de pontaria, estão colocados numa placa de vidro situada entre as duas lentes; esta placa pode mover-se para a frente e para trás através de um botão de focagem, de modo a colocar o retículo no plano de focagem

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

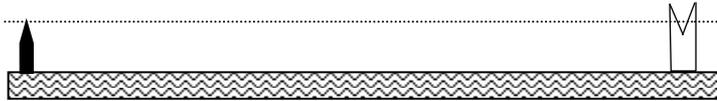


A focagem (dos fios do retículo e da imagem) é fundamental pois dela resulta uma melhor ou pior pontaria: deve focar-se em primeiro lugar os fios do retículo com o anel de focagem colocado na ocular e depois a imagem do campo visual, de tal forma a que as duas imagens não apresentem movimento uma em relação à outra (paralaxe, que pode provocar um erro na pontaria).

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Ponto de Mira

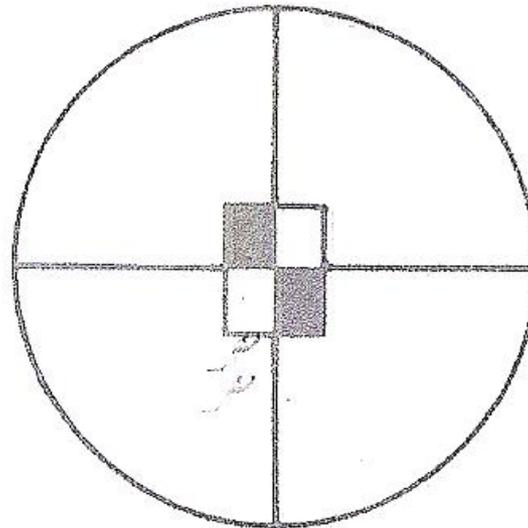
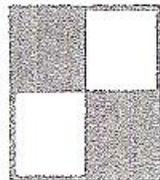
Alça da Mira



miras de pontaria

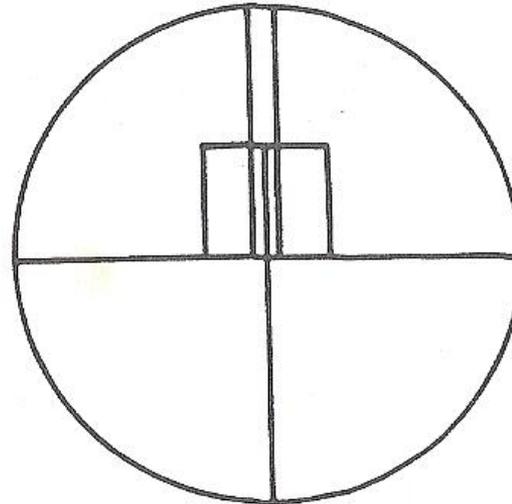
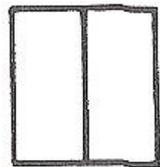
Há 3 tipos de pontarias, conforme os tipos de miras e de aparelhos utilizados.

Nalguns aparelhos utilizam-se retículos em cruz, onde se sobrepõe um traço sobre uma marca visada ou se faz coincidir os fios com o limite dos quadrados de uma mira: **pontaria por sobreposição**.



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

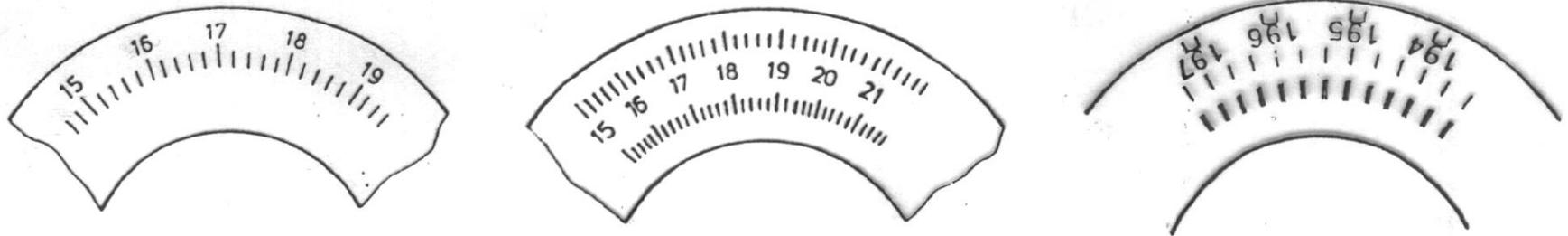
Nos aparelhos modernos utiliza-se um retículo com dois traços paralelos muito próximos; desta maneira pode enquadrar-se o alvo visado, sendo esta **pontaria por enquadramento** mais precisa do que a de sobreposição.



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Limbos:

- círculos graduados, com traços de $1\mu\text{m}=10^{-6}\text{m}$ de espessura;
- de metal de vidro (cristal) ou poliéster, com diâmetros de 6 a 25 cm;



A graduação pode ser feita em 3 sistemas: **sexagesimal**, **centesimal** e **millesimal**. No primeiro caso a circunferência é dividida em 360 graus e cada um destes em 2, 3, 6 ou 12 partes, sendo lido no limbo o valor do grau e da respectiva subdivisão. As frações menores são estimadas ou lidas por outros processos. No segundo caso a circunferência do limbo é dividida em 400 grados e cada um destes em 2, 4, 5, 10 ou 20 partes. Na divisão millesimal a circunferência é dividida em 6400 partes ($2\pi \approx 6.283 \approx 6.400$).

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

especificações técnicas (aparelhos analógicos)

MODELO		B3	T 05	T 0	T 1	T 16	T 2	T 3	T 4	RK 1	RDS
Aumento da Luneta	(x)	2	19	20	30	30	30	24, 30 40	60, 80	25	24
Imagem (inversa, direita)		I	D	D	D	D	D	I	I	D	D
Campo a 1000 m	(m)	120	39	35	27	27	29	28	14	22	22
Distância mínima de focagem	(m)	2	0,8	1,0	1,7	1,7	2,2	4,6	100	2,4	2,4
Constante estadimétrica		—	100	100	100	100	100	—	—	100	100
Constante de adição	(cm)	—	0	0	0	0	0	—	—	0	0
Sensibilidade do nível da alidade p/2 mm		8'	60"	4'	30"	30"	20"	6,5"	1"	2'	30"
Leitura directa	360°	Hz 1° V 5%	2'	Hz 20" V 5'	6"	1' (20")	1"	0,2"	Hz 0,1" V 0,2"	V 10'	1'
	400g	Hz 1g V 5%	10°	Hz 1° V 10°	0,2°	1°	1cc	1cc	—	V 10°	1°
Leitura p/ estimativa	360°	Hz 6' V 1%	0,5'	Hz— V 1'	3"	0,1' (5")		0,1"	Hz 0,05" V 0,1"	V 1'	0,1'
	400g	Hz 10 V 1%	1°	Hz— V 2°	0,1°	0,1°		0,5cc	—	V 1°	0,2°
Peso do instrumento	(kg)	0,8	3,0	2,7	5,8	5,3	6,0	11,2	50	2,5	7,1
Peso do estojo	(kg)	0,3	2,2	2,6	2,8	2,8	2,2	3,7	41	3,6	2,3
Prospecto detalhado	G 1-	426s	269s	270s	261s	243s	265s	219s	255s	308s	301s

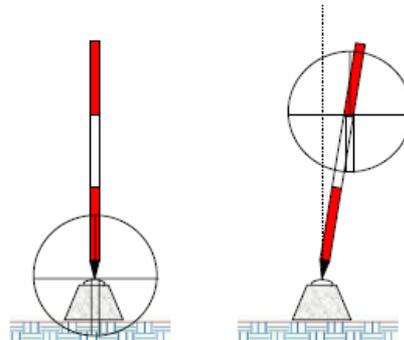
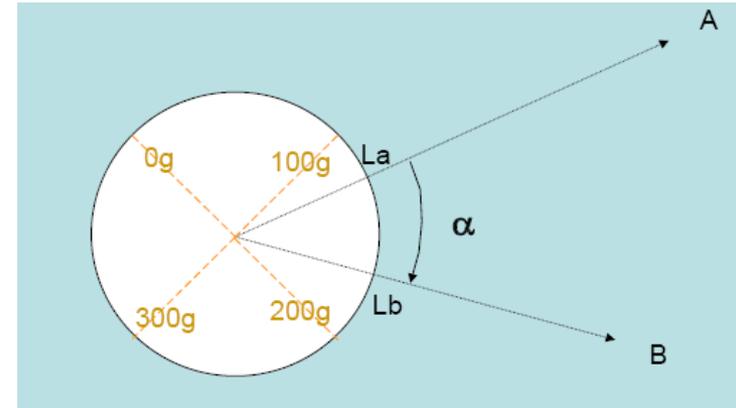
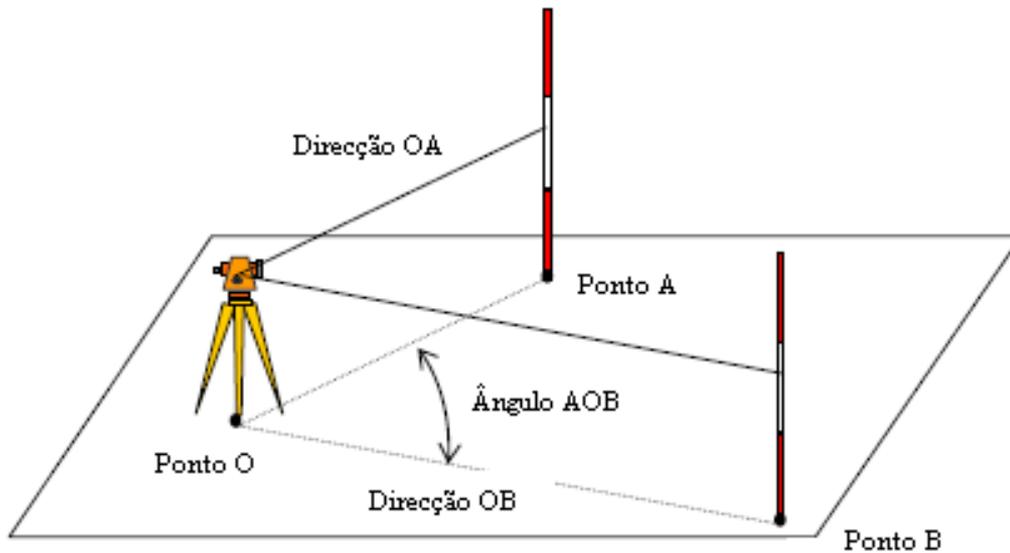
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

especificações técnicas (aparelhos analógicos)

	T05	T0	T1	T16	T2	T3	T4
Grossissement de la lunette (×)	19	20	30	30	30	24, 30, 40	60, 80
Champ à 1000 m (m)	39	35	27	27	29	28	14
Visée minimum (m)	0,8	1,0	1,7	1,7	2,2	4,6	100
Ecart type (Hz) selon DIN 18723	0,003 ^g 10"	0,008 ^g 25"	0,001 ^g 3"	0,001 ^g 3"	0,0025 ^g 0,8"	0,0015 ^g 0,5"	0,3"
Lecture directe 360°	2'	Hz 20" V 5'	6"	1'/20"*	1"	0,2"	Hz 0,1" V 0,2"
400^g	0,1 ^g	Hz 0,01 ^g V 0,1 ^g	0,002 ^g	0,01 ^g	0,0001 ^g	0,0001 ^g	-
Lecture par estimation 360°	0,5'	V 1'	3"	0,1'/5"*		0,1"	Hz 0,05" V 0,1"
400^g	0,01 ^g	V 0,02 ^g	0,001 ^g	0,001 ^g		0,00005 ^g	-
Index vertical automatique	-	-				-	-
Débattement			±2'	±6'	±5'		
Précision du calage			±1"	±1"	±0,3"		
Sensibilité de la nivellement d'index	-	-	-	-	-	12"	2"
Sensibilité de la nivellement d'alidade pour 2 mm	60"	4'	30"	30"	20"	6,5"	1"
Poids (kg)							
Instrument	3,0	2,7	5,8	5,3	6,0	11,2	50
Etui	2,2	2,6	2,8	2,8	2,2	3,7	41

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Medição de ângulos **azimutais** ou **horizontais**



$$\alpha = L_b - L_a$$

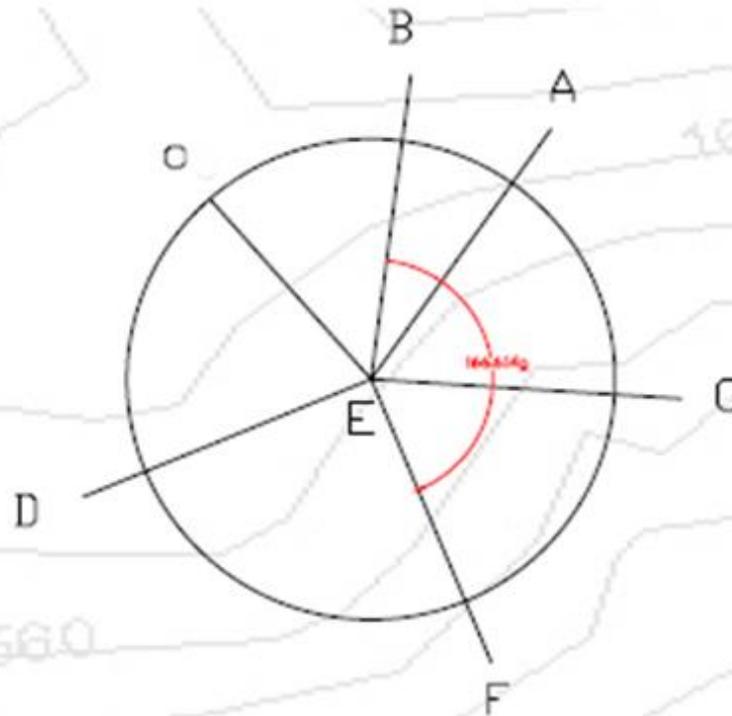
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Estacionou-se um teodolito num ponto E do terreno e fizeram-se as seguintes observações:

Vértices Visados	B	A	C	F	D
Leituras Azimutais	$54^\circ,136$	$85^\circ,246$	$150^\circ,001$	$220^\circ,750$	$320^\circ,970$

Determine os ângulos \hat{AEB} , \hat{FED} , \hat{BEF} e \hat{DEB} .

Sabendo que $(CE) = 124^\circ,683$, determine os rumos (EF) e (AE) .



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Método de observação: pontaria simples

Erros:

Colimação – Corrigido com valor rectificado na memória;

Índice – Corrigido com valor rectificado na memória;

Má graduação – Corrigida pela leitura múltipla repetida sobre o limbo em rotação;

Excentricidades – Apenas a excentricidade do limbo, sendo esta eliminada no caso de aparelhos com sistema de leitura dupla.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

A medição de ângulos exige uma metodologia operatória adequada com vista à eliminação dos erros instrumentais.

Método: observações encruzadas com reiteração das leituras

Observ. encruzadas

Conjugadas (directa e inversa)

+

Rotação progressiva e regressiva

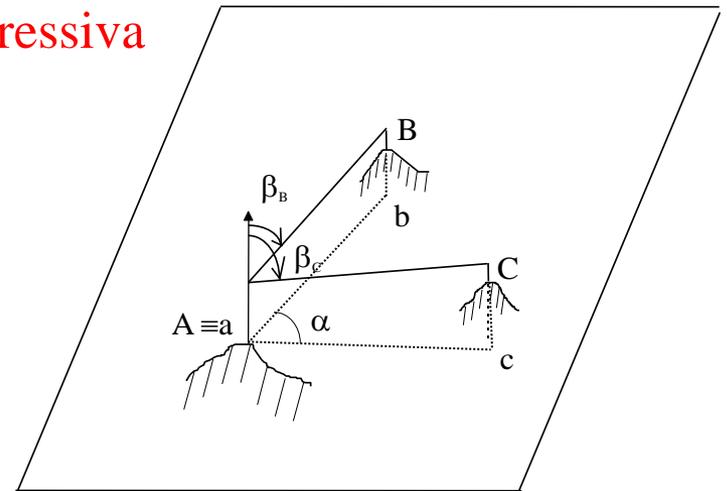
Giros do
Horizonte

Directa Progressiva em B

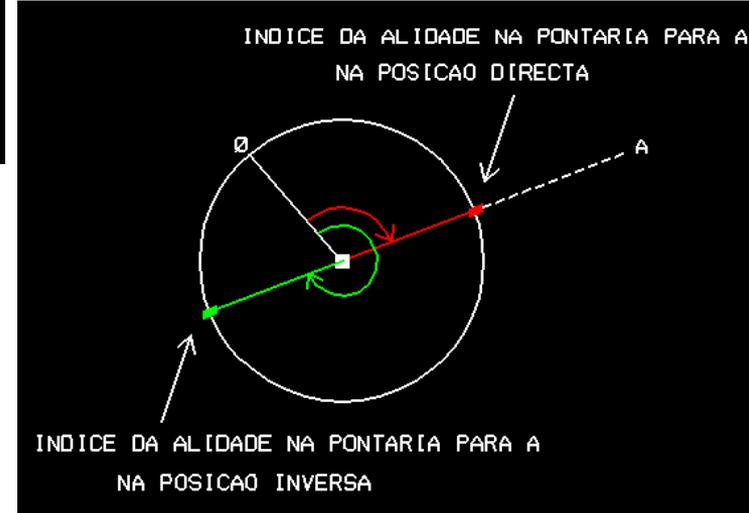
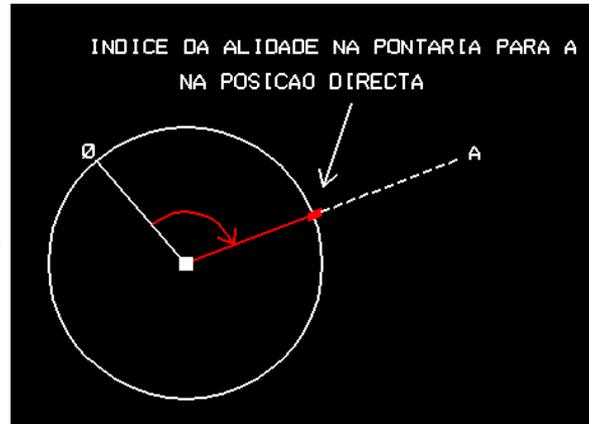
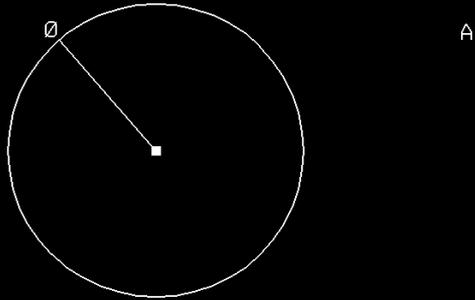
Directa Progressiva em C

Inversa Regressiva em C

Inversa Regressiva em B



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

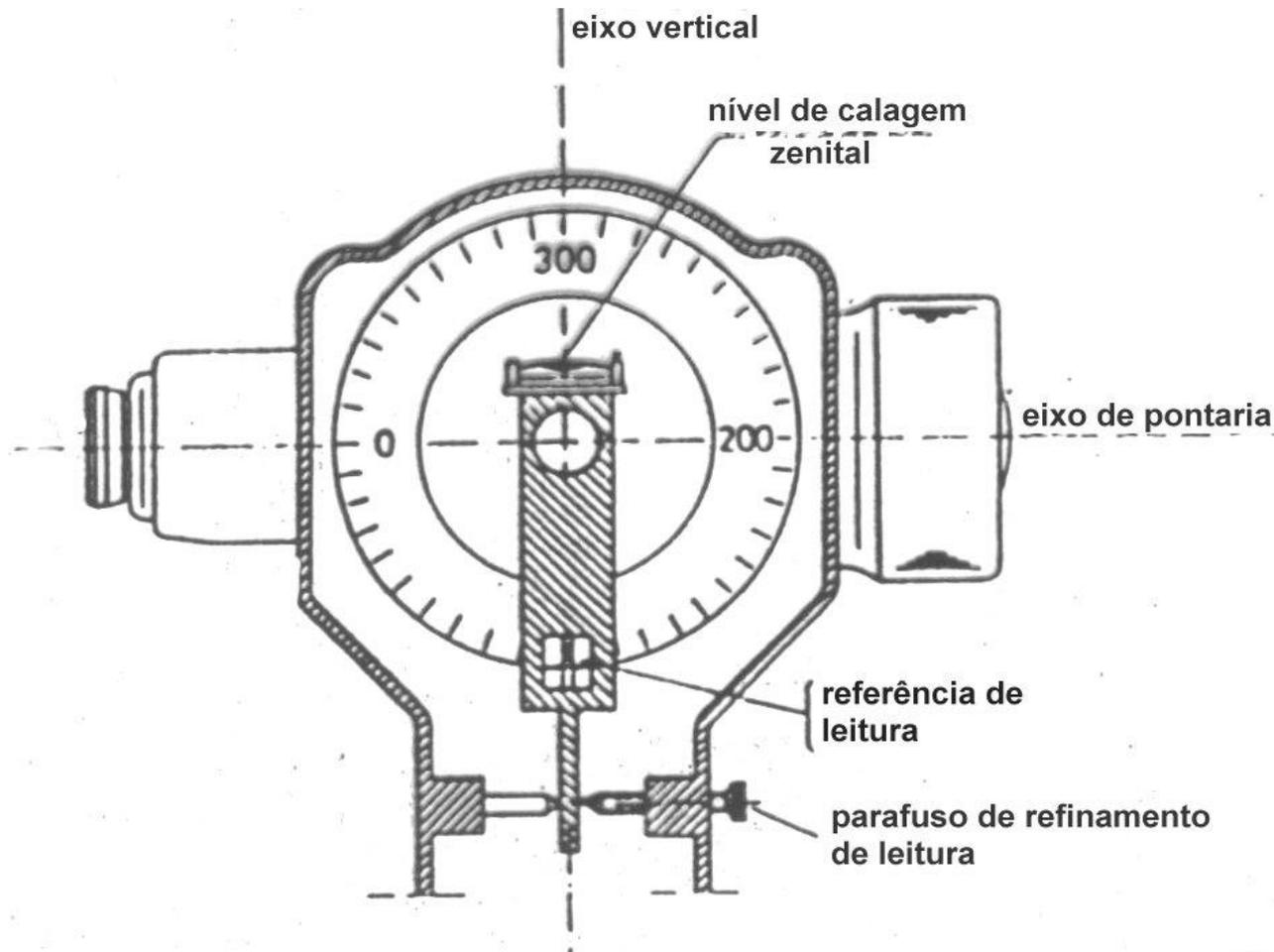


Média de observações **azimutais** conjugadas:

$$L^{Az}_{m\u00e9dia} = \frac{L^{Az}_D + (L^{Az}_I \pm 180)}{2}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

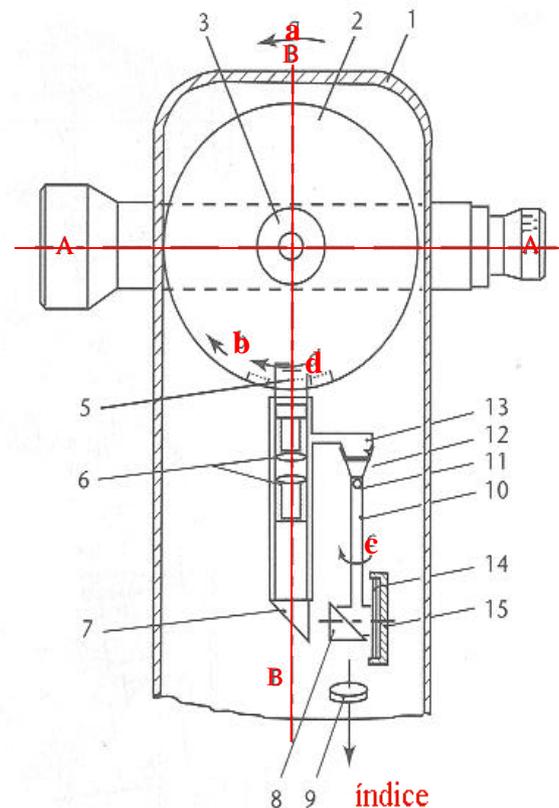
O círculo é **fixo à luneta** e o sistema de leitura é fixo ao montante. A linha de referência da leitura (contém o centro e a referência de leitura) deve ser paralela ao eixo vertical.



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

No limbo zenital dos goniómetros antigos a referência de leitura tinha que ser cuidadosamente verticalizada (utilizando **nivelas**) antes de poderem ser efectuadas observações. Uma inovação de grande utilidade consistiu na introdução de um **pêndulo**, cujo movimento é convenientemente amortecido, para substituir as nivelas (ou mais recentemente um **compensador** líquido):

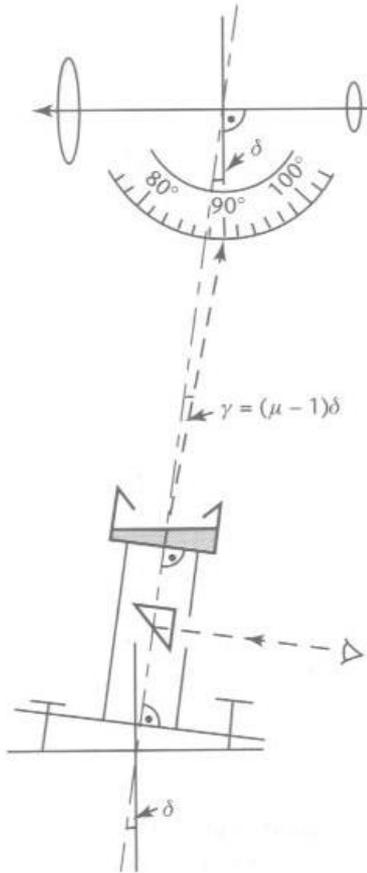
- AA = linha de colimação
- BB = eixo principal
- 1 = caixa protectora
- 2 = limbo vertical
- 3 = eixo secundário
- 5 = índice de leitura
- 6 = objectiva do sistema de leitura
- 8 = prisma
- 10 = pêndulo
- 11 = pivot
- 12-13 = apoios do pivot
- 14 = pistão de amortecimento
- 15 = cilindro de amortecimento



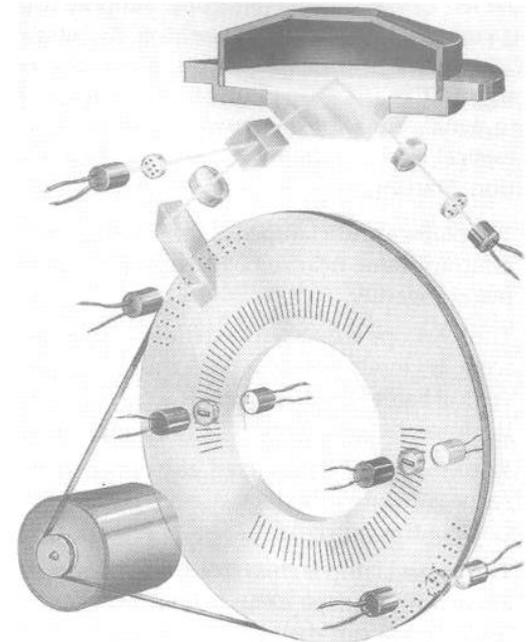
Supondo, para simplificar, que a linha AA está horizontal, se o eixo principal do goniómetro BB for inclinado segundo a direcção **a**, relativamente à vertical, o eixo AA deve rodar segundo a direcção **b** de forma a permanecer horizontal e assim manter a pontaria para o ponto. O limbo vertical é arrastado com a luneta na direcção **d** mas devido à influência do pêndulo, a leitura efectuada no índice não sofre alteração: devido à inclinação sofrida pelo eixo principal, o pêndulo transportando o prisma roda na direcção **c** e o percurso do raio que materializa a leitura corrige a leitura zenital.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

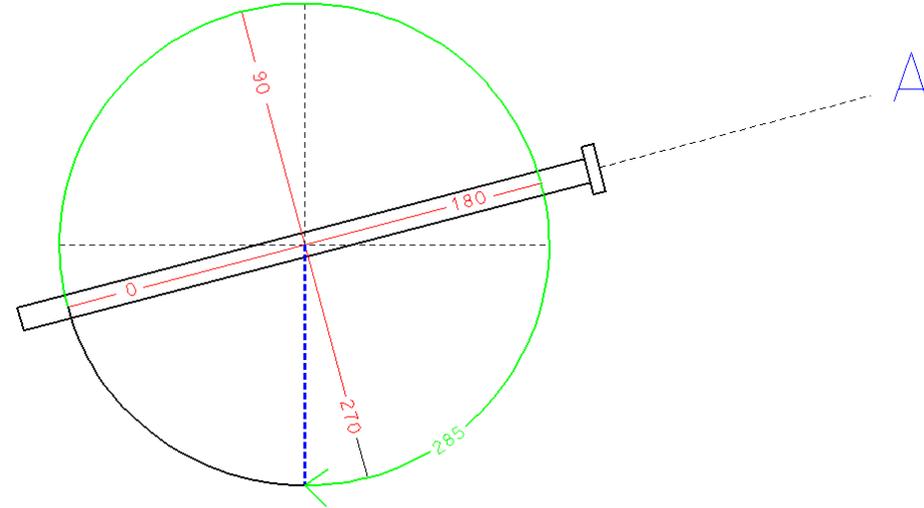
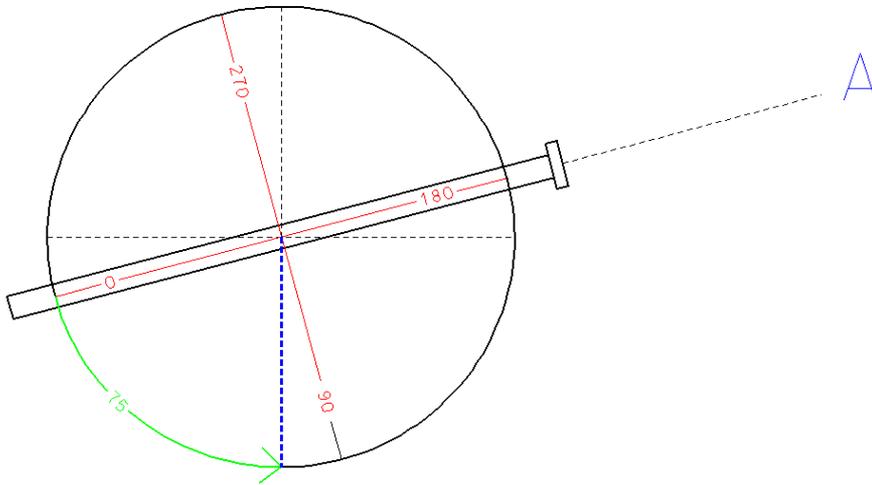
Quando o eixo principal está perfeitamente verticalizado, a superfície do líquido (óleo) é paralela à base do recipiente e os raios atravessam-no sem qualquer desvio. Se o eixo principal sofrer um desvio δ em relação à vertical, a superfície do líquido inclina-se este mesmo ângulo em relação à base do recipiente, sofrendo os raios um desvio $\gamma = (\mu - 1)\delta$, onde μ é o índice de refração do óleo, cujo efeito é corrigir a leitura zenital, de uma forma semelhante ao caso anterior.



Desenvolvimentos recentes conduziram à introdução de **compensadores bi-axiais**, que asseguram igualmente leituras corrigidas para as **leituras azimutais** devido ao erro de inclinação do eixo principal. Estes compensadores actuam em duas direcções ortogonais, detectando inclinações também do eixo secundário.



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



$$L_{\text{directa}}^{\text{zenital para A}} - (360^\circ - L_{\text{inversa}}^{\text{zenital para A}}) = 0$$

Média de observações **zenitais** conjugadas :

$$L^z_{\text{média}} = \frac{[L^z_D + (360^\circ - L^z_I)]}{2}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Fazendo-se uma pontaria na posição directa (PD) e uma pontaria na posição inversa (PI) para um alvo fixo, obtém-se o ângulo zenital isento do erro de índice vertical do equipamento por:

$$Z = \frac{360^\circ + Z_{PD} - Z_{PI}}{2}$$

É possível também calcular o **erro de índice vertical** (ε) de um equipamento:

$$\varepsilon = \frac{360^\circ - (Z_{PD} + Z_{PI})}{2}$$

Assim, um ângulo zenital lido somente em PD pode ser corrigido do erro de índice vertical:

$$Z = Z_{PD} + \varepsilon$$

✓ **Observações encruzadas** (conjugadas + rotação P e R)

Combinação de giros $\left\{ \begin{array}{l} DP \\ IR \\ IP \\ DR \end{array} \right\}$

Mínimo (topografia)

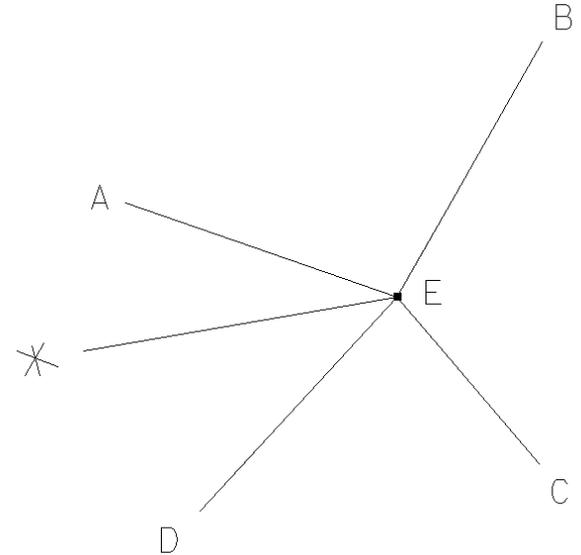
erro de fecho $\leq 20''$
diferença de D e I $\leq 15''$

T2

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Supondo a estação em **E**, onde se visam os vértices **A**, **B**, **C**, **D**, a incluir no cálculo, e uma referência externa *****, o **Método das direcções ou dos giros do horizonte** consiste em observar sucessivamente todos vértices (direcções), podendo estes giros ser efectuados quer com a luneta na posição directa (face 1) quer com a luneta na posição inversa (face 2) e tanto no sentido progressivo (no sentido crescente da graduação do limbo) quer no sentido regressivo, eventualmente repetindo o procedimento em várias reiteraões. Esta metodologia garante (1) que os ângulos formados por 2 direcções, contíguas ou não, têm a mesma precisão e (2) que os erros das diferentes direcções são independentes uns dos outros.

As observações iniciam-se na marca externa *****, registando-se as leituras para cada vértice, fechando o giro novamente na marca *****, devendo o erro de fecho ϵ do giro (diferença entre as leituras inicial e final para a marca exterior) ser inferior a uma tolerância fixada previamente. Desta forma, cada um dos vértices **A**, **B**, **C** e **D** é visado o mesmo número de vezes, não se privilegiando nenhuma direcção. Cada giro é compensado distribuindo o erro de fecho pelas n pontarias: $L_i^{comp} = L_i + i \cdot \epsilon / n$.



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Pontos visados	Leituras azimutais		Leituras azimutais compensadas	Leituras azimutais médias DP+IR	Leituras zenitais	Leituras zenitais médias DP+IR
	DP	IR				
*	DP IR	17.2412 217.2446	17.2412 217.2446			
A	DP IR	86.5405 286.5443	86.5400 286.5439	<u>86.54195</u>	101.1426 298.8528	<u>101.14490</u>
B	DP IR	163.1832 363.1830	163.1822 363.1822	<u>163.18220</u>	98.2207 301.7753	<u>98.22270</u>
C	DP IR	187.0225 387.9265	187.0210 387.9253	<u>187.47315</u>	98.8432 301.1567	<u>98.84325</u>
*	DP IR	17.2432 217.2462	17.2412 217.2446			

$$\varepsilon_D = 17.2432 - 17.2412 = 0.0020$$

$$\varepsilon_I = 217.2462 - 217.2446 = 0.0016$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O impacto da electrónica nos teodolitos concentra-se no sistema de leitura dos círculos graduados, no sistema de registo dos dados e no sistema que compensa automaticamente a inclinação do equipamento, levando-o à horizontal.



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Sempre foi desejo dos geómetras dispor de um teodolito em que as medidas angulares não fossem influenciadas pelas imprecisões das divisões dos limbos. Para esse efeito, seria necessário fazer participar, em cada leitura, todas as divisões do limbo, já que a soma de todos os erros de má graduação é nula.

As características principais dos teodolitos electrónicos são o princípio dinâmico de leitura, leituras diametralmente opostas, varrimento de todo o limbo, eliminação dos erros de excentricidade e de graduação.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

No século XVII Hedraus colocou **2** nónios diametralmente opostos no limbo azimutal, sendo a leitura correspondente a uma pontaria obtida pela **média** dos valores lidos nos **nónios**. Ramsden, em 1787, utilizou **4** nónios para atenuar os erros de má graduação. Henri Wild, em 1907, combinou **opticamente** 2 zonas diametralmente opostas dos limbos, garantindo simultaneamente a precisão das leituras e a comodidade do utilizador.

Em 1977, a HP incorporou pela primeira vez no taqueómetro BEAR um dispositivo que permitia a leitura e medição electrónica de um ângulo definido por duas direcções, materializadas por duas componentes mecânicas montadas sobre um disco que suporta a graduação e que roda em torno do eixo principal do aparelho.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Os principais componentes físicos de um sistema de medição electrónica de ângulos são dois:

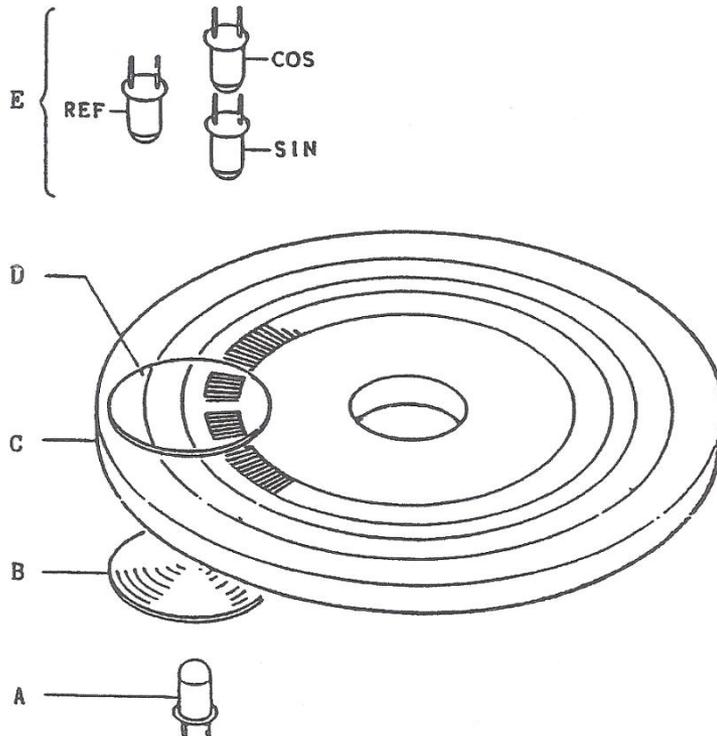
✓ um círculo de cristal (limbo) com regiões **claras e escuras** (transparentes e opacas) gravadas através de um processo de fotolitografia

✓ **fotodíodos** detectores da luz que atravessa esse círculo graduado

Existem basicamente dois princípios de **medição e codificação de limbos**, o incremental que fornece o valor com relação a uma origem, isto é, quanto se girou o teodolito a partir de uma posição inicial e o absoluto que fornece um valor angular para cada posição do círculo, .

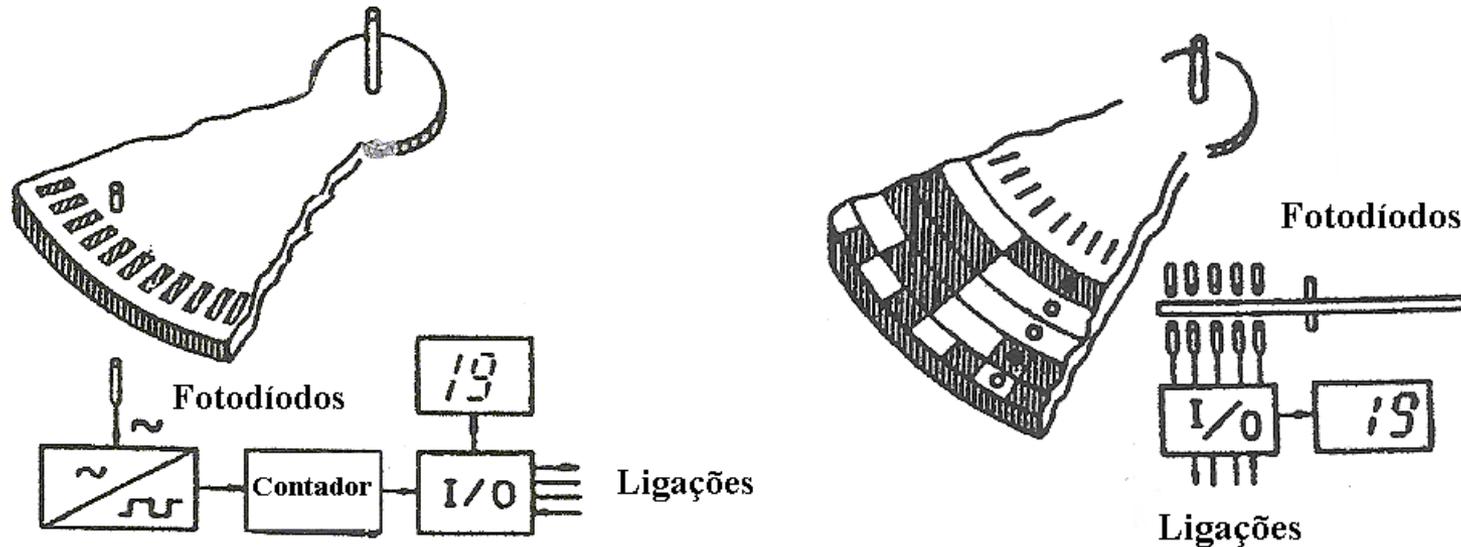
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

As modernas estações totais permitem a leitura electrónica dos limbos, que **giram** a uma velocidade angular fixa, utilizando para tal codificadores que convertem as leituras analógicas em digitais através de um processo de digitalização.



- A: LED (Light Emitting Diode)
- B: Lente
- C: Escala
- D: Subescala
- E: Sensor

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



No modo incremental, a leitura correspondente a uma pontaria obtém-se convertendo em sinal eléctrico a alternância de luz-sombra registada no sensor que é gerada quando o limbo se encontra em rotação, traduzindo a relação angular entre um ponto arbitrário (a posição do zero do limbo fixa-se em qualquer ponto, quando o teodolito é ligado) e a posição para onde é rodado. Estes teodolitos devem ser rodados após o início da sessão de observação de forma a encontrar os valores de **indexação** horizontal e vertical.

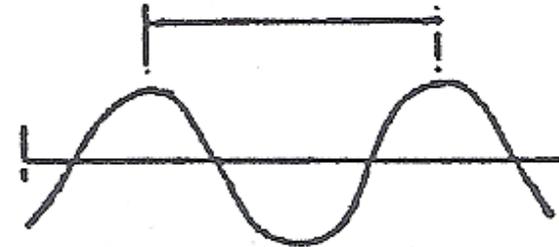
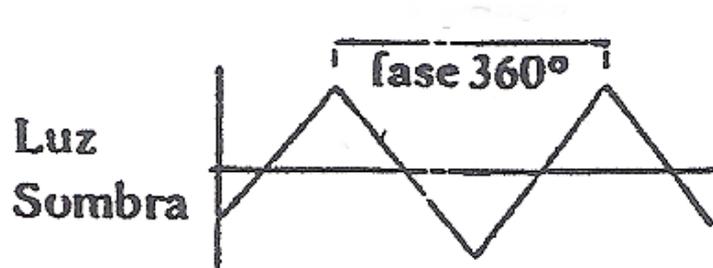
No modo absoluto, o limbo é gravado com um código que quando é lido define a posição da direcção definida pela pontaria sobre o limbo.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Para se entender o princípio de funcionamento da medição de ângulos, pode pensar-se, de maneira simplificada, num círculo de vidro com uma série de traços opacos igualmente espaçados: colocando uma fonte de luz de um lado do círculo e um fotodetector do outro, é possível **"contar" o número de impulsos "claro/escuro"** que ocorrem quando o teodolito é movido de uma direcção para outra, para medir um ângulo. Esse número de impulsos pode ser então convertido em sinal eléctrico e mostrado em forma digital num visor.

Este procedimento de contagem de impulsos fornece um ângulo com pouca precisão. Então, para refinar a leitura, empregam-se mais fotodetectores. Um segundo fotodetector indica o sentido de giro. E em outra região são utilizados mais quatro fotodetectores para realizar a leitura de precisão por interpolação.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

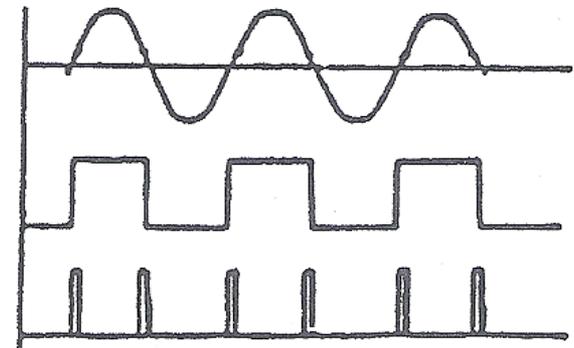


No método incremental, quando o limbo roda uma divisão, a mudança de luz para sombra e vice-versa é captada na célula fotoelétrica; embora a forma ideal desta curva fosse triangular, devido ao fenómeno da difracção a onda é sinusoidal, posteriormente transformada numa onda quadrada, sendo contado o número de impulsos correspondentes à alternância claro-escuro.

Sinal de voltagem

Onda quadrada

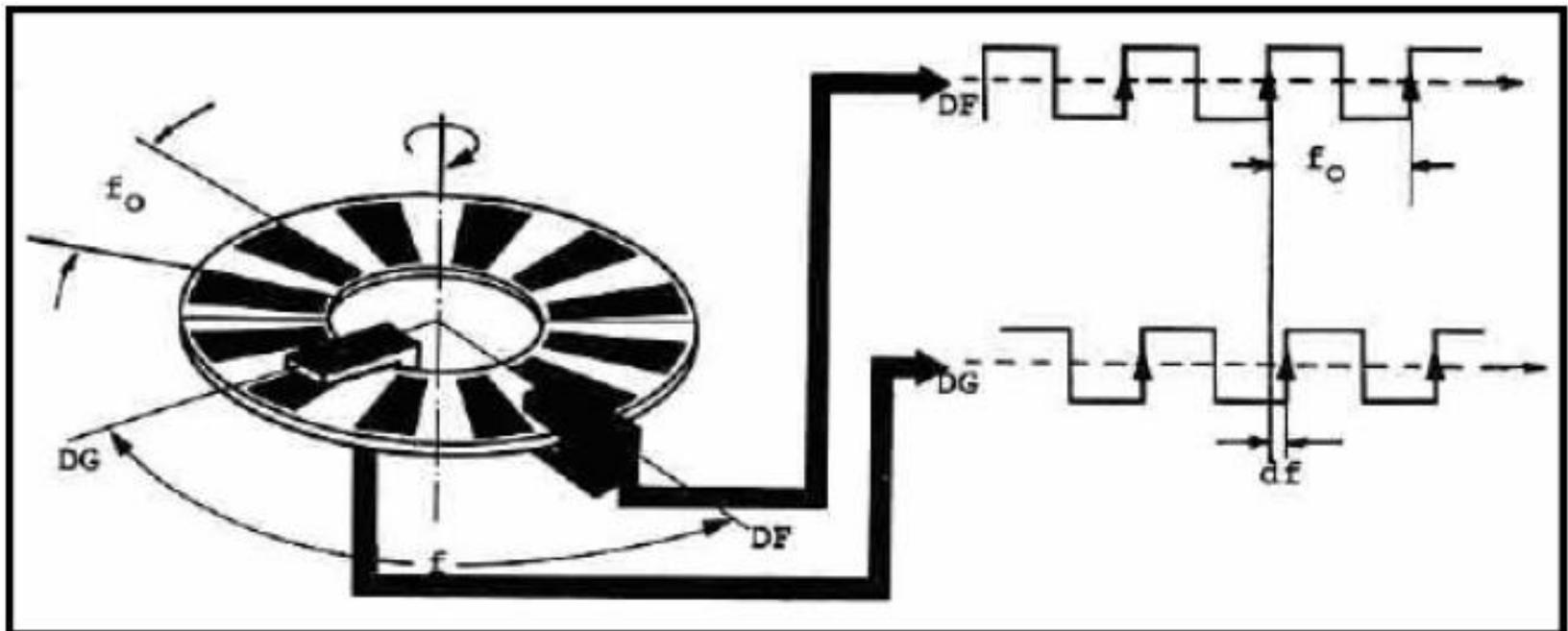
Impulso



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Suponha-se um círculo graduado (limbo azimutal ou vertical) dividido em **1024** intervalos, equivalendo aos **360°** do círculo (designa-se período cada divisão f_0 claro/escuro, correspondendo a cerca de **20 minutos de arco**, o que representa a "precisão" (não muito boa) do limbo).

O círculo efectua uma volta completa para cada medição de direcção e passa por um índice (sensor) fixo à base **DF** (direcção zero) e por um índice (sensor) móvel **DG**, solidário com a alidade.



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

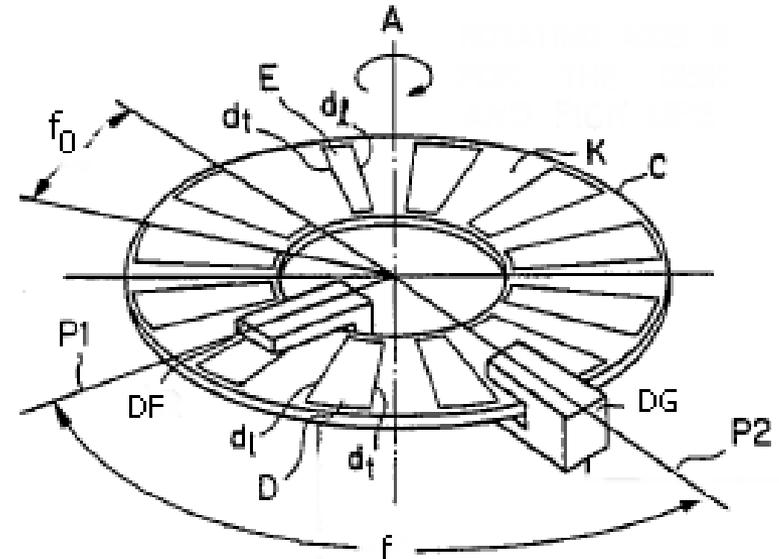
O sensor fixo e o sensor móvel fornecem um **par de sinais** eléctricos cuja diferença de fase varia de 2π quando o índice móvel percorre uma divisão claro-escuro (período) da graduação. A medição desta diferença de fase fornece a **interpolação** dentro de cada período da graduação, isto é, a medição fina, enquanto que a medição grosseira determina o número n de pares completos opaco/transparente que estão contidos no ângulo f .

Em geral, o limbo contém uma referência que permite que o número inteiro de períodos contido num ângulo seja obtido pela diferença entre o número de períodos detectados pelos sensores fixo e móvel à medida que a referência “passa” por esses índices.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

De uma forma mais exacta, considerando o limbo C, a marca de referência E é definida através da alteração da largura D e da distância K entre intervalos da graduação (separados por um ângulo f_0), de tal forma que o traço inicial de cada intervalo represente sempre uma divisão equidistante do limbo, utilizada para a medição fina do ângulo. O sensor móvel DG detecta a posição do limbo através da contagem do número de intervalos D; o sensor fixo DF detecta a posição do limbo de forma semelhante.

Os sinais produzidos em cada sensor pela alternância claro-escuro à medida que o limbo gira com velocidade angular constante permitem a determinação da respectiva diferença de fase, que pode traduzir-se no intervalo de tempo dt .



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Os sinais detectados pelos índices fixo e móvel correspondentes à alternância das divisões opaco/transparente estão representados na figura anterior. O ângulo f compreendido entre os 2 índices fixo e móvel, que será indicado digitalmente no ecran do teodolito, é obtido através da relação de fases dos sinais.

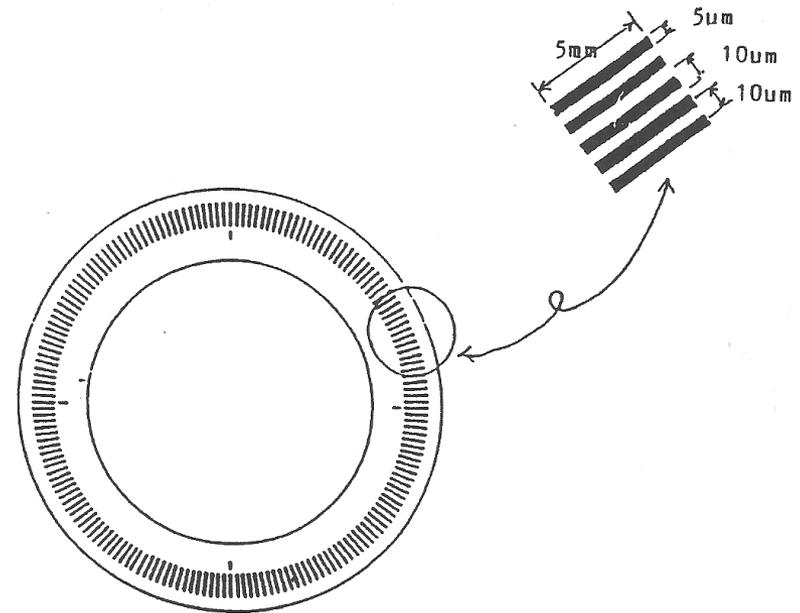
Se os 2 índices forem colineares ou estiverem a distâncias angulares cuja diferença seja um múltiplo de f_0 , os 2 sinais não se distinguem e o desfazamento df é nulo; caso contrário, os 2 índices registam a passagem de uma divisão com uma certa diferença de tempo dt , correspondente a df , podendo desta forma converter-se a medida de ângulo em medida de tempo, em que T_0 é o período de rotação do limbo:

$$f = n \times f_0 + \frac{dt}{T_0} \times f_0$$

medida medida
grosseira fina

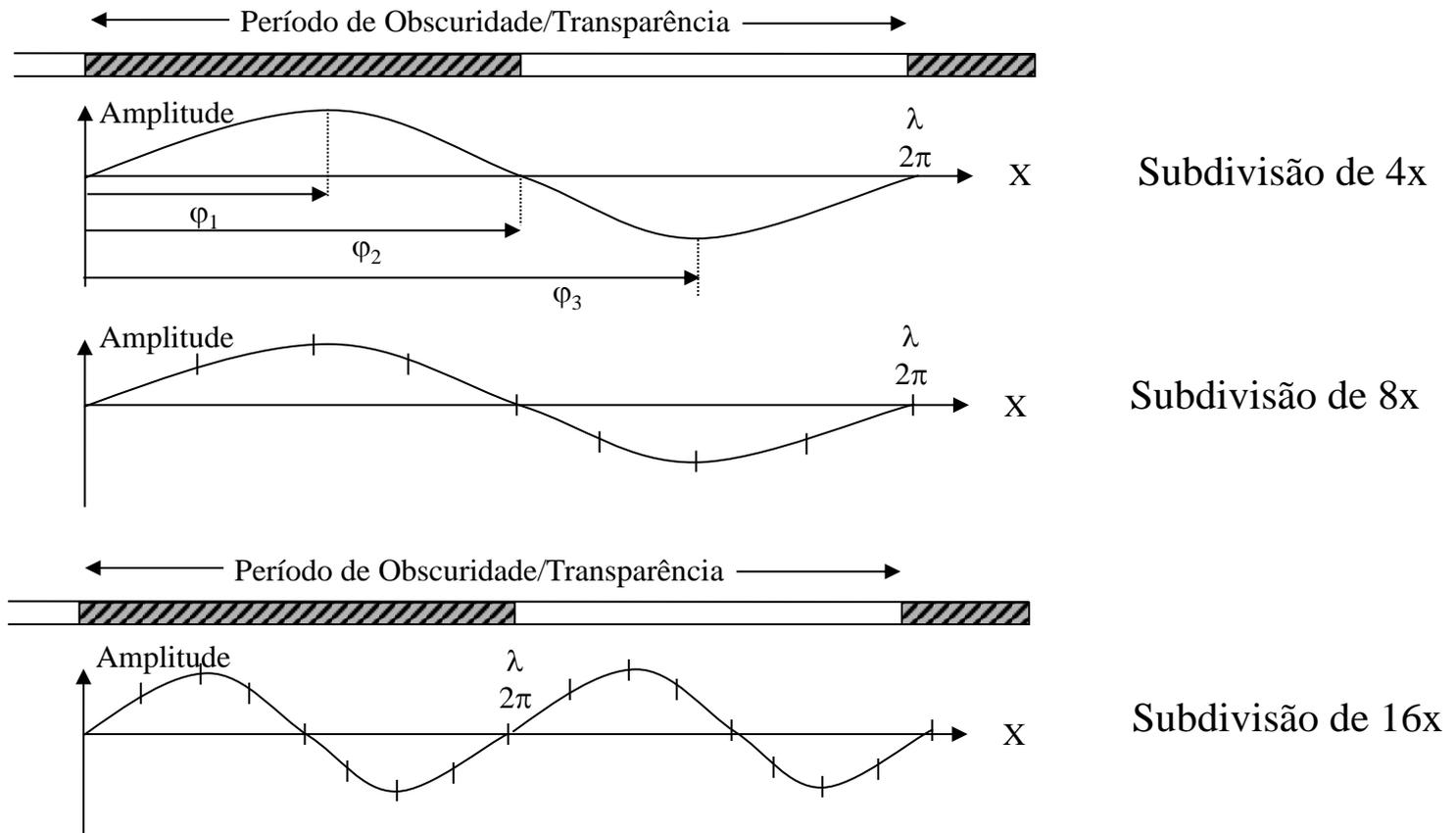
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Os limbos actuais têm **12500** ou mais intervalos de graduação, podendo ler directamente **1'**. A medição fina obtém-se utilizando a interpolação, a qual inclui a avaliação da intensidade da luz pelo fotodíodo: utiliza-se para o efeito uma subescala que consiste numa graduação semelhante à da escala mas desfazada $\frac{1}{4}$ da menor graduação, produzindo-se assim 2 ondas sinusoidais desfazadas $360^\circ/4=90^\circ$ uma em relação à outra (correspondendo uma onda a uma função seno e a outra a uma função coseno).



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Método de interpolação electrónica:



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Interpoladores electrónicos:

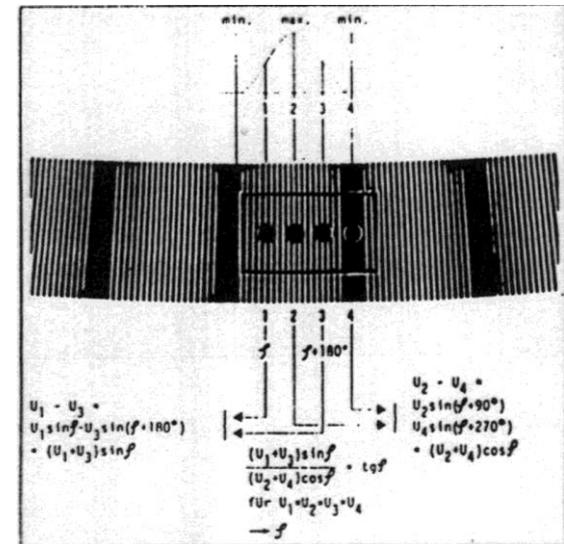
Interpoladores de média precisão: resolução de 0.001grad ($\approx 3''$) com 1200 incrementos.

Interpoladores de alta precisão: resolução de 0.1 a 0.2 mgrad ($\approx 0.5''$).

Método da coincidência — Usa as leituras diametralmente opostas para uma melhor estimação do valor angular;

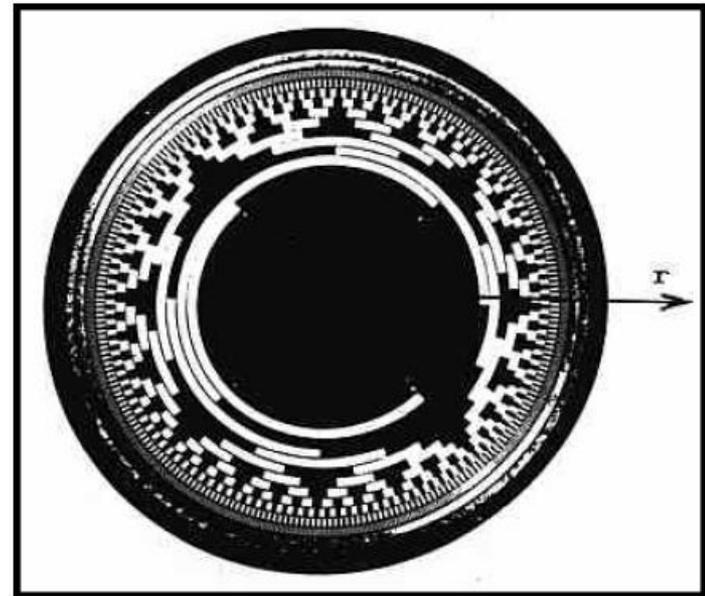
Método da comparação de fase —
Leitura de 4 sinais-seno desfasados de 90° ;

Interpoladores matemáticos — Um período é formado por um grupo de linhas num espaçadas num período de Moivre.



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Num segundo modelo (absoluto) consideram-se pistas opacas dispostas concentricamente e não na direcção radial. Associando o valor 0 (zero) quando a luz não passa e 1 (um) quando isto ocorre, e dispondo radialmente uma série de díodos, é possível associar cada posição do círculo a um código binário de zeros e uns numa determinada sequência.



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Nos teodolitos analógicos usa-se a **menor divisão do micrómetro ou da escala do microscópio como parâmetro para expressar a precisão nas leituras angulares**; neste sentido, um aparelho é mais preciso que outro se o respectivo limbo possuir maior raio ou se o micrómetro permitir maior ampliação para conseguir que a menor divisão que se consegue ler tenha uma resolução maior.

Nos teodolitos electrónicos, a menor divisão do limbo pode, em princípio, fazer-se tão pequena quanto se pretenda, já que se utiliza o método da interpolação e por esta razão a leitura efectuada não está relacionada divisão do limbo. É assim necessário definir para expressar a precisão das leituras, que consiste no desvio padrão de um conjunto de observações repetidas.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

T1000



T1600



T2002



T3000



aparelhos Wild digitais

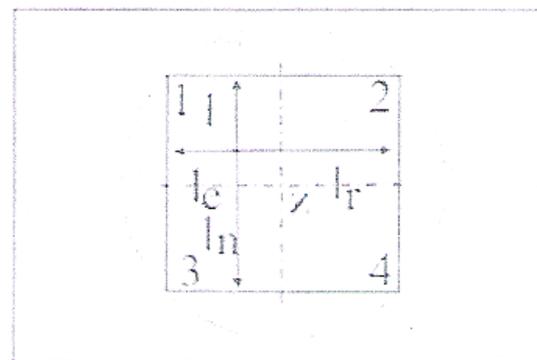
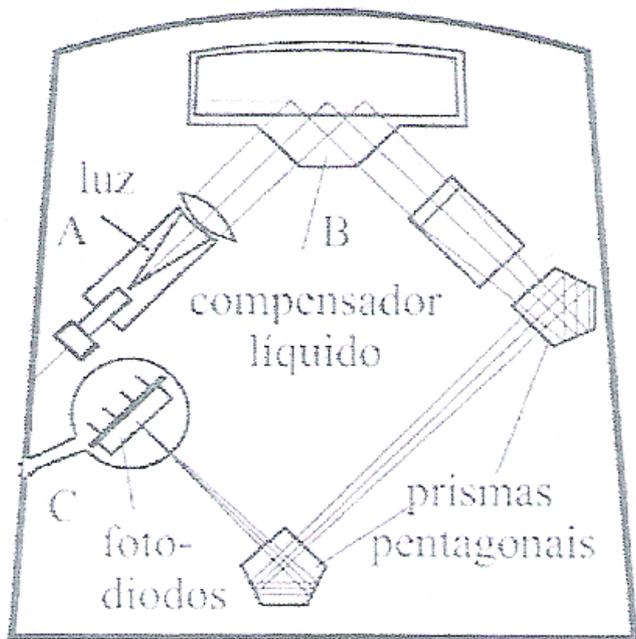
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

	T1000	T1600	T2002	T3000
Telescope	conventional	conventional	conventional	panfocal alignment telescope
Magnification	30×	30×	32×	43× (at infinity focus)
Field of view at 1000m	27m	27m	27m	20m
Shortest focusing distance	1.7m	1.7m	1.7m	0.6m
Angle measurement	continuous, absolute encoder	continuous, absolute encoder	absolute encoder, dynamic system, diametrical scanning	
Smallest unit in display	1", 1mgon, 0.01mil	1", 0.1mgon, 0.001mil	0.1", 0.01mgon, 0.00001°, 0.0001‰	
Updating time, continuous mode	0.1–0.3s (both circles)	0.1–0.3s (both circles)	0.3s for both circles	
Standard deviation based on DIN 18723	Hz: 3" (1mgon) V: 3" (1mgon)	Hz: 1.5" (0.5mgon) V: 1.5" (0.5mgon)	Hz: 0.5" (0.15mgon) V: 0.5" (0.15mgon)	
Automatic index	pendulum compensator	pendulum compensator	two-axis liquid compensator	Technical data as for T2002
Working range	±5' (±0.1gon)	±5' (±0.1gon)	3' (0.055gon) longitudinally and transversally	
Setting accuracy	±1" (±0.3mgon)	±1" (±0.3mgon)	0.1" (0.03mgon)	
Plate-level sensitivity	30" per 2mm	30" per 2mm	20" per 2mm	
Displays	LCDs; 2 displays in each telescope position; 8 figures with sign; symbols for operator guidance	2 LCD displays on both sides, 8 figures with sign, points, flags and symbols	LCDs; 8 figures with sign and decimal point, 1 alphanumeric display for operator guidance 2 displays for data	
Power supply	12V DC	12V DC	12V DC	
Plug-in battery	GEB77 0.45Ah	GEB77 0.45Ah	GEB68 2Ah	
External batteries	GEB70 2Ah GEB71 7Ah	GEB70 2Ah GEB71 7Ah	GEB70 2Ah GEB71 7Ah	
Weights				
Instruments	4.5kg 9.9lb	4.5kg 9.9lb	7.0kg 15.4lb	7.5kg 16.5lb
Container	3.9kg 8.6lb	3.9kg 8.6lb	5.5kg 12.1lb	5.5kg 12.1lb

especificações técnicas (aparelhos digitais)

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

As estações totais dispõem de **compensadores electrónicos** que permitem a correcção automática do erro de **verticalização do eixo principal**. O sistema é baseado na reflexão de um feixe de luz numa superfície líquida que permanece horizontal e que por essa razão pode ser utilizada como referência.



1-4 quadrantes

+ ponto de incidência de luz

↑ direção da luneta

← direção do eixo de inclinação

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O feixe gerado em A é reflectido na superfície líquida B e, após atravessar alguns componentes ópticos, atinge o fotodíodo C, onde o valor da corrente aí induzida permite determinar a posição do feixe emitido em relação ao ponto zero (z), o que por sua vez permite determinar a inclinação longitudinal (direcção da luneta) e a inclinação lateral (direcção do eixo secundário). Desta forma, as leituras de ângulos verticais e direcções horizontais são corrigidas automaticamente do erro de falta de verticalidade.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

No **armazém**, os teodolitos e níveis devem ser guardados fora da embalagem; as condições ambiente devem ser desfavoráveis à proliferação de fungos (evitar locais de pouca iluminação, humidade relativa alta e com pouca movimentação de ar). Alguns fabricantes recomendam o armazenamento em temperaturas próximas de 25°C e humidade relativa em torno de 50%. Em regiões de humidade relativa alta recomenda-se o uso de desumidificadores que retiram água do ambiente por condensação; evitar ficar muito tempo sem manusear os equipamentos, pois a permanência prolongada numa mesma posição pode provocar danos aos mesmos, como, por exemplo, endurecimento de lubrificantes, fungos localizados e problemas nos níveis de bolha (a bolha de ar permanecendo numa mesma posição por muito tempo pode favorecer o aparecimento de calosidades na parte interna polida dos tubos de nível, devido ao ataque do líquido no vidro ou mesmo por impurezas existentes no líquido de preenchimento).

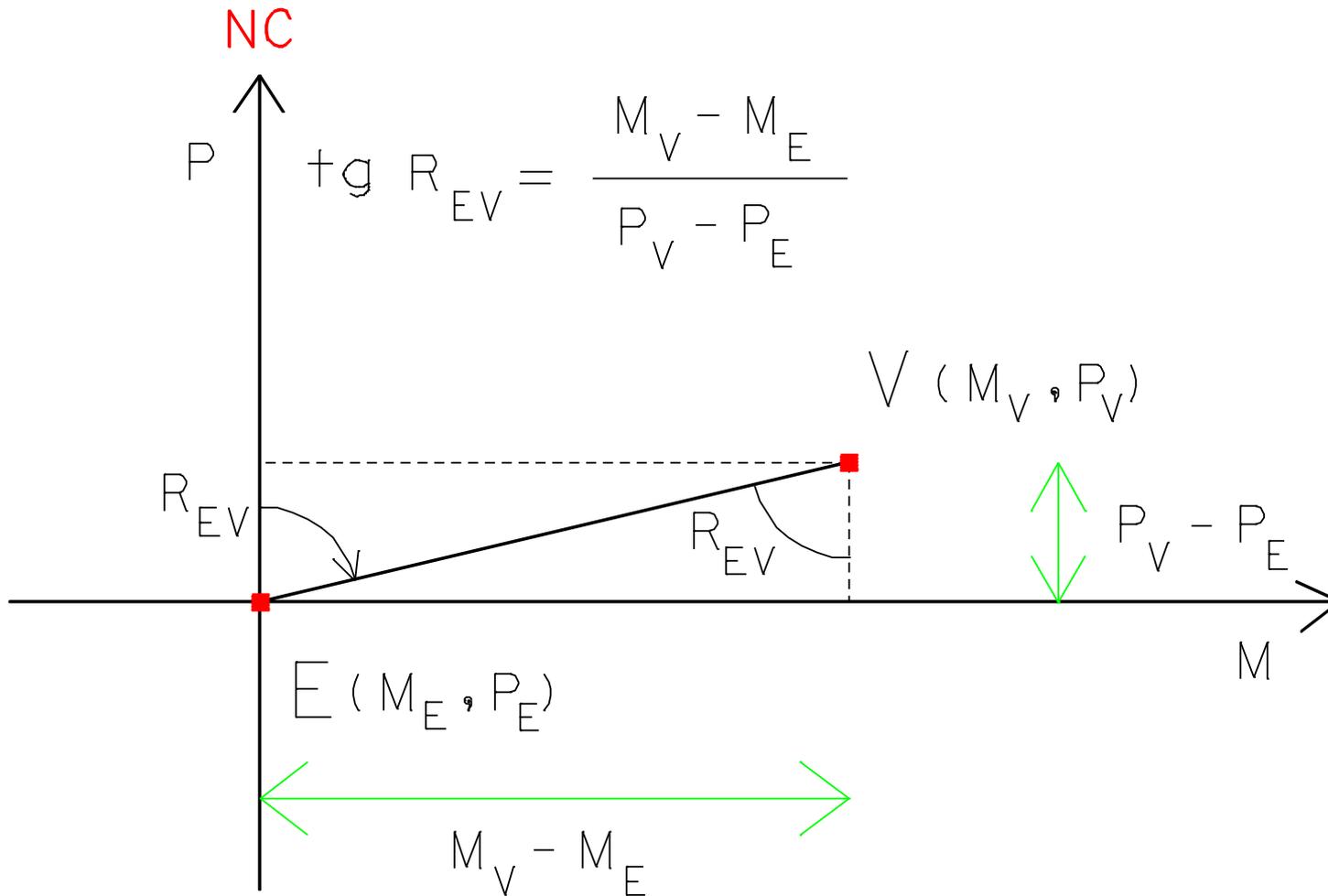
No **transporte**, na deslocação para o campo o instrumento deve estar acondicionado na sua embalagem original; deve-se evitar choques de qualquer natureza com o instrumento. Por isso, no veículo é aconselhável transportá-lo em local seguro e firme.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

No **trabalho**, é desaconselhável transportar o instrumento montado no tripé, principalmente em trechos longos e com o instrumento inclinado. É bom lembrar que, nesta situação, grande parte da força para manter o instrumento sobre a plataforma do tripé estará concentrada nas extremidades dos parafusos calantes, sendo que neste caso, o momento ao qual o parafuso está sendo submetido é diferente daquele para o qual foi projetado. Entretanto, em deslocamentos curtos, o transporte manual poderá ser efectuado com o instrumento à frente do corpo, em posição vertical, com a alidade e luneta imobilizadas; b) evitar tocar a superfície das lentes com os dedos e proteger o instrumento contra a chuva e poeira; mantenha o tripé bem fixo ao solo e, ao colocar o instrumento sobre o mesmo certifique-se se este foi devidamente fixado à plataforma do tripé com o parafuso próprio.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

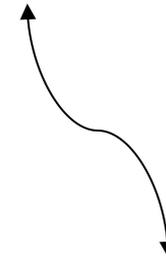
Rumo R_{EV} da direcção EV



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Sendo conhecidas as coordenadas (M_E, P_E) do ponto estação e (M_V, P_V) do ponto visado, o rumo da direcção EV é obtido por:

$$R_{EV} = \arctan \frac{M_V - M_E}{P_V - P_E}$$

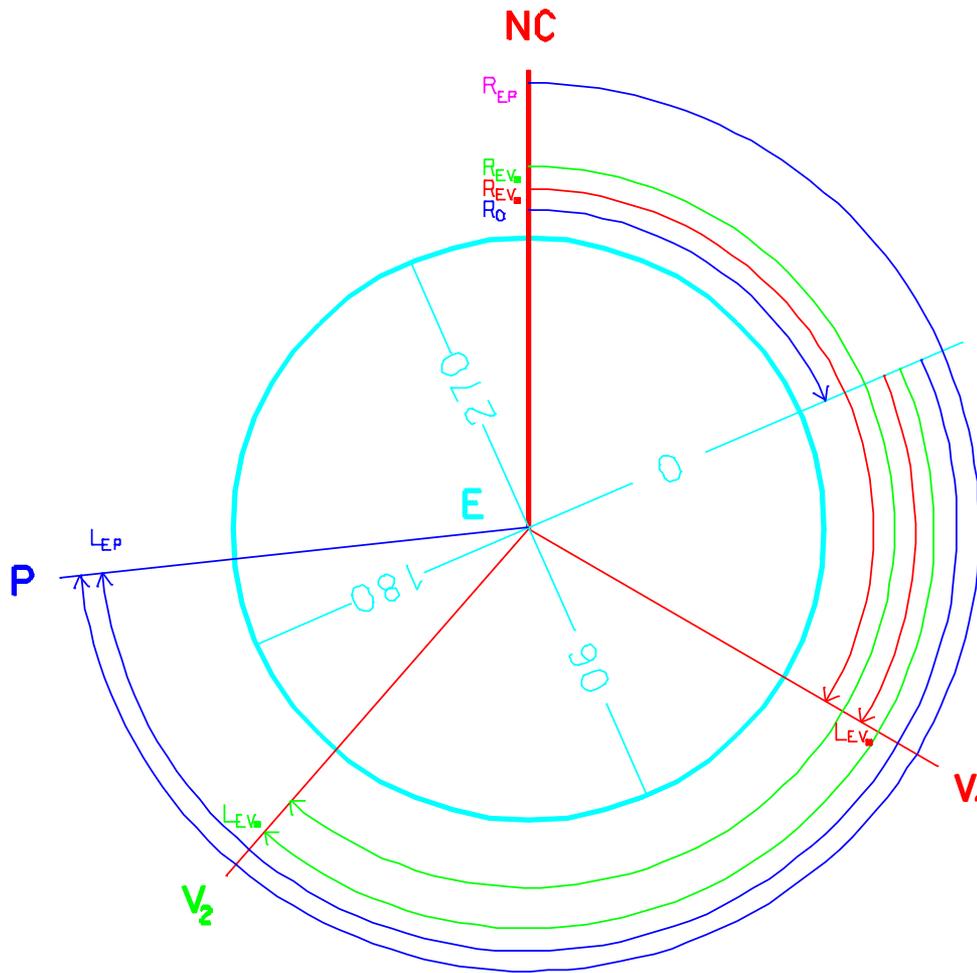


Se $M_V - M_E > 0$ e $P_V - P_E > 0$ (ou seja, $EV \in 1^\circ Q$): $R_{EV} = R_{EV}$

Se $P_V - P_E < 0$ (ou seja, $EV \in 2^\circ$ ou $3^\circ Q$): $R_{EV} = R_{EV} + 180^\circ$

Se $M_V - M_E < 0$ e $P_V - P_E > 0$ (ou seja, $EV \in 4^\circ Q$): $R_{EV} = R_{EV} + 360^\circ$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



$$R_{01} = R_{EV_1} - L_{EV_1}$$

$$R_{02} = R_{EV_2} - L_{EV_2}$$

$$R_0 = (R_{01} + R_{02})/2$$

$$R_{EP} = R_0 + L_{EP}$$

Rumo do zero da graduação (R_0): permite transformar leituras azimutais em rumos

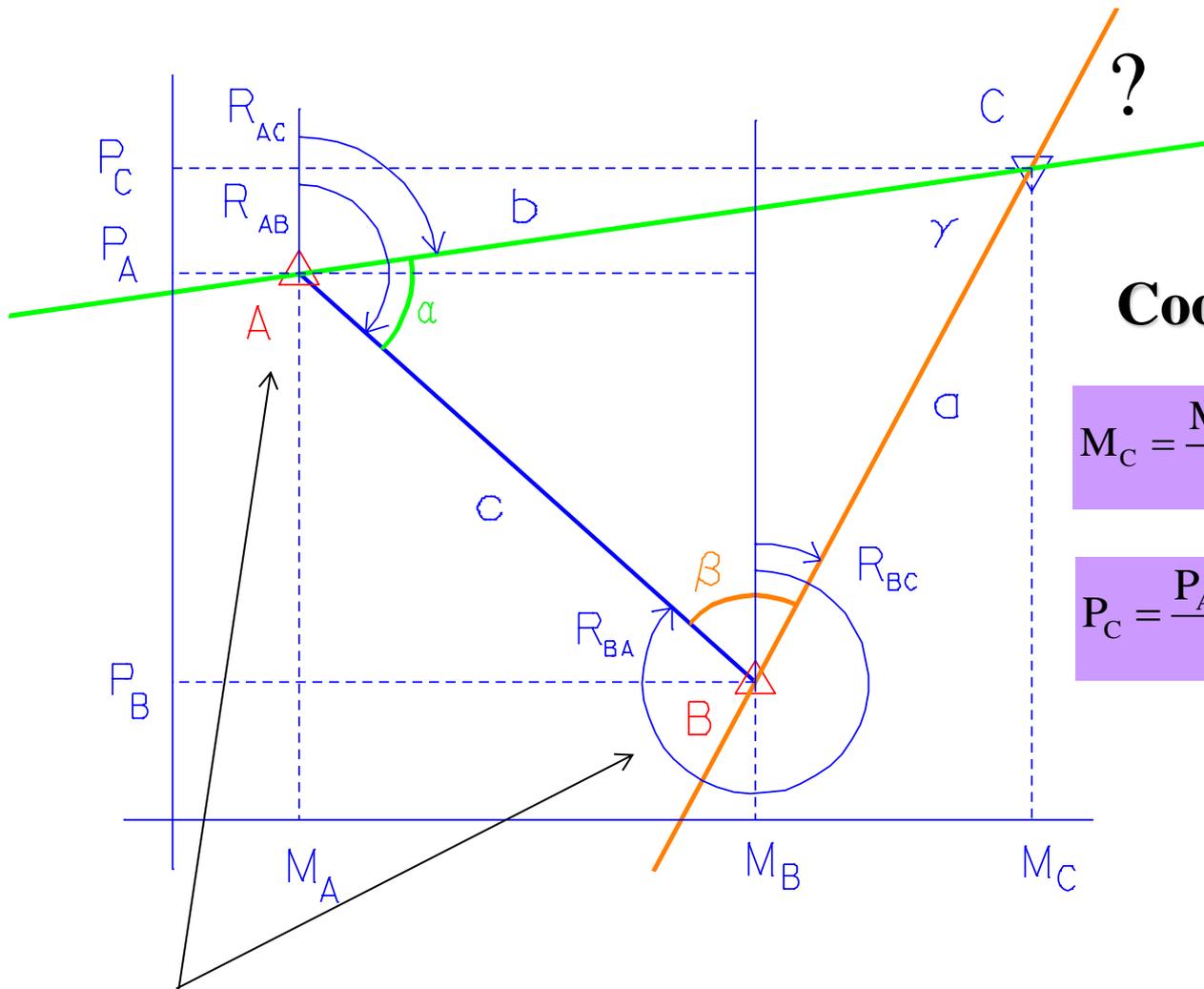
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Coordenação de um ponto por

Intersecção directa

O ponto a coordenar vai ser determinado por **intersecção de rectas**: cada recta contém um ponto estação, de coordenadas conhecidas, sendo conhecido o rumo da direcção ponto estação-ponto a coordenar (é assim necessário um mínimo de 2 rectas para definir a posição do ponto desconhecido).

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Coordenação do ponto C

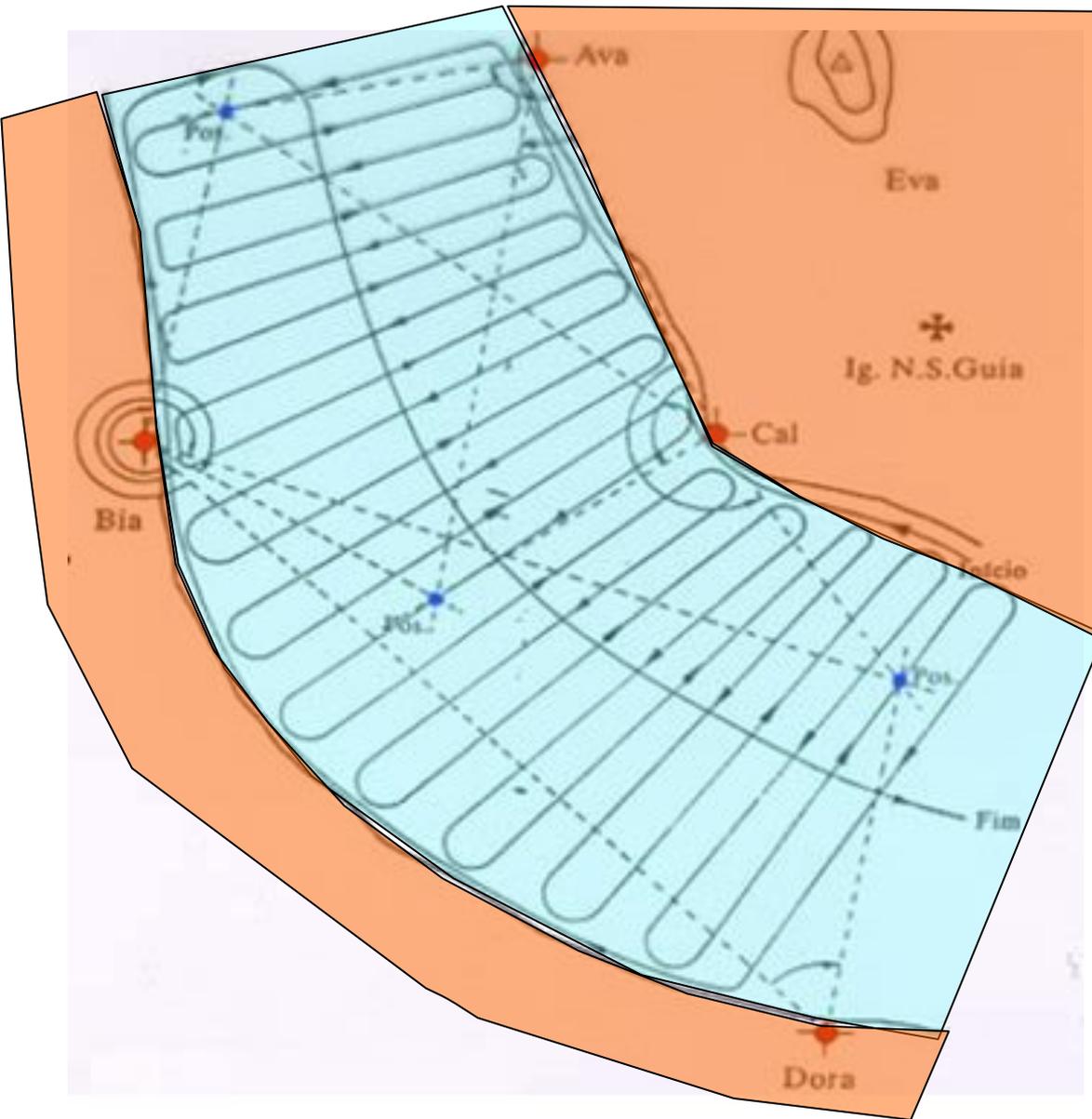
$$M_C = \frac{M_A \cotg \beta + M_B \cotg \alpha - (P_B - P_A)}{\cotg \alpha + \cotg \beta}$$

$$P_C = \frac{P_A \cotg \beta + P_B \cotg \alpha + (M_B - M_A)}{\cotg \alpha + \cotg \beta}$$

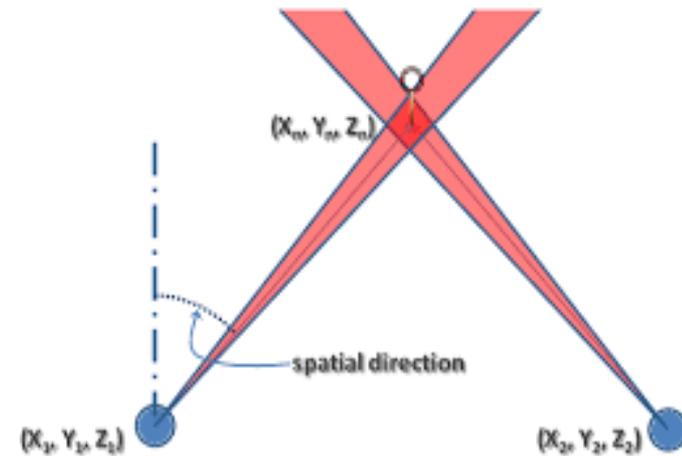
(com ângulos)

Pontos estacionados: **A** e **B**, de coordenadas **conhecidas:** a recta verde contém o ponto A e tem rumo R_{AC} e a recta encarnada contém o ponto B e tem rumo R_{BC}

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Exemplo de posicionamento de uma embarcação por intersecção directa num levantamento hidrográfico a partir de pelo menos 2 estações em terra



Indeterminação na posição devido à indeterminação nas direcções

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Dedução de M_C e P_C utilizando ângulos:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$c = \sqrt{(M_B - M_A)^2 + (P_B - P_A)^2}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \Rightarrow \sin \gamma = \sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta)$$

$$R_{AB} = a \tan \frac{M_B - M_A}{P_B - P_A}$$

$$R_{AC} = R_{AB} - \alpha$$

$$\sin R_{AB} = \sin(180^\circ - R_{AB}) = \frac{M_B - M_A}{c}$$

$$\cos R_{AB} = -\cos(180^\circ - R_{AB}) = -\frac{P_A - P_B}{c} = \frac{P_B - P_A}{c}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$$M_C = M_A + b \sin R_{AC} = M_A + c \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \sin(R_{AB} - \alpha) = c \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} (\sin R_{AB} \cos \alpha - \cos R_{AB} \sin \alpha) =$$

$$M_A + c \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \frac{M_B - M_A}{c} \cos \alpha - c \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \frac{P_B - P_A}{c} \sin \alpha =$$

$$M_A + \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} (M_B - M_A) - \frac{\sin \beta \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} (P_B - P_A) =$$

$$M_A + \frac{\frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin \beta \sin \alpha}}{\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\sin \beta \sin \alpha}} (M_B - M_A) - \frac{\frac{\sin \beta \sin \alpha}{\sin \beta \sin \alpha}}{\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\sin \beta \sin \alpha}} (P_B - P_A) =$$

$$M_A + \frac{\cotg \alpha}{\cotg \beta + \cotg \alpha} (M_B - M_A) - \frac{P_B - P_A}{\cotg \beta + \cotg \alpha} =$$

$$\frac{M_A \cotg \beta + M_A \cotg \alpha + M_B \cotg \alpha - M_A \cotg \alpha - (P_B - P_A)}{\cotg \beta + \cotg \alpha}$$

$$M_C = \frac{M_A \cotg \beta + M_B \cotg \alpha - (P_B - P_A)}{\cotg \alpha + \cotg \beta}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$$P_C = P_A + b \cos R_{AC} = P_A + c \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cos(R_{AB} - \alpha) = P_A + c \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} (\cos R_{AB} \cos \alpha + \sin R_{AB} \sin \alpha) =$$

$$P_A + c \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \frac{P_B - P_A}{c} \cos \alpha + c \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \frac{M_B - M_A}{c} \sin \alpha =$$

$$P_A + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} (P_B - P_A) + \frac{\sin \beta \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} (M_B - M_A) =$$

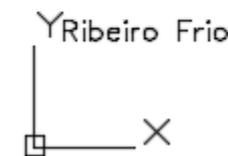
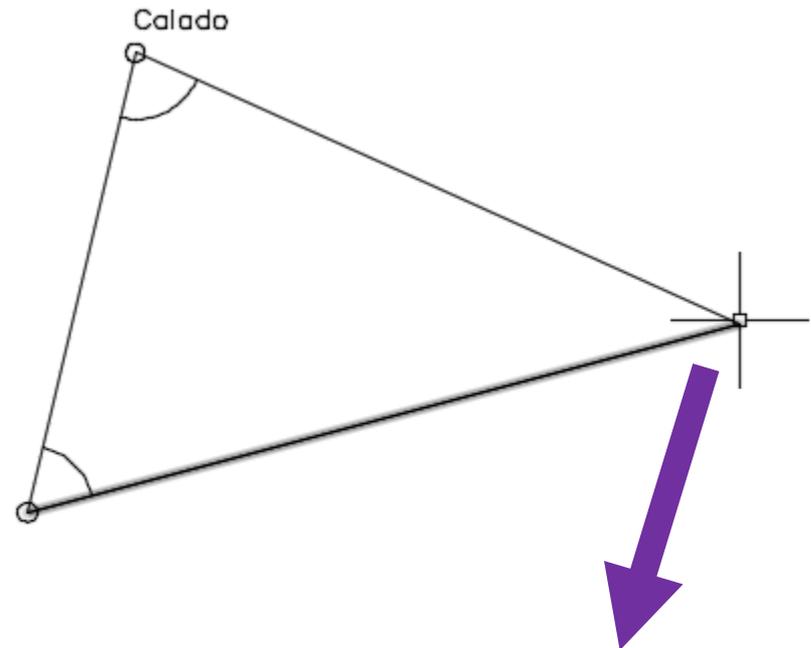
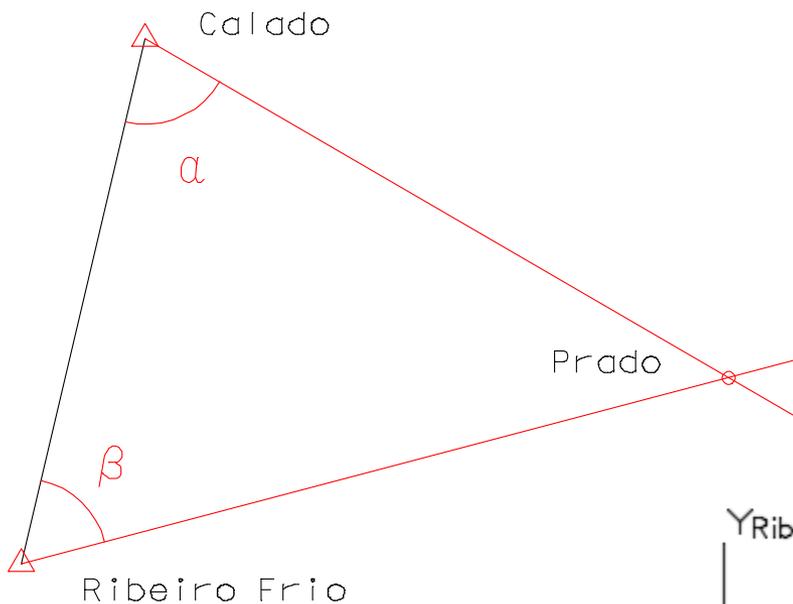
$$P_A + \frac{\frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta}}{\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta}} (P_B - P_A) + \frac{M_B - M_A}{\cotg \beta + \cotg \alpha} = P_A + \frac{\cotg \alpha}{\cotg \beta + \cotg \alpha} (P_B - P_A) + \frac{M_B - M_A}{\cotg \beta + \cotg \alpha} =$$

$$\frac{P_A \cotg \beta + P_A \cotg \alpha + P_B \cotg \alpha - P_A \cotg \alpha + (M_B - M_A)}{\cotg \alpha + \cotg \beta}$$

$$P_C = \frac{P_A \cotg \beta + P_B \cotg \alpha + (M_B - M_A)}{\cotg \alpha + \cotg \beta}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Exemplo: estacionando no ponto Calado observou-se o ângulo $\alpha = 78^\circ 35' 19.4''$ entre as visadas para o ponto Prado e o ponto Ribeiro Frio; estacionando no vértice Ribeiro Frio observou-se o ângulo $\beta = 61^\circ 59' 42.7''$ entre as visadas para o ponto Calado e o ponto Prado. Calcule as coordenadas planimétricas do ponto Prado sabendo que $M_{\text{Calado}}=123546.71$ m, $P_{\text{Calado}}=-94351.52$ m, $M_{\text{Ribeiro Frio}}=122986.44$ m, $P_{\text{Ribeiro Frio}}=-96766.98$ m.



```
Press ESC or ENTER to exit, or right-click to display shortcut menu.  
Command: '_id Specify point: X = 126684.926 Y = -95779.717 Z = 0.000
```

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Supondo Calado=A, Ribeiro Frio=B, Prado=C:

$$M_C = \frac{M_A \cotg \beta + M_B \cotg \alpha - (P_B - P_A)}{\cotg \alpha + \cotg \beta} =$$

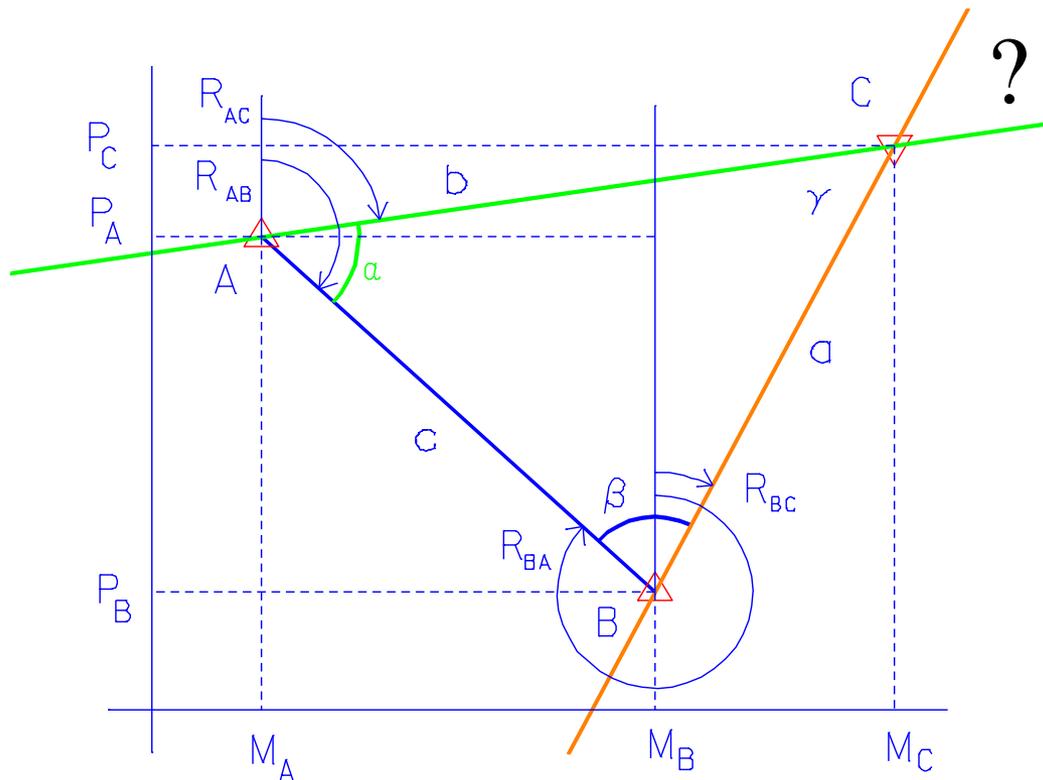
$$= \frac{123546.71 \cotg(61^{\circ}59'42.7'') + 122986.44 \cotg(78^{\circ}35'19.4'') - (-96766.98 + 94351.52)}{\cotg(78^{\circ}35'19.4'') + \cotg(61^{\circ}59'42.7'')} =$$
$$= \frac{65704.243305 + 24823.609432 + 2415.46}{0.201840 + 0.531817} = \frac{92943.312737}{0.733657} = 126684.967 \text{ m}$$

$$P_C = \frac{P_A \cotg \beta + P_B \cotg \alpha + (M_B - M_A)}{\cotg \alpha + \cotg \beta} =$$

$$= \frac{-94351.52 \cotg(61^{\circ}59'42.7'') - 96766.98 \cotg(78^{\circ}35'19.4'') + (122986.44 - 123546.71)}{\cotg(78^{\circ}35'19.4'') + \cotg(61^{\circ}59'42.7'')} =$$
$$= \frac{-50177.744322 - 19531.468001 - 560.27}{0.201840 + 0.531817} = \frac{-70269.482323}{0.733657} = -95779.748 \text{ m}$$

(a diferença entre as soluções gráfica e analítica deve-se a nesta última se reterem apenas 6 casas decimais)

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



(com rumos)

$$P_C = \frac{P_B \cotg R_{AC} - P_A \cotg R_{BC} + (M_A - M_B) \cotg R_{AC} \cotg R_{BC}}{\cotg R_{AC} - \cotg R_{BC}}$$

$$M_C = \frac{(P_B - P_A) + M_A \cotg R_{AC} - M_B \cotg R_{BC}}{\cotg R_{AC} - \cotg R_{BC}}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Dedução de M_C e P_C utilizando rumos:

$$R_{BC} = R_{AB} + \beta - 180^\circ$$

$$R_{AC} = R_{AB} - \alpha$$

$$\operatorname{tg} R_{BC} = \frac{M_C - M_B}{P_C - P_B} \Rightarrow P_C - P_B = (M_C - M_B) \operatorname{cotg} R_{BC} \Rightarrow P_C - M_C \operatorname{cotg} R_{BC} + M_B \operatorname{cotg} R_{BC} - P_B = 0$$

$$\operatorname{tg} R_{AC} = \frac{M_C - M_A}{P_C - P_A} \Rightarrow P_C - P_A = (M_C - M_A) \operatorname{cotg} R_{AC} \Rightarrow P_C - M_C \operatorname{cotg} R_{AC} + M_A \operatorname{cotg} R_{AC} - P_A = 0$$

$$M_C (\operatorname{cotg} R_{AC} - \operatorname{cotg} R_{BC}) + M_B \operatorname{cotg} R_{AC} - P_B + P_A = 0$$

$$M_C = \frac{(P_B - P_A) + M_A \operatorname{cotg} R_{AC} - M_B \operatorname{cotg} R_{BC}}{\operatorname{cotg} R_{AC} - \operatorname{cotg} R_{BC}}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$$P_C = P_B + M_C \cotg R_{BC} - M_B \cotg R_{BC} =$$

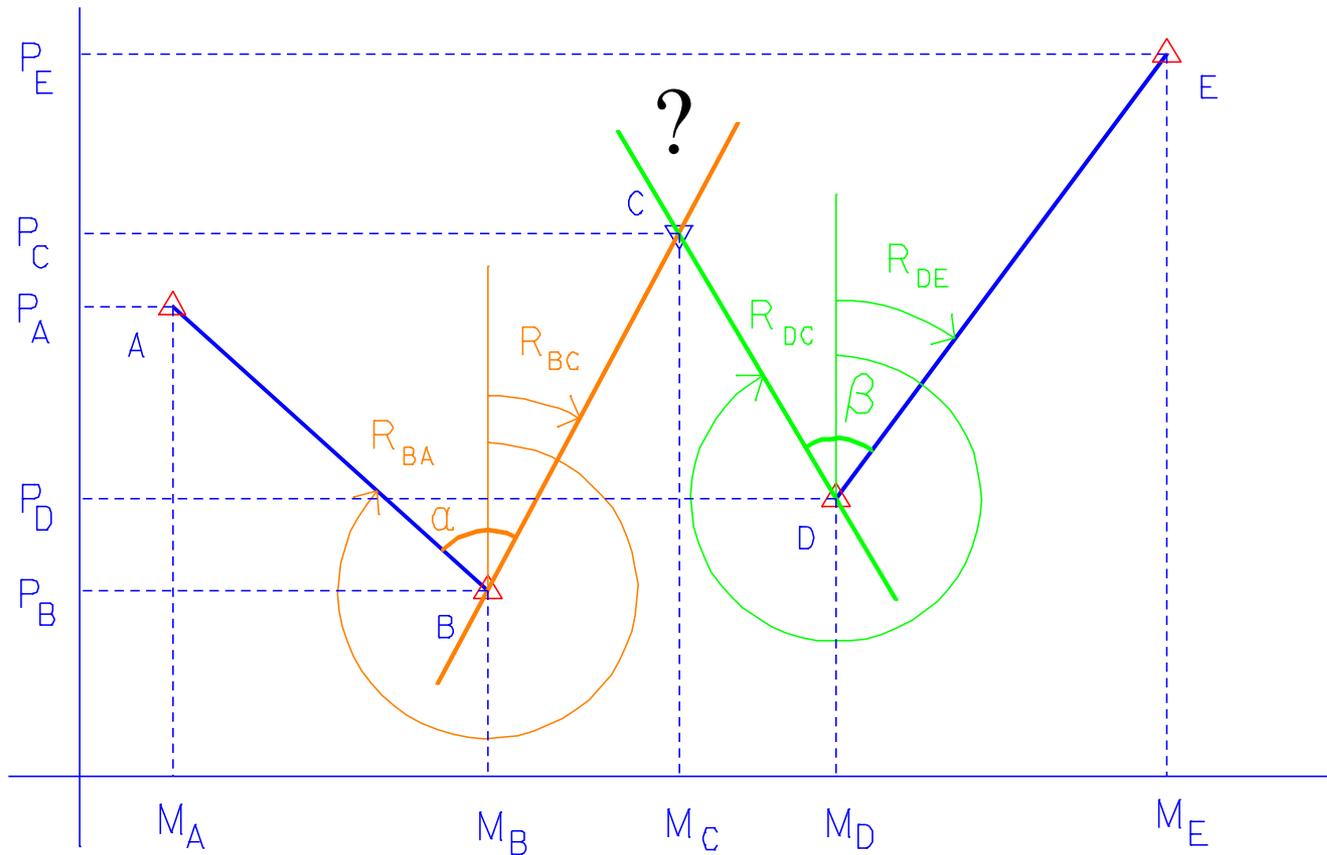
$$= P_B + \frac{(P_B - P_A) + M_A \cotg R_{AC} - M_B \cotg R_{BC}}{\cotg R_{AC} - \cotg R_{BC}} \cotg R_{BC} - M_B \cotg R_{BC} =$$

$$\frac{P_B \cotg R_{AC} - P_B \cotg R_{BC} + (P_B - P_A) \cotg R_{BC} + M_A \cotg R_{AC} \cotg R_{BC} - M_B \cotg R_{BC} \cotg R_{BC} - M_B \cotg R_{BC} \cotg R_{AC} + M_B \cotg R_{BC} \cotg R_{BC}}{\cotg R_{AC} - \cotg R_{BC}} =$$

$$= \frac{P_B \cotg R_{AC} - P_A \cotg R_{BC} + M_A \cotg R_{AC} \cotg R_{BC} - M_B \cotg R_{BC} \cotg R_{AC}}{\cotg R_{AC} - \cotg R_{BC}} =$$

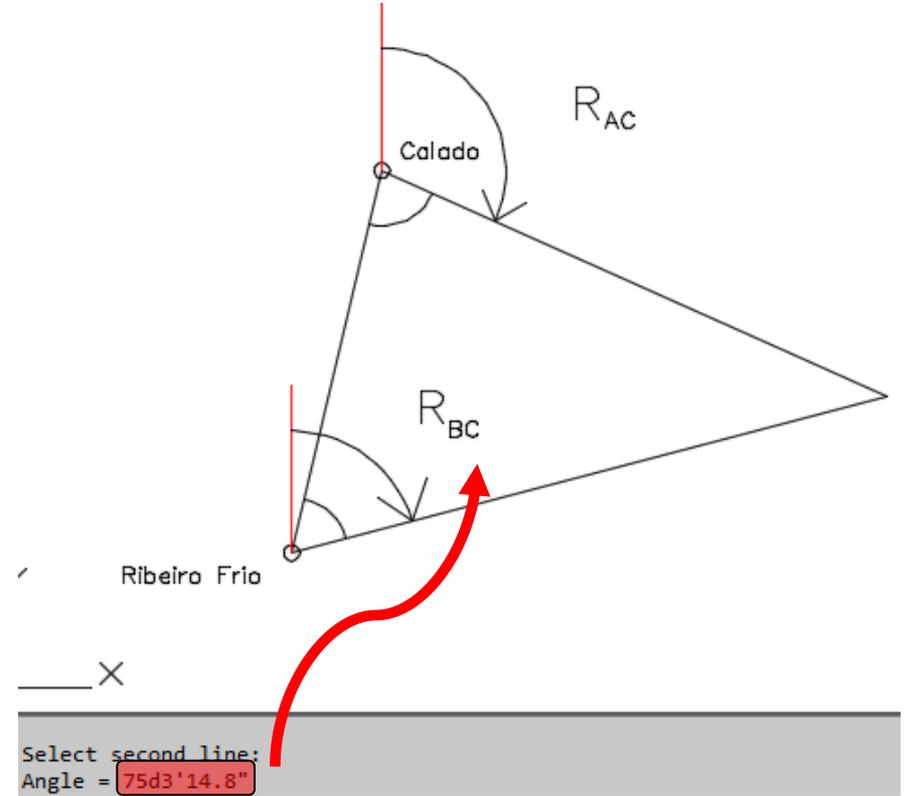
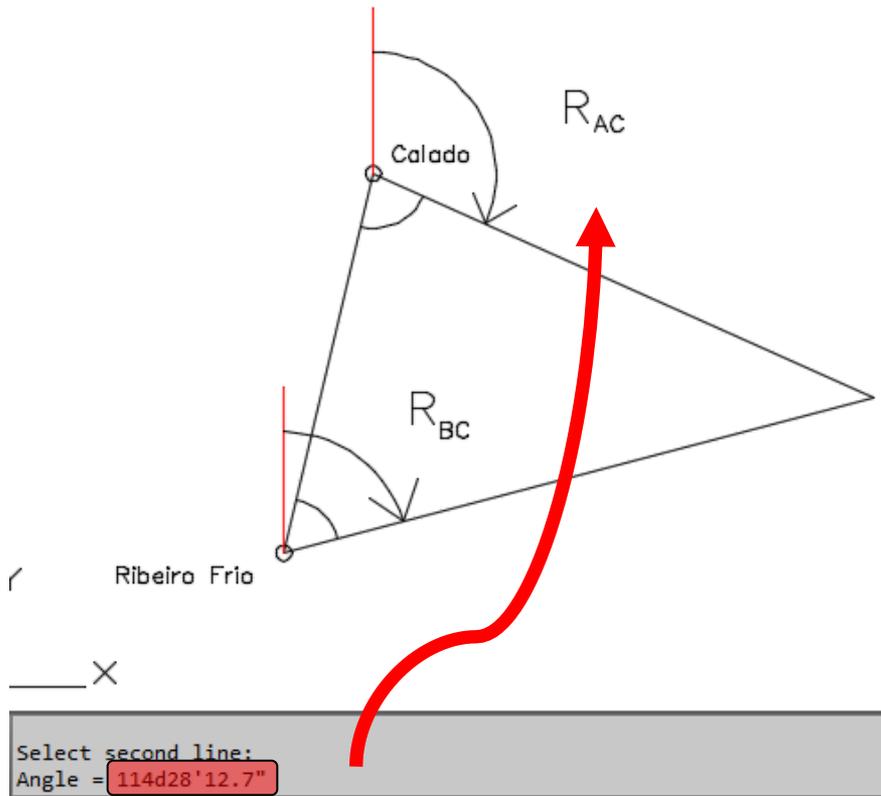
$$\frac{P_B \cotg R_{AC} - P_A \cotg R_{BC} + (M_A - M_B) \cotg R_{AC} \cotg R_{BC}}{\cotg R_{AC} - \cotg R_{BC}}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Outra configuração possível para a intersecção directa

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Em vez de os rumos R_{AC} e R_{BC} serem lidos no AutoCAD, depois das coordenadas do ponto C terem sido calculadas previamente, tem-se:

$$R_{AC} = R_{AB} - \alpha$$
$$R_{BC} = R_{BA} + \beta$$

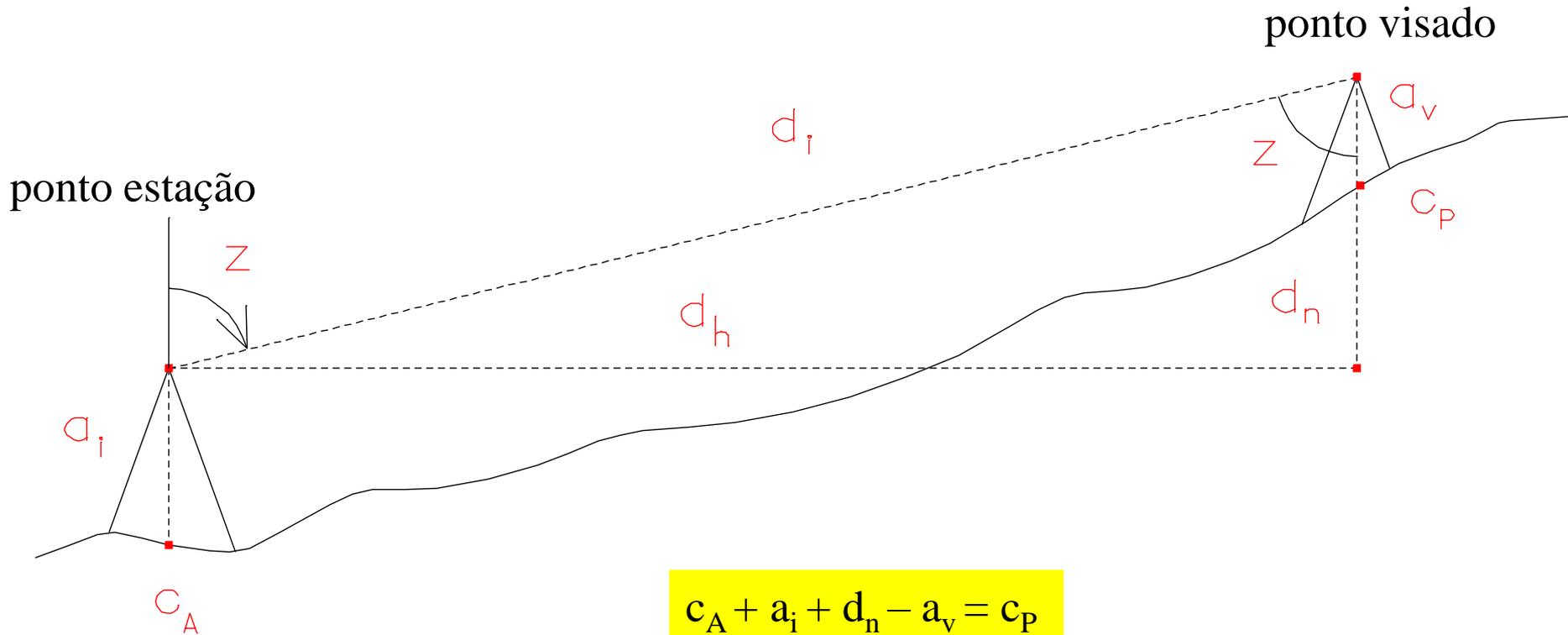
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$$M_C = \frac{(P_B - P_A) + M_A \cotg R_{AC} - M_B \cotg R_{BC}}{\cotg R_{AC} - \cotg R_{BC}} =$$
$$= \frac{(-96766.98 + 94351.52) + 123546.71 \cotg(114^\circ 28' 12.7'') - 122986.44 \cotg(75^\circ 3' 14.8'')}{\cotg(114^\circ 28' 12.7'') - \cotg(75^\circ 3' 14.8'')} =$$
$$\frac{-2415.46 - 56225.880366 - 32829.659015}{-0.455098 - 0.266937} = \frac{-91470.999381}{-0.722035} = 126684.994 \text{ m}$$

$$P_C = \frac{P_B \cotg R_{AC} - P_A \cotg R_{BC} + (M_A - M_B) \cotg R_{AC} \cotg R_{BC}}{\cotg R_{AC} - \cotg R_{BC}} =$$
$$= \frac{-96766.98 \cotg(114^\circ 28' 12.7'') + 94351.52 \cotg(75^\circ 3' 14.8'') + (123546.71 - 122986.44) \cotg(75^\circ 3' 14.8'') \cotg(114^\circ 28' 12.7'')}{\cotg(114^\circ 28' 12.7'') - \cotg(75^\circ 3' 14.8'')} =$$
$$= \frac{44038.474524 + 25185.932930 - 68.063079}{-0.455098 - 0.266937} = \frac{69156.344375}{-0.722035} = -95779.767 \text{ m}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Tendo calculado as coordenadas planimétricas do ponto pretendido, a cota desse ponto obtém-se da forma seguinte:



$$c_A + a_i + d_n - a_v = c_P$$

$$\tan z = d_h / d_n \Rightarrow d_n = d_h / \tan z$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Utilizando o programa **idirecta.for** tem-se:

prado.in

```
gs 0.002 5
'Prado' 2
'Calado' 123546.71 -94351.52 1 0 0 0.0
'Ribeiro Frio' 122986.44 -96766.98 78 35 19.4
'Ribeiro Frio' 122986.44 -96766.98 1 61 59 42.7
'Calado' 123546.71 -94351.52 0 0 0.0
```

prado.out

```
*****
Calculo por interseccao inversa das coordenadas do ponto Prado
*****
```

Leituras angulares em: graus sexagesimais

Tolerancia entre iteracoes consecutivas das coordenadas: .002 m

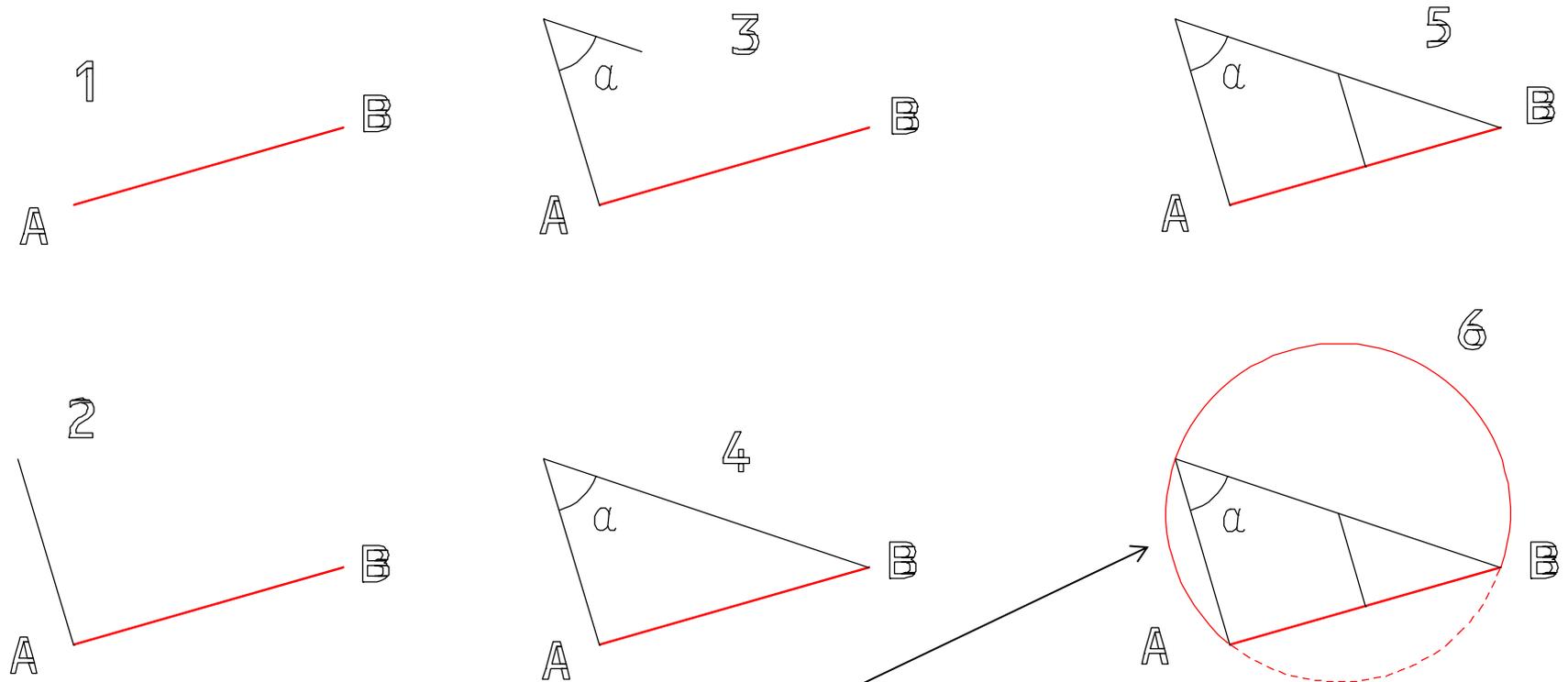
Precisao a priori das leituras azimutais: 5.0 segundos

Redundancia (planimetria): 0

Redundancia=0

Mp= 126684.926 m ;Pp= -95779.717 m

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



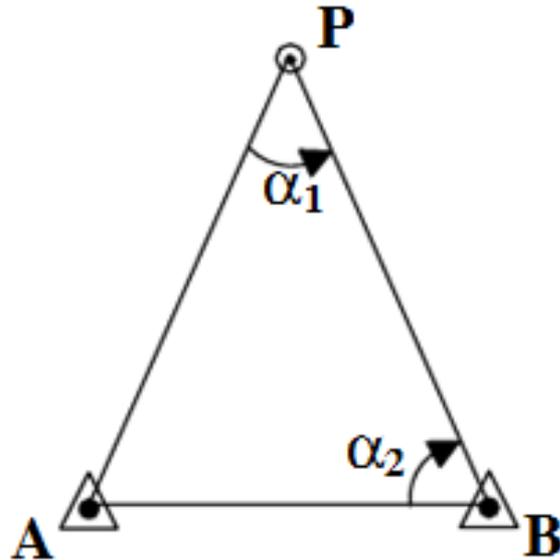
Construção do **arco capaz** que subtende o segmento AB segundo o ângulo α
(lugar geométrico dos pontos que subtendem AB segundo o ângulo α)

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Coordenação de um ponto por

Intersecção lateral

Na intersecção lateral, um dos pontos de coordenadas conhecidas não pode ser ocupado, sendo as observações efectuadas a partir de um dos pontos de coordenadas conhecidas e do ponto a ser determinado (geometricamente obtém-se por intersecção de uma recta e de um arco capaz).



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Condições favoráveis para a intersecção directa (e lateral)

Analizando as fórmulas, pode verificar-se que em função das figuras observadas, diferente será a propagação de erros, sendo as seguintes condições consideradas óptimas:

- 1) Triângulo rectângulo em P
- 2) O ângulo do vértice P próximo de 90° e os 2 outros maiores que 30°
- 3) Triângulo equilátero
- 4) Lados maiores que 300 metros

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

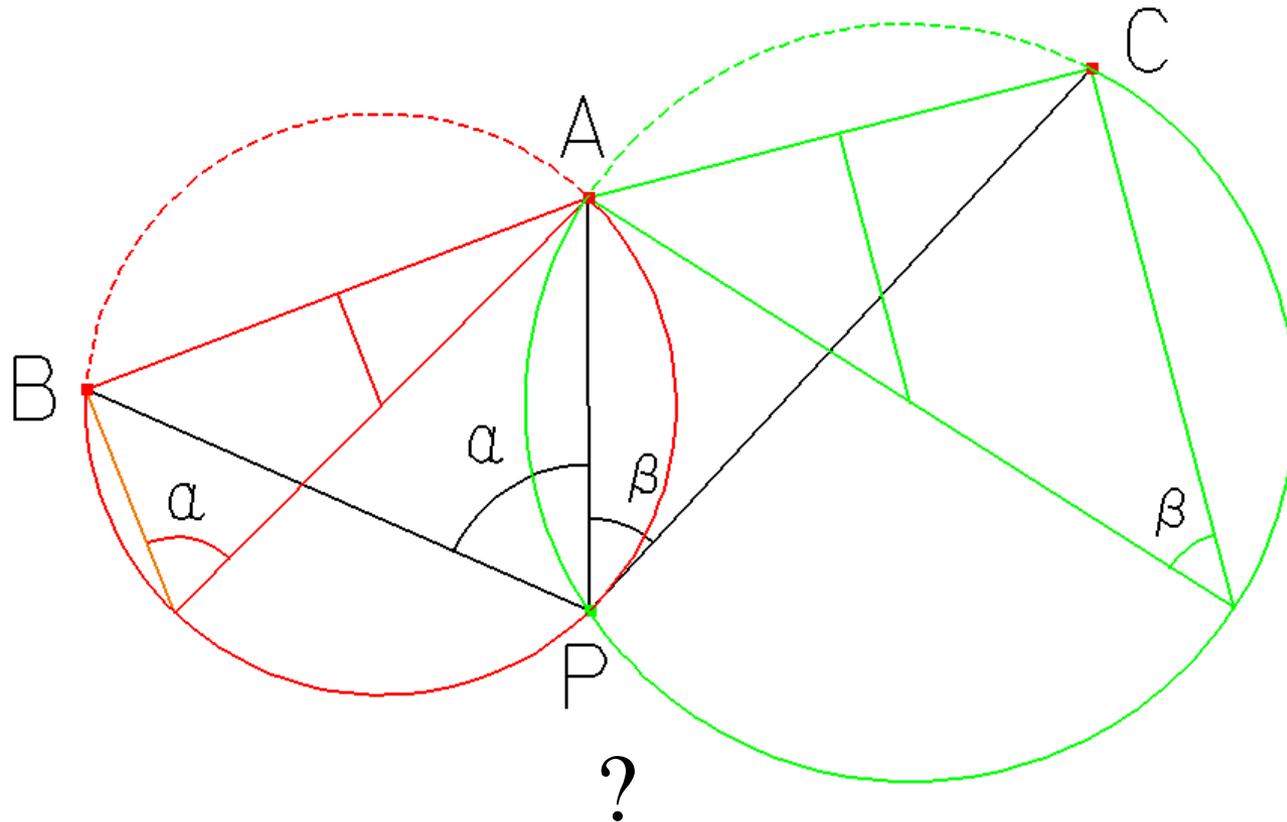
Coordenação de um ponto por

Intersecção inversa

O ponto a coordenar vai ser determinado por **intersecção de arcos de circunferência**: cada circunferência contém o ponto estação, de coordenadas desconhecidas e dois pontos visados, de coordenadas conhecidas (é assim necessário um mínimo de 2 circunferências para definir a posição do ponto desconhecido).

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Quando os ângulos α e β entre direcções para 3 pontos A, B e C de coordenadas conhecidas são observados a partir de um ponto P de coordenadas desconhecidas é possível coordenar o ponto estação através de um procedimento designado por intersecção inversa, cuja representação gráfica é:

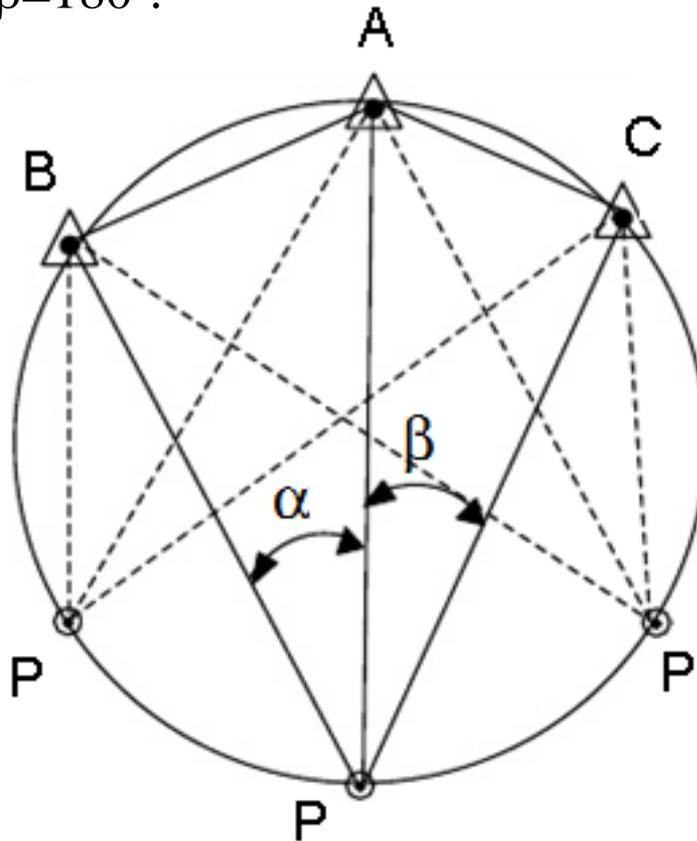


LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

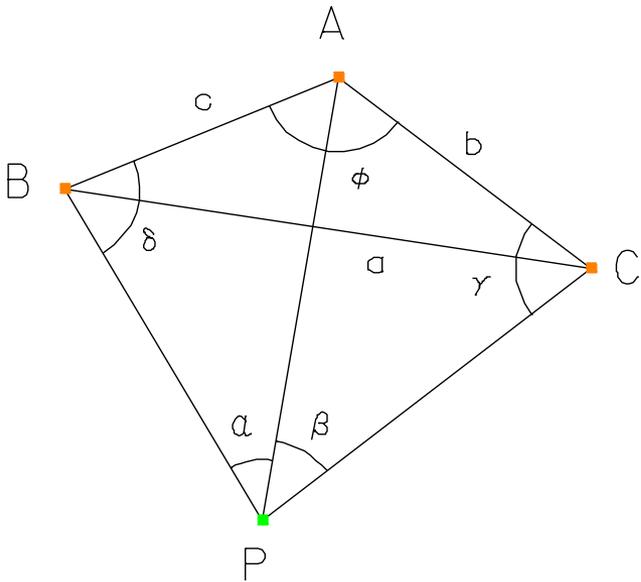
Se o ângulo α entre PB e PA for observado, a posição de P permanece indeterminada pois este último pode estar localizado em qualquer ponto do arco capaz que subtende para o segmento BA o ângulo α (este arco capaz contém os pontos B, A e P). É então necessária informação adicional para tornar o problema determinado, como seja o ângulo β definido pelas pontaria para A e C, a partir do qual se determina o arco capaz que subtende para AC o ângulo β (este arco capaz contém os pontos A, C e P). Como o ponto P tem que pertencer aos dois arcos capazes, a sua posição terá que estar na respectiva intersecção e como A define uma dessas intersecções, o ponto P fica unívocamente determinado.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

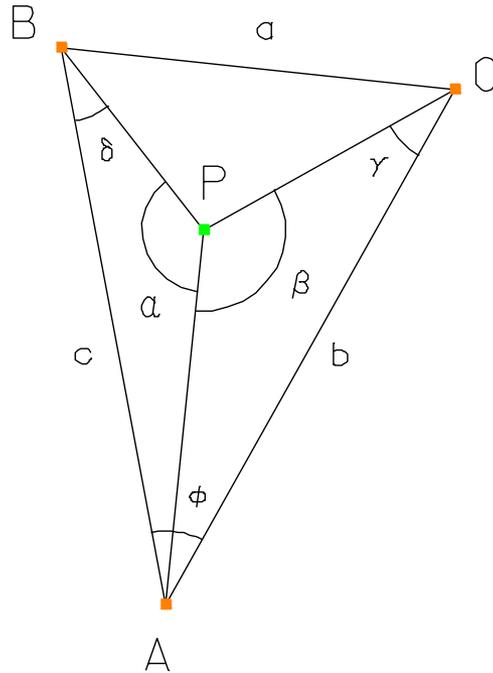
Esta solução presuppõe que os 4 pontos A, B, C e P não pertençam à mesma circunferência (**circunferência perigosa**) pois assim os dois arcos capazes coincidiriam, não se obtendo solução para o problema. Quando esta situação acontece tem-se $BAC + \alpha + \beta = 180^\circ$.



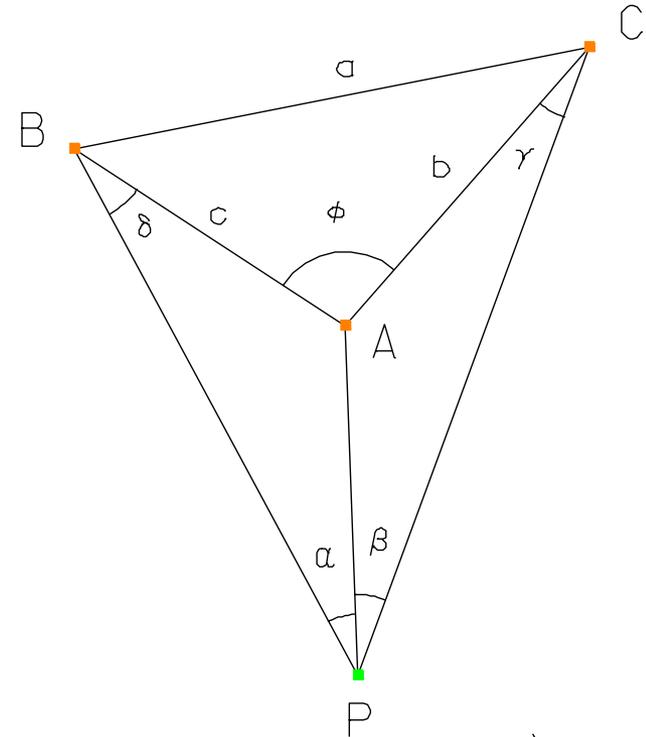
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



a)



b)



c)

3 configurações possíveis para os pontos A, B, C e P

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$$\phi = R_{AB} - R_{AC} \quad \text{caso a)}$$

$$\phi = 360^\circ + R_{AC} - R_{AB} \quad \text{casos b) e c)}$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \phi + \delta = 360^\circ \Rightarrow \delta + \gamma = 360^\circ - (\alpha + \beta + \phi) = \psi \quad \text{casos a) e b)}$$

$$\alpha + \delta + \beta + \gamma - \phi = 0^\circ \Rightarrow \delta + \gamma = \phi - \alpha - \beta = \psi \quad \text{caso c)}$$

$$AP = \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{c \sin \delta}{\sin \alpha} \Rightarrow \sin \delta = \frac{b \sin \gamma \sin \alpha}{c \sin \beta} = \sin(\psi - \gamma) = \sin \psi \cos \gamma - \cos \psi \sin \gamma$$

dividindo por $\sin \psi \sin \gamma$

$$\cotan \gamma = \cotan \psi + \frac{b \sin \alpha}{c \sin \beta \sin \psi}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O procedimento analítico é então:

1) Calcular ψ

2) Calcular γ

3) Calcular $\delta = \psi - \gamma$

4) Calcular a distância AP usando b, γ e β . Confirmar com c, δ e α

5) Calcular o ângulo $CAP = 180^\circ - (\gamma + \beta)$ para determinar a direcção AP

Confirmar com o ângulo BAP

6) Obter PC e/ou PB através da lei dos senos

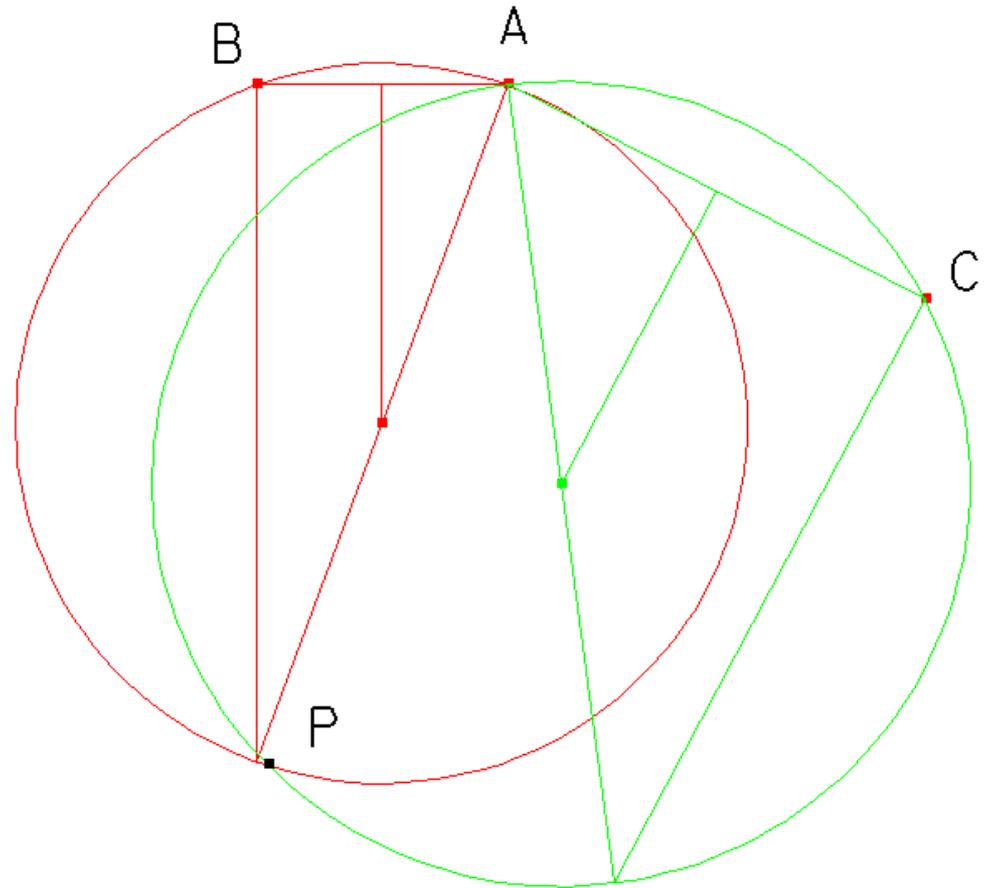
7) Calcular e confirmar as coordenadas de P

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Exemplo:

ponto	M (m)	P (m)
B	10 000.00	20 000.00
A	16 672.50	20 000.00
C	27 732.76	14 215.24

$$\alpha = 20^{\circ} 05' 53'' \quad \beta = 35^{\circ} 06' 08''$$



Resolução gráfica

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$$R_{AB} = a \tan \frac{M_B - M_A}{P_B - P_A} = 270^\circ$$

pois $P_B = P_A$ e $M_B < M_A$

$$R_{AC} = a \tan \frac{M_C - M_A}{P_C - P_A} = a \tan \frac{2773276 - 1667250}{1421524 - 2000000} = a \tan \frac{1106026}{-578476} = -62^\circ 23' 22''$$

como AC ε 2º quadrante,

$$R_{AC} = 180^\circ - 62^\circ 23' 22'' = 117^\circ 36' 38''$$

$$\phi = R_{AB} - R_{AC} = 152^\circ 23' 23''$$

$$\psi = 360^\circ - (\alpha + \beta + \phi) = 152^\circ 24' 36''$$

$$c = \sqrt{(M_B - M_A)^2 + (P_B - P_A)^2} = 6672.5$$

$$b = \sqrt{(M_C - M_A)^2 + (P_C - P_A)^2} = 12481.70$$

$$\cotan \gamma = 0.501312$$

$$\gamma = 63^\circ 22' 29''$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$$\delta = \psi - \gamma = 89^\circ 02' 07''$$

$$AP = \frac{c \sin \delta}{\sin \alpha} = 19415.06$$

$$CAP = 180^\circ - (\gamma + \beta) = 81^\circ 31' 23''$$

$$R_{AP} = R_{AC} + CAP = 199^\circ 08' 01''$$

$$\begin{cases} M_P = M_A + AP \sin R_{AP} = 10308.78 \\ P_P = P_A + AP \cos R_{AP} = 1657.49 \end{cases}$$

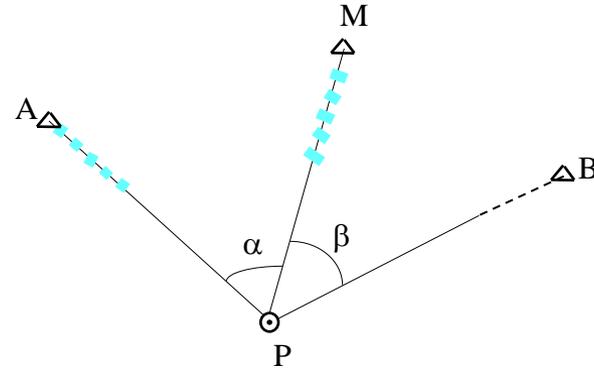
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Outras fórmulas:

Dados: (M_A, P_A) ; (M_M, P_M) ; (M_B, P_B) ;

Observações: $\alpha = \widehat{A\hat{P}M}$ e $\beta = \widehat{M\hat{P}B}$

Incógnitas: (M_P, P_P)



Seja $T_C = \text{tg}(R_{PC}) = \frac{M_C - M_P}{P_C - P_P}$ para C qualquer

Então $M_P = M_A - (P_A - P_P)T_A$; (1a)

$$M_P = M_B - (P_B - P_P)T_B; \quad (1b)$$

$$M_P = M_M - (P_M - P_P)T_M \quad (1c)$$

Igualando (1a) e (1c) e resolvendo em ordem a P_P obtém-se:

$$P_P = \frac{M_M - M_A - P_M T_M + P_A T_A}{T_A - T_M}$$

De forma análoga com as outras combinações, obtém-se formulas idênticas.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Assim, tem-se para P_P :

$$P_P = \frac{M_M - M_A - P_M T_M + P_A T_A}{T_A - T_M}; \quad (2a)$$

$$P_P = \frac{M_B - M_A - P_B T_B + P_A T_A}{T_A - T_B}; \quad (2b)$$

$$P_P = \frac{M_B - M_M - P_B T_B + P_M T_M}{T_M - T_B} \quad (2c)$$

Agora com (2c) e (2a) multiplicadas por -1:

$$[(M_A - M_M) - P_A T_A + P_M T_M](T_B - T_M) = [(M_M - M_B) - P_M T_M + P_B T_B](T_M - T_A) \quad (3)$$

Foram eliminadas as coordenadas de P (M_P, P_P)

Resolvendo (3) e deduzindo uma expressão para T_M :

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Nota 1): $\alpha = R_{PM} - R_{PA} \Leftrightarrow R_{PA} = R_{PM} - \alpha;$
 $\beta = R_{PB} - R_{PM} \Leftrightarrow R_{PB} = R_{PM} + \beta;$

Com $\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}}{1 - \operatorname{tga} \operatorname{tgb}} = \frac{\operatorname{tga} \cot \operatorname{gb} + 1}{\cot \operatorname{gb} - \operatorname{tga}}$

tem-se $T_A = \frac{T_M - \operatorname{tga}}{1 + T_M \operatorname{tga}} = \frac{T_M \cot \alpha - 1}{\cot \alpha + T_M}$ $T_B = \frac{T_M + \operatorname{tg}\beta}{1 - T_M \operatorname{tg}\beta} = \frac{T_M \cot \beta + 1}{\cot \beta - T_M}$

Nota 2): $T_M - T_A = T_M - \frac{T_M - \operatorname{tga}}{1 + T_M \operatorname{tga}} = \frac{1 + T_M^2}{\cot \alpha + T_M}$

$$T_B - T_M = \frac{T_M + \operatorname{tg}\beta}{1 - T_M \operatorname{tg}\beta} - T_M = \frac{1 + T_M^2}{\cot \beta - T_M}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Substituindo as expressões anteriores de T_A e T_B :

$$\begin{aligned} & \left[(M_A - M_M) - P_A \left(\frac{T_M \cot g\alpha - 1}{\cot g\alpha + T_M} \right) + P_M T_M \right] \left(\frac{1 + T_M^2}{\cot g\beta - T_M} \right) = \\ & = \left[(M_M - M_B) - P_M T_M + P_B \left(\frac{T_M \cot g\beta + 1}{\cot g\beta - T_M} \right) \right] \left(\frac{1 + T_M^2}{\cot g\alpha + T_M} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[(M_A - M_M) - P_A \left(\frac{T_M \cot g\alpha - 1}{\cot g\alpha + T_M} \right) + P_M T_M \right] (\cot g\alpha + T_M) = \\ & = \left[(M_M - M_B) - P_M T_M + P_B \left(\frac{T_M \cot g\beta + 1}{\cot g\beta - T_M} \right) \right] (\cot g\beta - T_M) \end{aligned}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Fazendo a multiplicação:

$$\begin{aligned} & (M_A - M_M)(\cot g\alpha + T_M) - P_A(T_M \cot g\alpha - 1) + P_M T_M (\cot g\alpha + T_M) = \\ & = (M_M - M_B)(\cot g\beta - T_M) - P_M T_M (\cot g\beta - T_M) + P_B(T_M \cot g\beta + 1) \end{aligned}$$

Desenvolvendo, cortando os termos simétricos e resolvendo em ordem a T_M , vem finalmente:

Fórmula de Delambre

$$T_M = \frac{(P_B - P_A) + (M_M - M_A)\cot g\alpha + (M_M - M_B)\cot g\beta}{(M_A - M_B) + (P_M - P_A)\cot g\alpha + (P_M - P_B)\cot g\beta}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

1 – Calcular T_M
$$T_M = \frac{(P_B - P_A) + (M_M - M_A)\cot\alpha + (M_M - M_B)\cot\beta}{(M_A - M_B) + (P_M - P_A)\cot\alpha + (P_M - P_B)\cot\beta}$$

2 – Calcular T_A e T_B

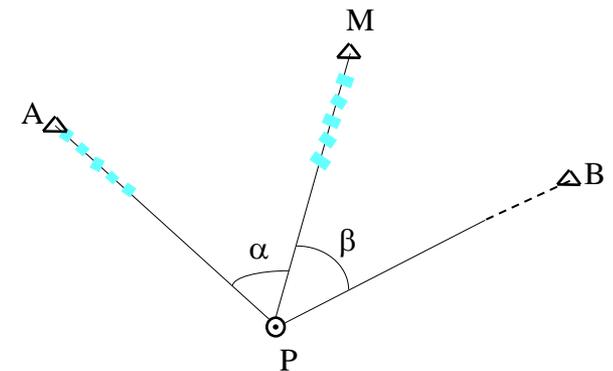
$$T_A = \frac{T_M - \text{tg}\alpha}{1 + T_M \text{tg}\alpha} \quad T_B = \frac{T_M + \text{tg}\beta}{1 - T_M \text{tg}\beta}$$

3 – Calcular P_P com T_A , T_B ou T_M

$$P_P = \frac{M_M - M_A - P_M T_M + P_A T_A}{T_A - T_M}$$

4 – Calcular M_P com T_A , T_B ou T_M e P_P

$$M_P = M_A - (P_A - P_P)T_A$$



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

- 3 direcções (2 ângulos) – cálculo directo
- 4 ou mais direcções (≥ 3 ângulos) – cálculo por ajustamento

Método dos Giros do Horizonte

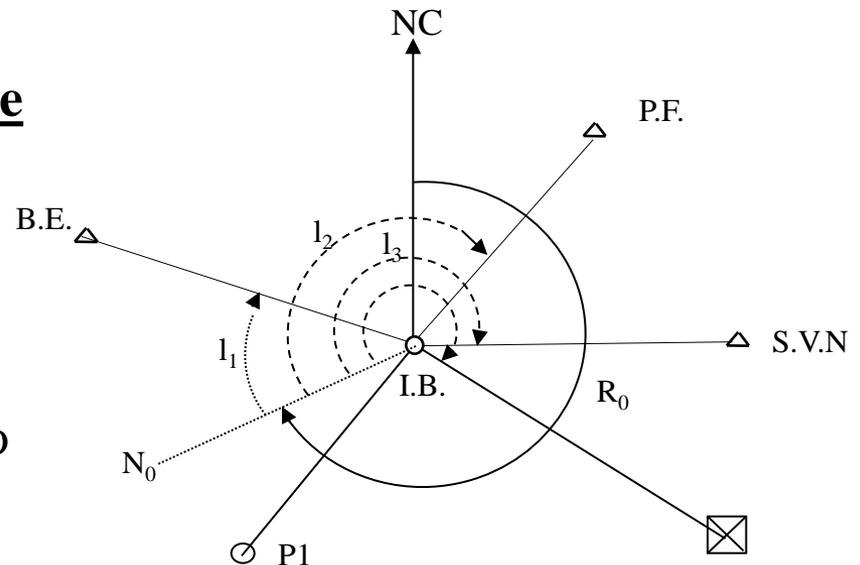
NC – Norte cartográfico

N_0 – Direcção do zero do limbo

R_0 – Rumo de orientação do giro

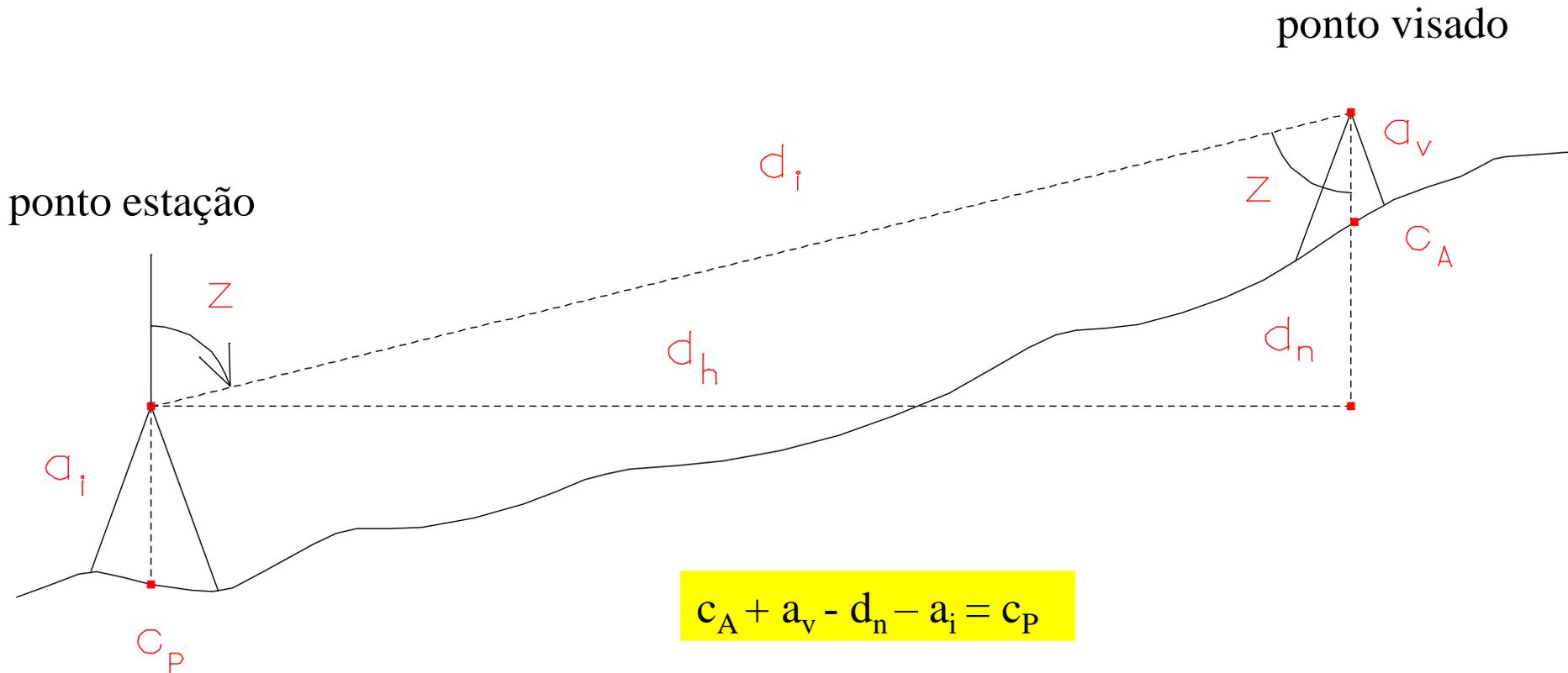
l_1, \dots, l_n – direcções a observar

Incógnitas: (M_{IB}, P_{IB}, R_0)



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Tendo calculado as coordenadas planimétricas do ponto pretendido, a cota desse ponto obtém-se da forma seguinte:



$$c_A + a_v - d_n - a_i = c_P$$

$$\tan z = d_h / d_n \Rightarrow d_n = d_h / \tan z$$

Medição de distâncias

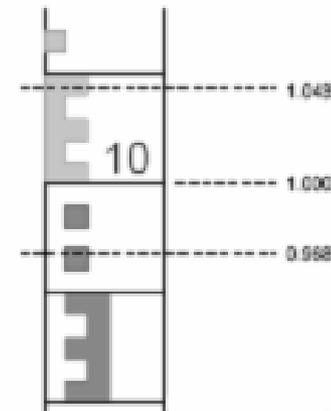
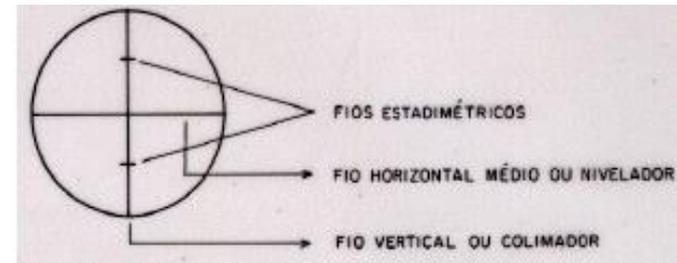
Medição indirecta de distâncias

O processo de medida é indirecto quando **a distância é obtida em função da medida de outras grandezas**, não havendo, portanto, necessidade de percorrer a distância a determinar.

A medida **taqueométrica** de distâncias é baseada na resolução de triângulos isósceles ou rectângulos. Os instrumentos utilizados são denominados **taqueómetros**, que além de medir ângulos, medem distâncias horizontais e verticais.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Os **taqueómetros** são classificados em normais (teodolitos providos de fios estadimétricos) e autoredutores (fornecem os dados referentes às leituras na mira com auxílio dos fios estadimétricos, bem como o ângulo de inclinação lido no limbo vertical do aparelho).

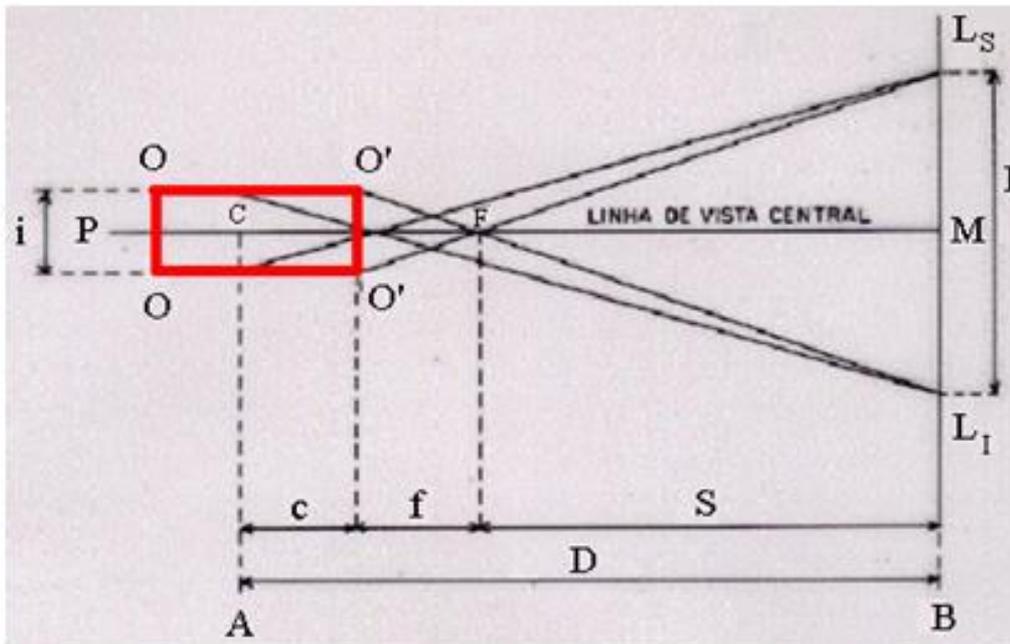


LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Da semelhança entre os triângulos $FL_S L_I$ e $O'O'F$ tem-se $\frac{O'O'}{I} = \frac{f}{S}$. Sendo $O'O' = i$ a distância entre os 2 fios

estadimétricos do retículo e $L_S - L_I = I$ a diferença entre as leituras na mira, tem-se $S = \frac{If}{i}$. Sendo $D = S + f + c$, então

$D = I \frac{f}{i} + (f + c)$, onde $\frac{f}{i}$ se designa constante multiplicativa e $(f + c)$ se designa constante aditiva (nos teodolitos modernos têm valor 100 e 0, respectivamente).



- P é o observador;
- C é o eixo vertical do instrumento;
- F é o foco do sistema;
- O-O é a ocular da luneta;
- O'-O' é a objetiva da luneta;
- A é o ponto estação;
- B é o ponto onde está a mira;
- c é a distância entre o eixo vertical do instrumento e a objetiva;
- f é a distância focal;
- S é distância entre o foco e a mira;
- D é a distância entre os pontos A e B.

Visadas horizontais ($z=90^\circ$)

$$D_h = 100 * (L_S - L_I)$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

No caso de uma visada inclinada de um ângulo α , por semelhança de triângulos tem-se:

$$\frac{S}{f} = \frac{I'}{i} \text{ ou } S = I' \frac{f}{i}$$

e então $D = S + f + c = I' \frac{f}{i} + (f + c)$, onde

$I' = L'_S - L'_I$ não é conhecido, já que a mira está na posição vertical. Como I' é perpendicular à visada, $\beta = \gamma \approx 90^\circ$, tem-se $L'_S M = L_S M \cos \alpha$ e

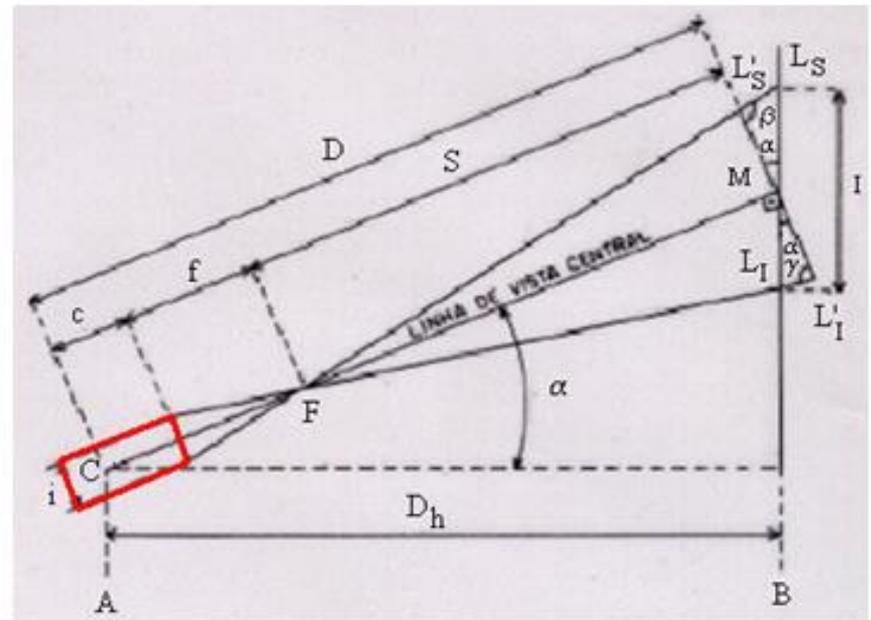
$L'_I M = L_I M \cos \alpha$, donde

$$L'_S M + L'_I M = (L_S M + L_I M) \cos \alpha,$$

$L'_S L'_I = L_S L_I \cos \alpha = i \cos \alpha$, donde

$$D = I \cos \alpha \frac{f}{i} + (f + c) = 100(L_S - L_I) \cos \alpha \text{ e}$$

$$D_h = D \cos \alpha = 100(L_S - L_I) \cos^2 \alpha = 100(L_S - L_I) \sin^2 z$$



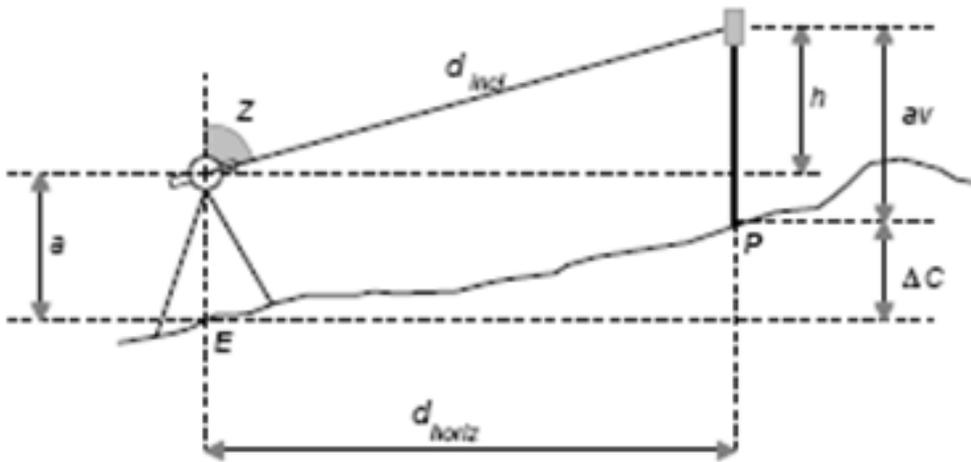
Visadas inclinadas ($z \neq 90^\circ$)

$$D_h = 100 * (L_S - L_I) \sin^2 z$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$$D_v = D_h / \tan z$$

desnível



Utilizando um taqueómetro, a distância vertical ou desnível entre o ponto estação E e o ponto visado P é dado por:

$$D_v = \Delta C = C_p - C_E = a + h - a_v = a + D_h / \tan z - a_v,$$

onde a_v corresponde à leitura efectuada com o fio médio.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Exemplo: estacionou-se no ponto A um taqueómetro com constante estadimétrica igual a 100 e visou-se o ponto B; em seguida estacionou-se o taqueómetro no ponto B e visou-se o ponto A, tendo-se obtido as observações seguintes (os ângulos verticais que o aparelho fornece são **ângulos nadirais**):

Estação: A

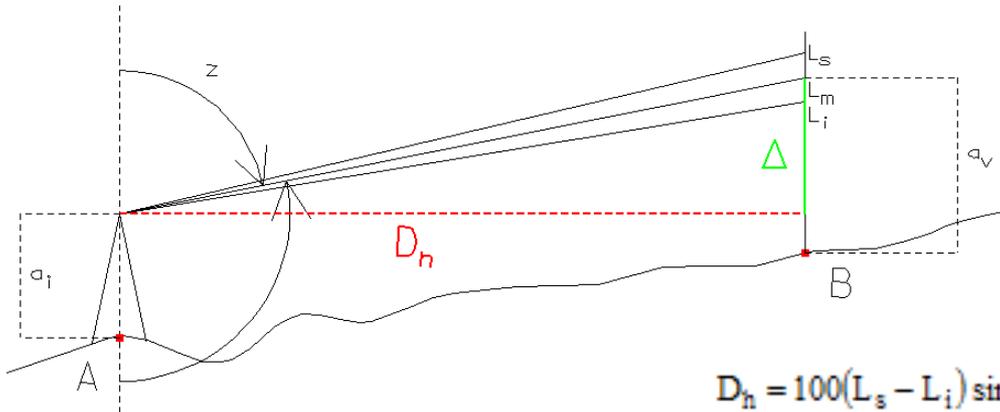
altura do aparelho: 1.47 m
ângulo vertical: 103.137 gon
leitura do fio superior: 2.500 m
leitura do fio médio: 1.500 m
leitura do fio inferior: 0.500 m

Estação: B

altura do aparelho: 1.51 m
leitura do fio médio: 1.600 m

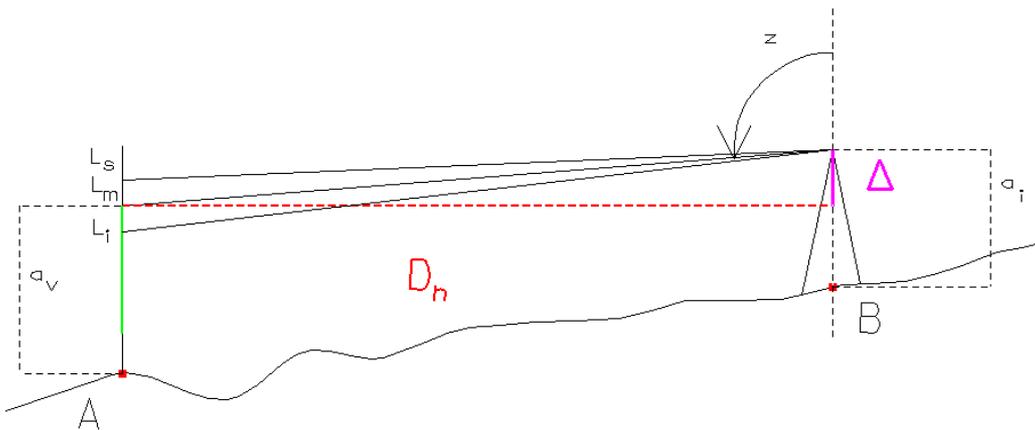
Calcule a distância horizontal entre os pontos A e B. Determine a cota do ponto B sabendo que a cota do ponto A é igual a 121.05 m. Admitindo que não existem erros de qualquer tipo, determine o ângulo vertical em B, bem como as leituras dos fios superior e inferior.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



$$D_h = 100(L_s - L_i) \sin^2 z = 100(2.500 - 0.500) \sin^2 96.863 = 199.51 \text{ m}$$

$$C_B = C_A + a_i + \frac{D_h}{\tan z} - a_v = 121.05 + 1.47 + \frac{199.51}{\tan 96.863} - 1.500 = 130.86 \text{ m}$$

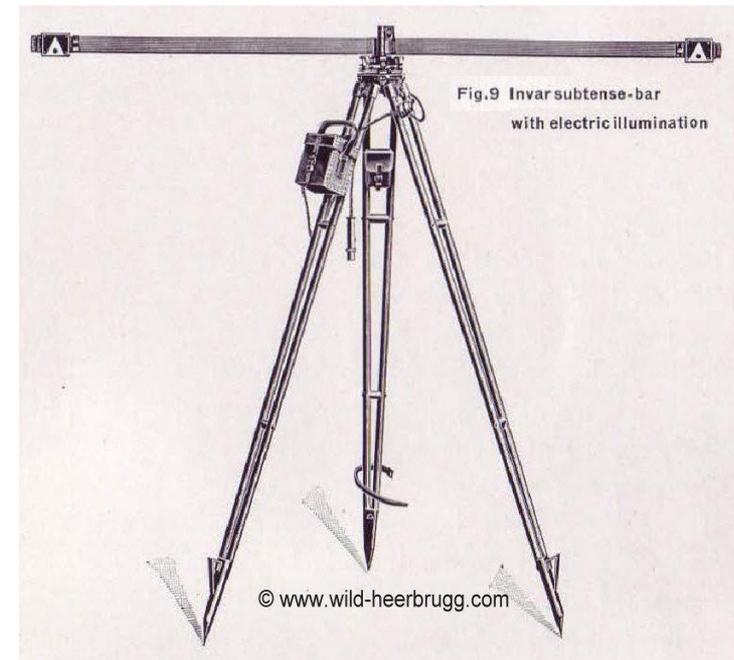


$$C_B + a_i - \frac{D_h}{\tan z} - a_v = C_A \Rightarrow C_B - C_A + a_i - a_v = \frac{D_h}{\tan z} \Rightarrow z = a \tan\left(\frac{D_h}{C_B - C_A + a_i - a_v}\right) = 103.099 \text{ gon}$$

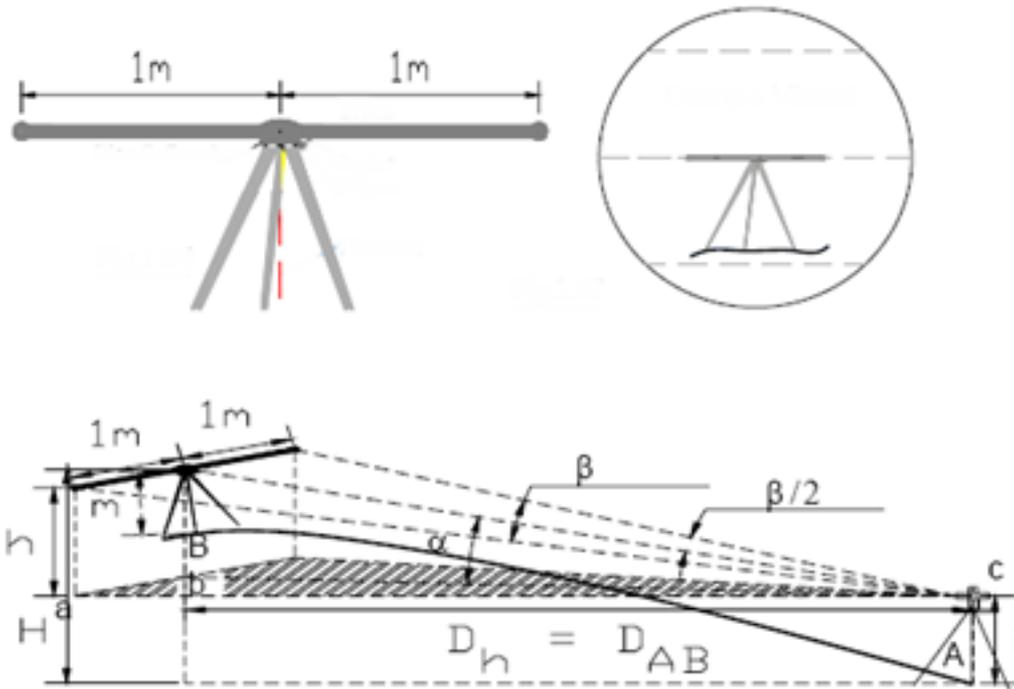
$$\begin{cases} L_s = 2.6000 \\ L_m = 1.600 \\ L_i = 0.600 \end{cases}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Uma **estadia** é constituída por um tubo semicircular em aço que envolve um fio de ínvar, fixo numa das extremidades e na outra submetido a uma tensão constante de 10 daN (1 decaN = 10 N) por intermédio de uma mola. Um aumento de temperatura igual a 10°C traduz-se numa variação de comprimento de 0.024 mm para o fio de ínvar e 0.24 mm para o tubo envolvente, o que aumenta a tensão da mola, alongando o comprimento do fio em 0.004 mm. No entanto, o sistema de suspensão actua 0.018 mm em sentido contrário, o que se traduz num alongamento real de 0.01 mm, pelo que se pode dizer que o **comprimento da estadia é conhecido a menos da décima de mm.**



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

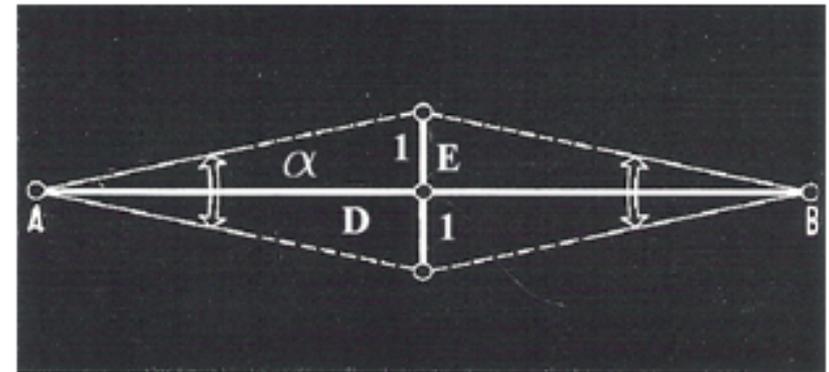


Para medições topográficas de distância impõe-se uma precisão da ordem de $1/10000$ (ou 10^{-4}). Para o efeito, utilizam-se miras de invar de comprimento fixo (estádias de invar), montadas em tripés de forma a manterem-se numa posição horizontal e numa direcção perpendicular à pontaria. Sendo M o comprimento da mira, as leituras azimutais feitas para as duas referências extremas da mira determinam o ângulo azimutal β tal que $D_h = M/2 \cotg(\beta/2)$; sendo $M=2$, tem-se $D_h = \cotg(\beta/2)$. Devem ser realizadas várias observações do ângulo horizontal; como a estadia está horizontal, basta utilizar uma das faces do aparelho.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Exemplo: a estadia de invar pode ser utilizada desde que a distância a medir seja da ordem dos 50 m; assim, para medir a distância AB da ordem dos 100 m, coloca-se a estadia aproximadamente a meia distância entre A e B e estaciona-se em ambos os extremos da distância a medir. Tendo sido registados as leituras seguintes nas pontarias para as extremidades da estadia, calcule a distância AB:

Estação	Esquerda	Direita
A	102.3771 gon	104.6712 gon
B	210.3322 gon	212.6568 gon



$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{D} \Rightarrow D = \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} D_{AE} = \frac{1}{\tan 1.14705 \text{ gon}} = 55.495 \text{ m} \\ D_{BE} = \frac{1}{\tan 1.1623 \text{ gon}} = 54.766 \text{ m} \\ D_{AB} = 110.261 \text{ m} \end{cases}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Enquanto que desde o fim do século XIX se mediram os ângulos com precisão, a medição de distâncias constituiu sempre um problema para o geómetra/topógrafo, pois a respectiva precisão não era **homogénea** com a precisão angular. Por exemplo, era possível medir ângulos a menos de 0.25 mgon, o que significa um desvio de 0.4 mm a 100 m mas era muito difícil obter uma precisão centimétrica mesmo para bases da ordem da centena de metros. As medições muito precisas com fios de ínvar eram muito demoradas.

Em **1948** apareceram os primeiros distanciómetros, como resultados dos trabalhos do físico sueco Bergstrand relacionados com o estudo da velocidade de propagação da luz: a medição da distância baseava-se na medição do desfazamento de uma onda luminosa no caminho de ida e volta entre as extremidades da base a medir. Estes primeiros aparelhos eram pouco precisos, dispendiosos, pouco manejáveis e com pouca autonomia.

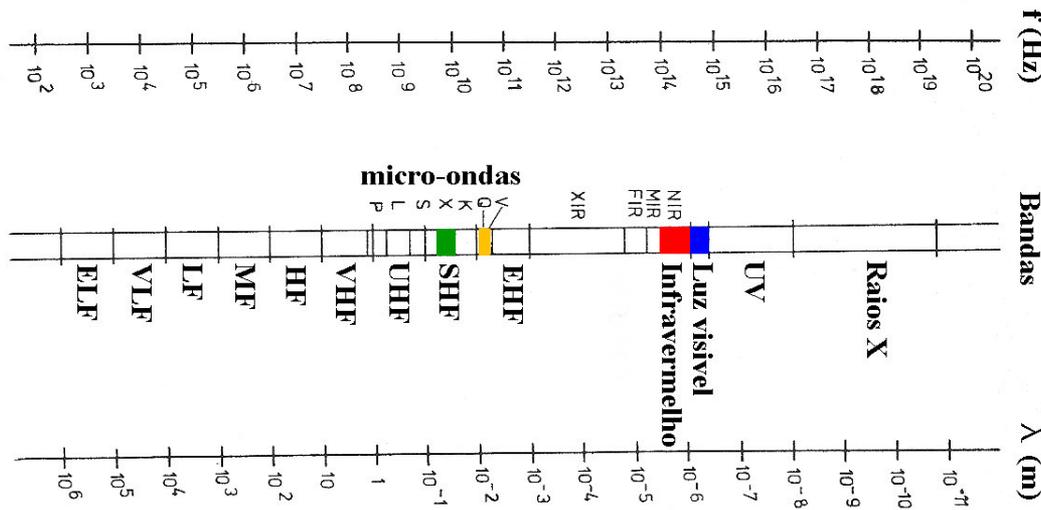
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O avanço decisivo foi o aperfeiçoamento e a miniaturização destes aparelhos que são actualmente integrados na óptica dos aparelhos modernos (estações totais), alcançando precisões entre $\pm(5 \text{ mm} + 5\text{mm/km})$ e $\pm(1 \text{ mm} + 1\text{mm/km})$.



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

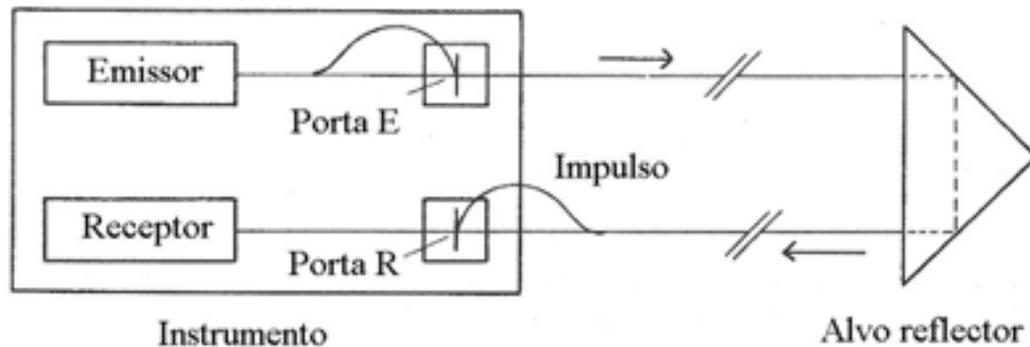
Com a introdução e o desenvolvimento de técnicas de **medição electromagnética** de distâncias, na actualidade tão ou mais precisas que as observações angulares, a generalidade dos procedimentos topográficos sofreram alterações radicais.



Bandas do espectro electromagnético
(as regiões assinaladas são as
utilizadas em EDM)

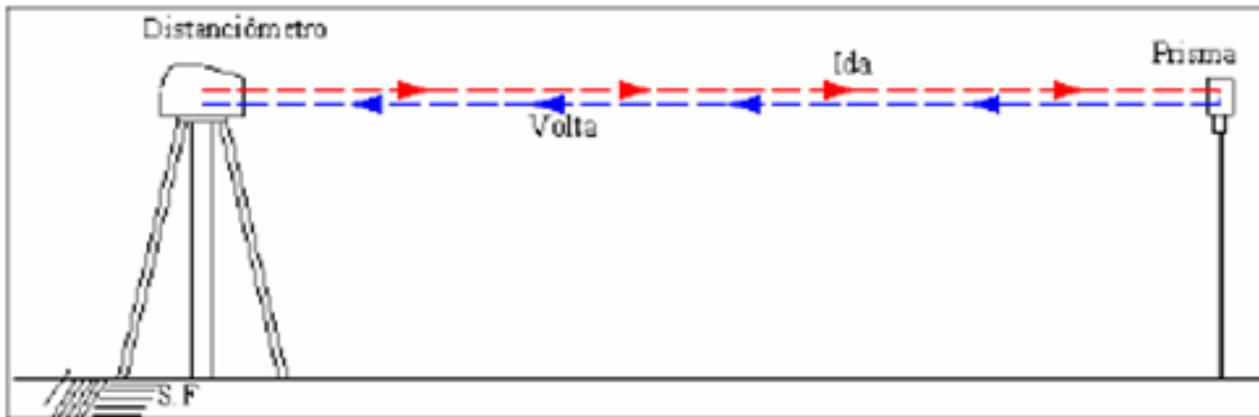
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

a) **Método do impulso**: o distanciômetro gera e envia um impulso curto e de grande intensidade, que se propaga em direção ao alvo, sendo aí reflectido em direção ao instrumento, percorrendo portanto o dobro da distância d a determinar. Medindo o intervalo de tempo $\Delta t'$ de percurso do sinal entre a emissão e a recepção, tem-se $2d = c \Delta t' = c (t_R - t_E)$, onde d é a distância distanciômetro-alvo, t_E é o instante de emissão do impulso medido na porta E, t_R é o instante de recepção do impulso medido na porta R:



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Exemplo: considerando $D=1 \text{ km}$, $c=300000 \text{ km/s}$, o intervalo de tempo de percurso do impulso é $t=2D/c=6 \times 10^{-6} \text{ s}$. Para ser garantida uma precisão de 1 cm na medição de D o intervalo de tempo de percurso deve ser medido com a precisão de $6 \times 10^{-11} \text{ s}$, o que inviabiliza a utilização desta técnica para aplicações topográficas, por ser necessário utilizar relógios muito caros.



$$D = \frac{1}{2}ct \Rightarrow dD = \frac{c}{2}dt \Rightarrow$$

$$dt = \frac{2 dD}{c} = \frac{2 \times 10^{-2} \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 6 \times 10^{-11} \text{ s}$$

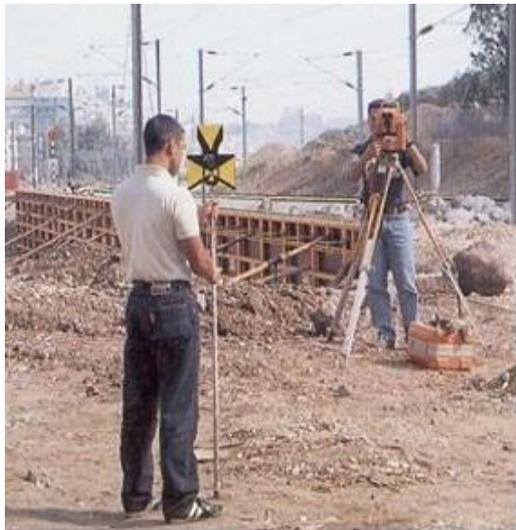
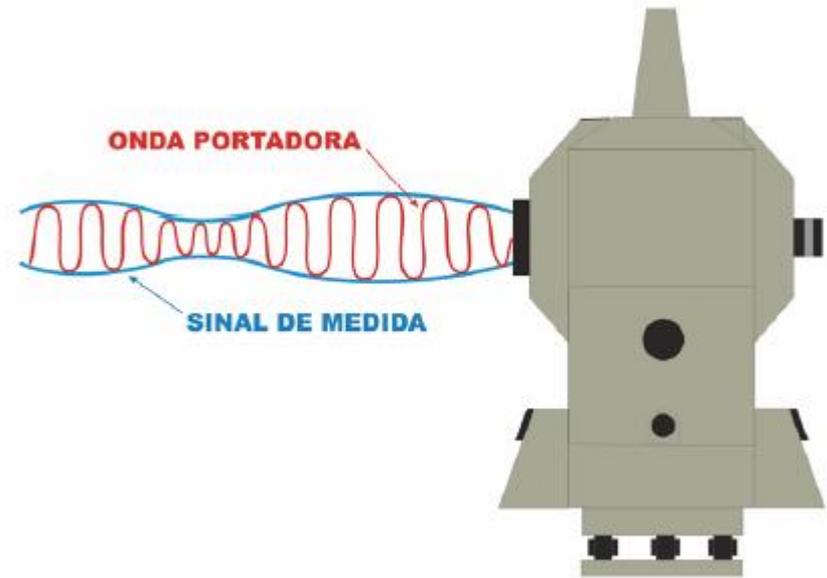
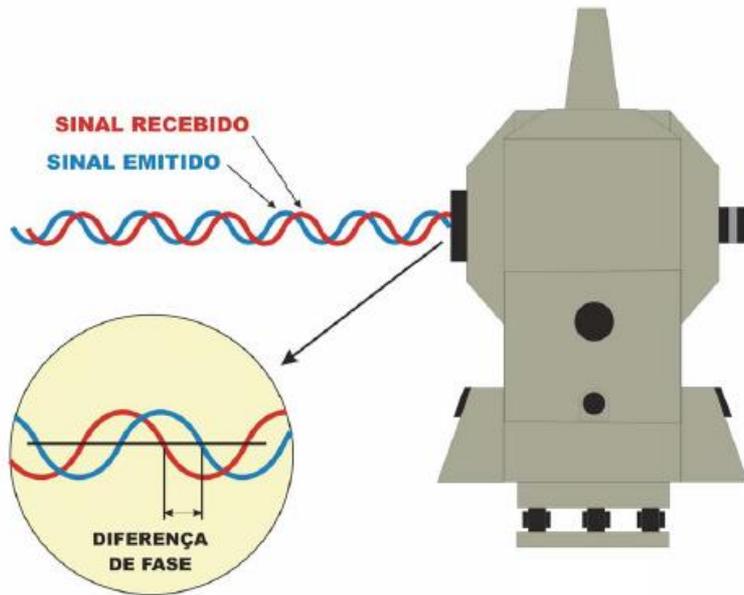
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

b) Método da diferença de fase: este método baseia-se na medição da diferença de fase de **ondas contínuas** (onda contínua é uma onda eletromagnética que possui amplitude e frequência constantes; em análise matemática, essa onda também possui duração infinita; utilizada para transportar informação através de modulação)

As distâncias que podem ser medidas são inferiores ao comprimento de onda da onda portadora; como os comprimentos de onda normalmente utilizados são pequenos (0.0009 mm no caso do infra-vermelho), os aparelhos EDM utilizam ondas portadoras **moduladas** de forma a gerar comprimentos de onda mais convenientes.

Quanto maior for o comprimento de onda da onda modulada, menor é a exactidão da distância medida (a diferença de fase pode ser medida a menos de 0.01% do comprimento de onda), embora o alcance aumente.

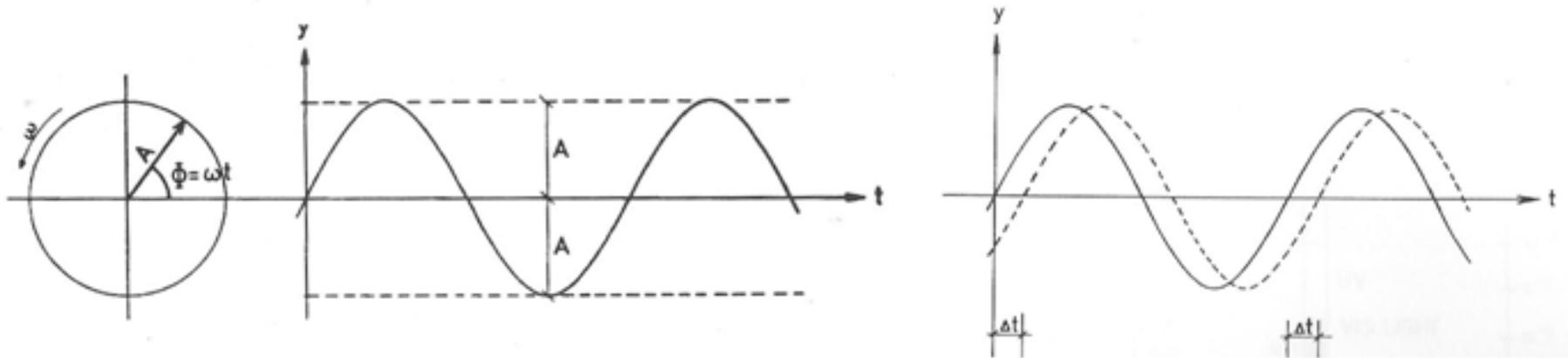
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



O sinal de maior frequência (representado a encarnado) é designado por **onda portadora**, que transporta o sinal de medida de maior comprimento de onda, designado por **onda modulada** (representado a azul), através de uma modulação em amplitude

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

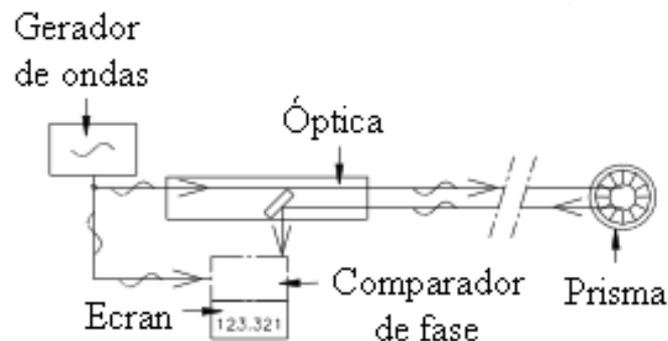
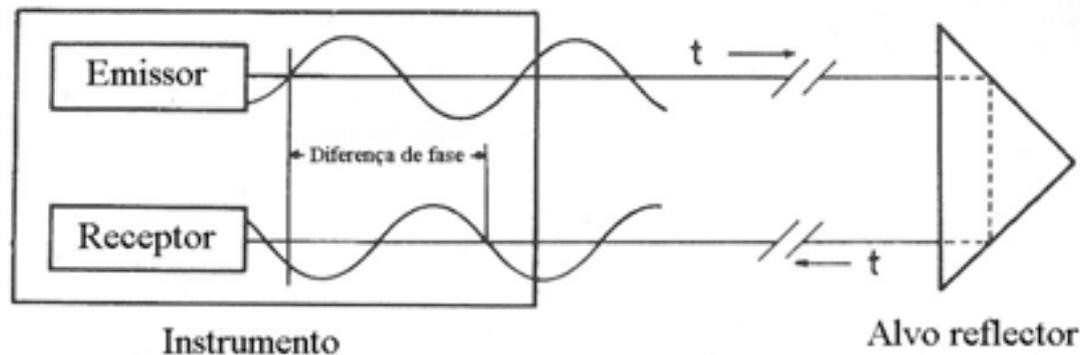
A radiação electromagnética pode ser descrita pela expressão $y = A \sin(\omega t) = A \sin \Phi$, onde A é a amplitude ou intensidade máxima, ω é a velocidade angular, f é a frequência do sinal, t é o tempo e Φ é a fase, de tal forma que $\Phi = \omega t$, $\omega = 2\pi f$. Um sinal com diferença de fase $\Delta\Phi$ em relação ao anterior pode exprimir-se como $y = A \sin(\Phi + \Delta\Phi) = A \sin\omega(t + \Delta t)$, onde Δt representa a diferença temporal, em que $\Delta t = \Delta\Phi / \omega$.



Propagação de ondas sinusoidais

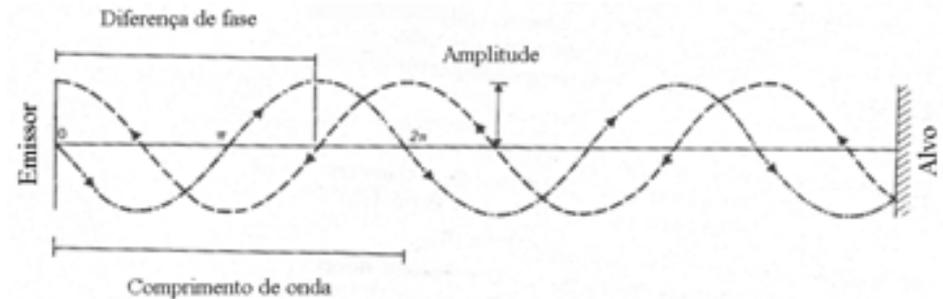
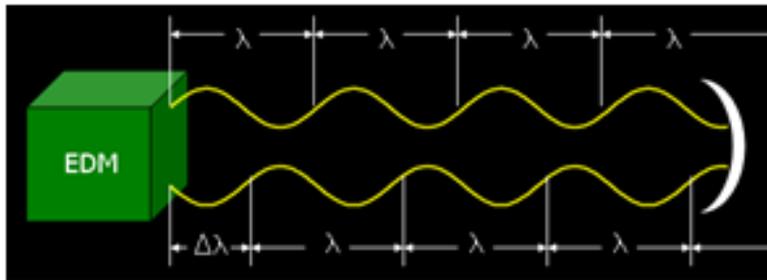
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Diferença de fase entre o sinal emitido e recebido: a generalidade dos instrumentos de EDM utiliza este princípio, independentemente da banda de radiação utilizada. O sinal, modulado numa onda portadora, é emitido em direcção ao reflector, sendo aí reflectido em direcção ao distanciómetro; no receptor, as fases dos sinais emitido e reflectido são comparadas, sendo medida a respectiva diferença de fase $\Delta\Phi$. Como se utiliza um sinal contínuo, embora os valores de $y_E = A \sin \omega t = A \sin \Phi$ e de $y_R = A \sin \omega(t + \Delta t) = A \sin(\Phi + \Delta\Phi)$ variem no tempo, a diferença de fase $\Delta\Phi$ (assim como a diferença temporal Δt) permanece constante, isto é, o instrumento pode medir uma diferença de fase constante embora as amplitudes dos sinais variem continuamente.



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Como já se viu, a distância obtém-se de $d = c \Delta t'$, embora o intervalo de tempo de percurso $\Delta t'$ não possa ser obtido por comparação de fase, que fornece apenas Δt ; para se obter $\Delta t'$ é necessário conhecer o equivalente temporal ao número inteiro m de ciclos contidos no percurso de um dado sinal, isto é, $\Delta t' = mT + \Delta t$, onde T é o período do sinal modulado.



Se a distância d for inferior a λ , a solução é única (não existe ambiguidade de fase); caso contrário, é necessário contar o número inteiro de ciclos m

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Na expressão anterior não são conhecidos $\Delta t'$ e a ambiguidade m ; a diferença temporal Δt pode exprimir-se em função de

$\Delta\Phi$ como $\Delta t = \frac{\Delta\Phi\lambda}{2\pi c}$, onde λ é o comprimento de onda do sinal modulado; o período T correspondente a um ciclo do sinal de

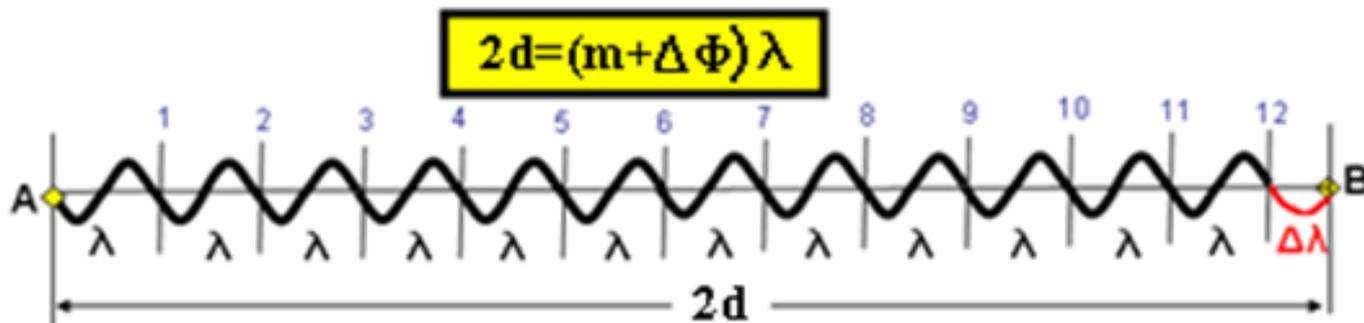
comprimento de onda λ é dado por $T = \frac{\lambda}{c}$, donde $d = \frac{c}{2}(mT + \Delta t) = \frac{c}{2}\left(m\frac{\lambda}{c} + \frac{\Delta\Phi\lambda}{2\pi c}\right) = m\frac{\lambda}{2} + \frac{\Delta\Phi\lambda}{2\pi}$, onde todas as quantidades,

com excepção da ambiguidade m , são conhecidas.

Usualmente, o termo $\frac{\lambda}{2}$ é substituído por U , designado por unidade de comprimento do aparelho EDM; pondo

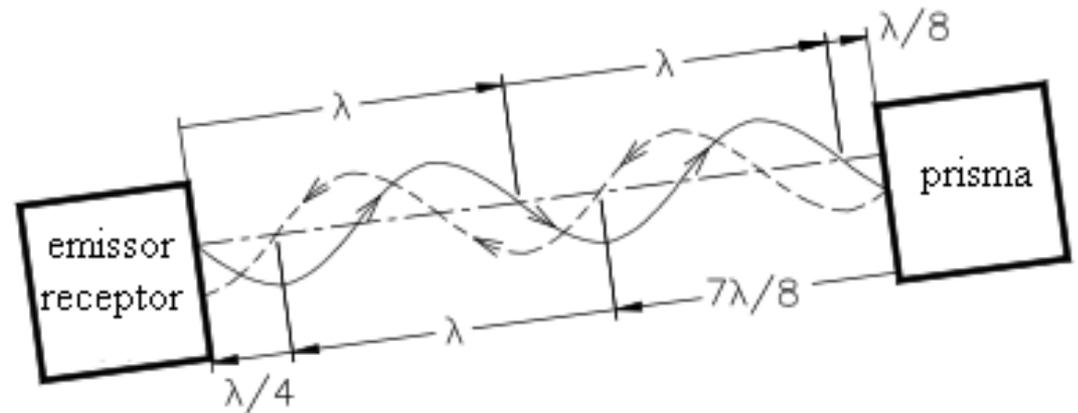
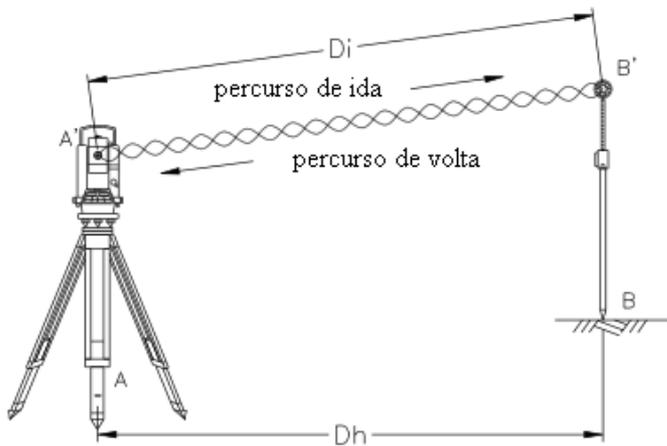
$L = \frac{\lambda}{2} \frac{\Delta\Phi}{2\pi} = U \frac{\Delta\Phi}{2\pi}$, tem-se $d = mU + L$. A ambiguidade m é resolvida por introdução de mais unidades de comprimento no

aparelho EDM, sendo a unidade mais importante a de menor comprimento de onda (a de maior frequência), utilizada para a medição fina da distância (a precisão do distanciômetro depende da selecção deste comprimento fundamental, devido à resolução limitada (entre 1% e 0.1 % do comprimento de onda) das medições da diferença de fase.

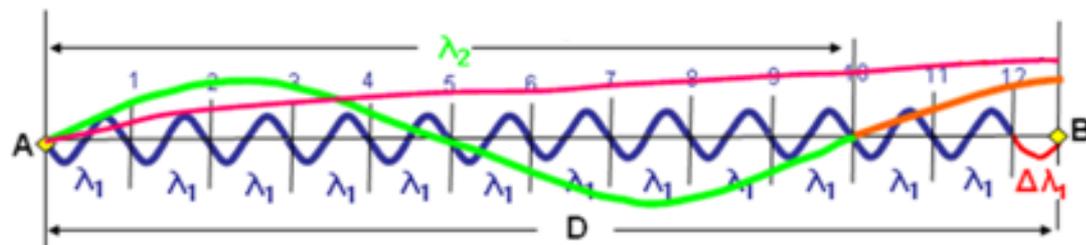
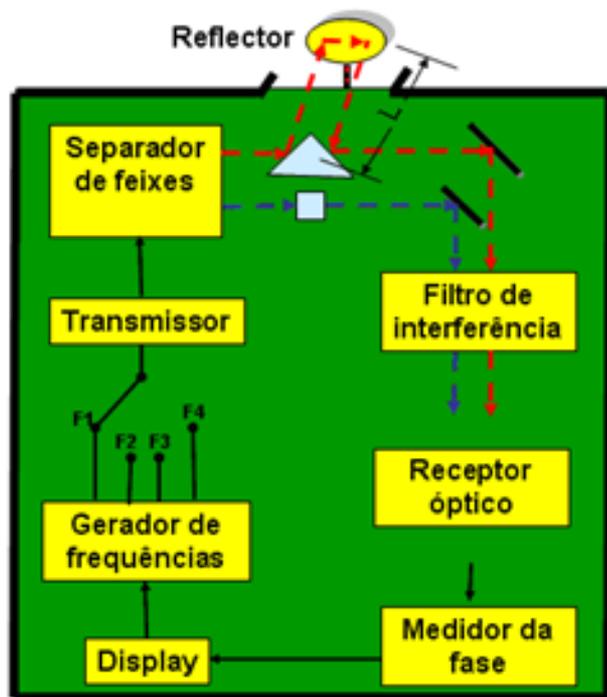


LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O sinal emitido é constituído por uma série de ondas sinusoidais cujo comprimento de onda λ corresponde à distância rectilínea percorrida pela onda durante um intervalo de tempo $T=1/f=\lambda/c$. Entre o emissor e o receptor existe um número inteiro de comprimentos de onda mais uma fracção $\Delta\lambda$ de um comprimento de onda: na figura, $n=4$, $\Delta\lambda=\lambda/4$, a que corresponde um desfazamento de $\pi/4$, tecnicamente simples de determinar.



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

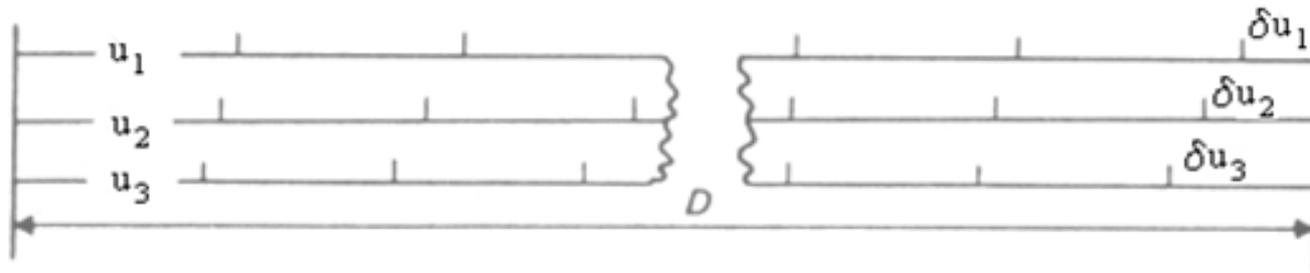


A fase total Φ (número inteiro de ciclos m mais a parte fracionária $\Delta\Phi$, convenientemente convertida para unidades lineares) relaciona-se com a distância d através da expressão $2d = \Phi\lambda = (m + \Delta\Phi)\lambda$, em que λ é o comprimento de onda utilizado.

Nesta expressão, $\Delta\Phi$ é medido no distanciômetro (quanto maior for o comprimento de onda, menor será a precisão na determinação de D), λ é conhecido e m é geralmente desconhecido (ambiguidade da fase), pelo que o valor de d não pode ser determinado com uma única onda, a não ser que esta tenha comprimento (de onda) maior do que $2d$. Para resolver este problema é então necessário utilizar ondas com vários comprimentos de onda produzidas através de um processo de modulação, relacionadas de uma forma simples com a onda fundamental (a de menor comprimento de onda, utilizada na medição fina das distâncias), de forma a reconstituir a ambiguidade da fase da onda fundamental e assim determinar o valor da distância.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Exemplo: considere-se a distância D , que foi medida utilizando 3 fitas métricas f_1 , f_2 e f_3 de unidades comprimento u_1 , u_2 e u_3 , respectivamente.



Com a fita f_1 tem-se que $D = n_1 u_1 + \delta u_1$, com a fita f_3 tem-se que $D = n_3 u_3 + \delta u_3$ e com a fita f_2 tem-se que $D = n_2 u_2 + \delta u_2$.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Supondo que $u_1 = 5.000 \text{ m}$ e que $u_3 = \frac{20}{21}u_1 = 4.761905 \text{ m}$, para distâncias $D \leq 100 \text{ m}$ (valor para o qual $20 u_1 = 21 u_3$), tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } \delta u_1 < \delta u_3, n_3 = n_1 \Rightarrow D = n_1 u_1 + \delta u_1 = n_1 u_3 + \delta u_3 \Rightarrow n_1 (u_1 - u_3) = \delta u_3 - \delta u_1 \Rightarrow n_1 = \frac{\delta u_3 - \delta u_1}{u_1 - u_3} = \frac{\delta u_3 - \delta u_1}{u_1 - \frac{20}{21}u_1} = \frac{\delta u_3 - \delta u_1}{u_1} \left(1 - \frac{20}{21}\right) = \\ \\ = 4.2 (\delta u_3 - \delta u_1) \\ \\ \text{se } \delta u_1 > \delta u_3, n_3 = n_1 + 1 \Rightarrow D = n_1 u_1 + \delta u_1 = (n_1 + 1)u_3 + \delta u_3 \Rightarrow n_1 = \frac{\delta u_3 - \delta u_1}{u_1 - u_3} + \frac{u_3}{u_1 - u_3} = 4.2 (\delta u_3 - \delta u_1) + 20 \end{array} \right.$$

De forma idêntica, pode definir-se $u_2 = \frac{400}{401}u_1 = 4.987531 \text{ m}$; para distâncias $D \leq 2000 \text{ m}$ (valor para o qual $400 u_1 = 401 u_2$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } \delta u_1 < \delta u_2, n_2 = n_1 \Rightarrow D = n_1 u_1 + \delta u_1 = n_2 u_2 + \delta u_2 \Rightarrow n_1 (u_1 - u_2) = \delta u_2 - \delta u_1 \Rightarrow n_1 = \frac{\delta u_2 - \delta u_1}{u_1 - u_2} = \frac{\delta u_2 - \delta u_1}{u_1 - \frac{400}{401}u_1} = \frac{\delta u_2 - \delta u_1}{u_1} \left(1 - \frac{400}{401}\right) = \\ \\ = 80.2 (\delta u_2 - \delta u_1) \\ \\ \text{se } \delta u_1 > \delta u_2, n_2 = n_1 + 1 \Rightarrow D = n_1 u_1 + \delta u_1 = (n_1 + 1)u_2 + \delta u_2 \Rightarrow n_1 = \frac{\delta u_2 - \delta u_1}{u_1 - u_2} + \frac{u_2}{u_1 - u_2} = 80.2 (\delta u_2 - \delta u_1) + 400 \end{array} \right.$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Suponha-se que $\delta u_1 = 2.263$ m e que $\delta u_3 = 4.168$ m, de tal forma que $\delta u_3 - \delta u_1 = 1.905$ m; assim, $n_1 = 4.2 \times 1.905 = 8.001 \approx 8$, sendo a distância dada por $D = n_1 u_1 + \delta u_1 = (8 \times 5.000) + 2.263 = 42.263$ m ou por $D = n_3 u_3 + \delta u_3 = (8 \times 4.761905) + 4.168 = 42.263$ m. O valor da distância pode ainda obter-se de $D = 4.2 (\delta u_3 - \delta u_1) \times 5 + \delta u_1 = 21 \times 1.905 + 2.263 = 42.268$ m ou, de forma idêntica, de $D = 4.2 (\delta u_3 - \delta u_1) \times 4.761905 + \delta u_3 = 20.000001 \times 1.905 + 4.168 = 42.268$ m. Esta diferença no cálculo da distância deve-se à exactidão limitada do valor $(\delta u_3 - \delta u_1)$, que deveria ser obtido a menos de 5×10^{-5} m para se obter 1 mm na exactidão da distância.

De forma idêntica, sendo $\delta u_2 = 4.857$ m, $\delta u_2 - \delta u_1 = 2.594$ m, pelo que $n = 80.2 \times 2.594 = 208.03 \approx 208$, tendo-se então

$$D = 208 \times 5.000 + 2.263 = 1042.263 \text{ m}$$

$$D = 208 \times 4.987531 + 4.857 = 1042.263 \text{ m}$$

$$D = 401 \times 2.594 + 2.263 = 1042.457 \text{ m}$$

$$D = 400 \times 2.594 + 4.857 = 1042.457 \text{ m}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Como no caso anterior, a diferença $\delta u_2 - \delta u_1$ não é suficientemente exacta, de forma a evitar resultados inconsistentes no cálculo da distância, devendo $\delta u_2 - \delta u_1$ ser dado a menos de 2.5×10^{-6} m para se obter 1 mm de exactidão em D.

Para ultrapassar estas dificuldades e simplificar o cálculo, é recomendado o seguinte sistema: pondo $\delta u_2 - \delta u_1 = L_2 - L_1 = A$ e $\delta u_3 - \delta u_1 = L_3 - L_1 = B$, sejam E o maior múltiplo de 100 m contido da distância D e F o maior múltiplo de 5 m contido em $D - 100 \times E$, de tal forma que $F = 21B$ a menos de 5 m e $E = 400 - 21B$ a menos de 100 m. Então:

$$D' = (E + F) + L_1$$

$$D'' = 400(E + F)/401 + L_2 = (E + F) + L_2 - (E + F)/401$$

$$D''' = E + 20F/21 + L_3 = (E + F) + L_3 - F/21$$

$$D = (D' + D'' + D''')/3$$

No exemplo anterior, $F = 21 \times 1.905 = 40.005 \approx 40$, $E = 400 \times 2.594 = 1037.6 \approx 1000$, $D' = 1040 + 2.263 = 1042.263$ m, $D'' = 1040 + 4.857 - 2.593 = 1042.264$ m, $D''' = 1040 + 4.168 - 1.905 = 1042.263$ m, $D = 1040 + (0.263 + 0.264 + 0.263)/3 = 1042.263$ m.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Exemplo: Hewlett-Packard HP388 B: este aparelho utiliza um total de 4 unidades de comprimento, variando de 10 m até 10 km. Os algarismos sublinhados são os que são sucessivamente determinados em cada passo. O passo 1 designa-se medição fina da distância e os restantes medições grosseiras da distância. O alcance é igual a 10 km.

Passo	Leitura	Unidade de comprimento	Fracção
1	$\frac{\Delta\Phi_1}{2\pi} = 0.825$	$U_1 = 10 \text{ m}$	$L_1 = \frac{\Delta\Phi_1}{2\pi} U_1 = \underline{8.25} \text{ m}$
2	$\frac{\Delta\Phi_2}{2\pi} = 0.382$	$U_2 = 100 \text{ m}$	$L_2 = \frac{\Delta\Phi_2}{2\pi} U_2 = \underline{38.2} \text{ m}$
3	$\frac{\Delta\Phi_3}{2\pi} = 0.433$	$U_3 = 1000 \text{ m}$	$L_3 = \frac{\Delta\Phi_3}{2\pi} U_3 = \underline{433} \text{ m}$
4	$\frac{\Delta\Phi_4}{2\pi} = 0.244$	$U_4 = 10000 \text{ m}$	$L_4 = \frac{\Delta\Phi_4}{2\pi} U_4 = \underline{2440} \text{ m}$

$$d = 2438.25 \text{ m}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Exemplo: Kern DM 500/DM 501/DM 502: esta série de aparelhos utiliza apenas 2 unidades de comprimento, 10 m e 1000 m. O alcance é igual a 1 km. Os aparelhos mais recentes da série (DM 503/DM 504) utilizam uma terceira frequência de modulação para resolver múltiplos de 1000 m.

Passo	Leitura	Unidade de comprimento	Fracção
1	$\frac{\Delta\Phi_1}{2\pi} = 0.8253$	$U_1 = 10 \text{ m}$	$L_1 = \frac{\Delta\Phi_1}{2\pi} U_1 = \underline{8.253} \text{ m}$
2	$\frac{\Delta\Phi_2}{2\pi} = 0.4384$	$U_2 = 1000 \text{ m}$	$L_2 = \frac{\Delta\Phi_2}{2\pi} U_2 = \underline{438.400} \text{ m}$

$$d = 438.253 \text{ m}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Exemplo: utilizando os dados indicados na tabela, calcule a distância entre o distanciômetro e o alvo.

	λ	$\Delta\Phi/2\pi$
1	20 km	0.59
2	1 km	0.79
3	200 m	0.93
4	10 m	0.54
5	0.5 m	0.70

i) O alcance é dado por $\frac{\lambda_1}{2} = 10 \text{ km}$

ii) $2d = \Phi_1\lambda_1 = (m_1 + \frac{\Delta\Phi_1}{2\pi})\lambda_1 = \frac{\Delta\Phi_1}{2\pi}\lambda_1 = 0.59 \times 20000 = 11800 \text{ m} \pm 200 \text{ m}$, pois $m_1 = 0$

ii) $2d = \Phi_2\lambda_2 = \Phi_1\lambda_1 \Leftrightarrow (m_2 + \frac{\Delta\Phi_2}{2\pi})\lambda_2 = (m_1 + \frac{\Delta\Phi_1}{2\pi})\lambda_1 \Leftrightarrow m_2 + \frac{\Delta\Phi_2}{2\pi} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\Delta\Phi_1}{2\pi} \Leftrightarrow m_2 = 20 \times 0.59 - 0.79 = 11$

$$\Phi_2 = m_2 + \frac{\Delta\Phi_2}{2\pi} = 11.79$$

$$2d = \Phi_2\lambda_2 = 11.79 \times 1000 = 11790 \text{ m} \pm 10 \text{ m}$$

iii) $2d = \Phi_3\lambda_3 = \Phi_2\lambda_2 \Leftrightarrow (m_3 + \frac{\Delta\Phi_3}{2\pi})\lambda_3 = (m_2 + \frac{\Delta\Phi_2}{2\pi})\lambda_2 \Leftrightarrow m_3 + \frac{\Delta\Phi_3}{2\pi} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} (m_2 + \frac{\Delta\Phi_2}{2\pi}) \Leftrightarrow m_3 = 5 \times 11.79 - 0.93 = 58$

$$\Phi_3 = m_3 + \frac{\Delta\Phi_3}{2\pi} = 58.93$$

$$2d = \Phi_3\lambda_3 = 58.93 \times 200 = 11786 \text{ m} \pm 2 \text{ m}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$$\text{iv) } 2d = \Phi_4 \lambda_4 = \Phi_3 \lambda_3 \Leftrightarrow \left(m_4 + \frac{\Delta\Phi_4}{2\pi} \right) \lambda_4 = \left(m_3 + \frac{\Delta\Phi_3}{2\pi} \right) \lambda_3 \Leftrightarrow m_4 + \frac{\Delta\Phi_4}{2\pi} = \frac{\lambda_3}{\lambda_4} \left(m_3 + \frac{\Delta\Phi_3}{2\pi} \right) \Leftrightarrow m_4 = 20 \times 58.93 - 0.54 = 1178$$

$$\Phi_4 = N_4 + \frac{\Delta\Phi_4}{2\pi} = 1178.54$$

$$2d = \Phi_4 \lambda_4 = 1178.54 \times 10 = 11785.4 \text{ m} \pm 0.1 \text{ m}$$

$$\text{v) } 2d = \Phi_5 \lambda_5 = \Phi_4 \lambda_4 \Leftrightarrow \left(m_5 + \frac{\Delta\Phi_5}{2\pi} \right) \lambda_5 = \left(m_4 + \frac{\Delta\Phi_4}{2\pi} \right) \lambda_4 \Leftrightarrow m_5 + \frac{\Delta\Phi_5}{2\pi} = \frac{\lambda_4}{\lambda_5} \left(m_4 + \frac{\Delta\Phi_4}{2\pi} \right) \Leftrightarrow m_5 = 20 \times 11785.4 - 0.70 = 23570$$

$$\Phi_5 = m_5 + \frac{\Delta\Phi_5}{2\pi} = 23570.70$$

$$2d = \Phi_5 \lambda_5 = 23570.70 \times 0.5 = 11785.350 \text{ m} \pm 0.005 \text{ m}$$

	λ	$\Delta\Phi/2\pi$	m	Φ	2d
1	20 km	0.59	0	0.59	11800±200 m
2	1 km	0.79	11	11.79	11790±10 m
3	200 m	0.93	58	58.93	11786±2 m
4	10 m	0.54	1178	1178.54	11785.4±0.1 m
5	0.5 m	0.70	23570	23570.70	11785.350±0.005 m

$$d = 5892.675 \text{ m}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Erros devido ao sistema de medida

O emissor e o sistema de medição de fase induzem dois tipos de erros:

- 1) erro cíclico, que toma periodicamente o mesmo valor
- 2) erro proporcional devido a algum defeito de frequência do emissor: sendo $d \approx K \cdot \lambda$, um **desvio na frequência** igual a Δf traduz-se num **erro na distância** igual a $\Delta d = -d \cdot \Delta f / f$, proporcional à distância medida.

Estes dois tipos de erros implicam **calibrações** regulares do emissor e do sistema de medição de fase.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Erros devido à **propagação na atmosfera**

A propagação de uma onda electromagnética é perturbada pelas moléculas da atmosfera, de tal forma que **quanto mais denso for o meio, maior será o índice de refração e mais lenta será a propagação do sinal.**

Isto **influencia o desfazamento** medido, que virá falseado uma vez que a distância medida é artificialmente maior devido à diminuição da velocidade de propagação.

O índice de refração é fortemente dependente da temperatura e da pressão, embora independente da humidade, no caso das ondas na banda do visível; para as ondas centimétricas, a humidade também deve ser levada em consideração.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

A medida directa da distância inclinada deve assim sofrer uma **correção atmosférica** que pode ser efectuada de 3 formas diferentes, todas baseadas na mesma fórmula de correção:

- de forma automática, introduzindo no aparelho os valores da pressão e da temperatura do local
- de forma semi-automática, introduzindo no aparelho uma correção ppm correspondente ao erro cometido na distância
- de forma manual, corrigindo os valores brutos da distância

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

No vácuo, a velocidade de propagação das ondas electromagnéticas é constante para todos os comprimentos de onda. No ar, o índice de refração n depende de diversos factores: composição, temperatura, pressão e humidade, relacionados através da equação de Cauchy $n = A + B/\lambda^2 + C/\lambda^4$, onde A , B e C são constantes para umas dadas condições atmosféricas. Para condições standard de ar seco a 0°C de temperatura, 760 mm Hg (1013.25 mbars) de pressão e com 0.03% CO_2 , o índice de refração tem o valor $n_s = 1 + (287.604 + 1.6288/\lambda^2 + 0.0136/\lambda^4)10^{-6}$, onde λ é dado em $\mu\text{m} = 10^{-6} \text{m}$. Atendendo ao processo de modulação, no qual a onda modulada (que não é sinusoidal) é sobreposta à onda portadora, é necessário considerar o índice de refração de grupo, $n_g = A + 3B/\lambda^2 + 5C/\lambda^4$, de tal forma que $n_{gs} = 1 + (287.604 + 4.88/\lambda^2 + 0.0680/\lambda^4)10^{-6}$. O índice de refração para condições quaisquer é então dado por

$$n_{gt} = 1 + \frac{273.2(n_{gs} - 1)P}{760(273.2 + t)} - \frac{15.02E \times 10^{-6}}{273.2 + t} = 1 + 0.359474(n_{gs} - 1)\frac{P}{T} - \frac{15.02E \times 10^{-6}}{T}$$

$$c = c_0/n$$

onde P é a pressão atmosférica (mm HG), $T=273+t$ (K) é a temperatura, E é a pressão do vapor de água (mm Hg) = $e' - (c/755)p(t - t_w)$, em que e' é a pressão de saturação do vapor de água, t e t_w são as temperaturas seca e húmida e c é uma constante.

Exemplo: sendo o índice de refração standard (padrão) para a luz visível a 0°C , 760 mm Hg, e 0.03% de CO_2 igual a 1.0003045, calcule o índice de refração a 25°C e 730 mm Hg (a pressão de saturação do vapor de água a 25°C é igual a 23.7 mm Hg).

$$n_{gt} = 1 + 0.359474(n_{gs} - 1)\frac{P}{T} - \frac{15.02 \times 10^{-6}}{T} = 1 + 0.359474 \times 3.045 \times 10^{-4} \times \frac{730}{298} - \frac{15.02 \times 23.7 \times 10^{-6}}{298} = 1.0002669$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O efeito em n de diferentes condições atmosféricas pode resumir-se no quadro seguinte:

		Luz visível	Micro-ondas
Temperatura	+1° C	-1.00 ppm	-1.25 ppm
Pressão atmosférica	+1 mm Hg	+0.40 ppm	+0.40 ppm
Pressão do vapor de água	+1 mm Hg	-0.05 ppm	+6.60 ppm

A influência atmosférica pode ser aplicada directamente na distância. Apresenta-se assim a correcção meteorológica para uma distância utilizando o formulário apresentado no manual da estação total TC2002 e a correcção para a mesma distância utilizando o ábaco:

$$\Delta D_1 = 281.8 - \left[\frac{0.29065 P}{1 + \alpha t} - \frac{4.126 \times 10^{-4} h}{1 + \alpha t} \times 10^x \right], \quad x = \frac{7.5 t}{237.3 + t} + 0.7857$$

em que ΔD_1 = correcção atmosférica em ppm, P = pressão atmosférica (mbar), t = temperatura ambiente (°C), h = humidade relativa (%), $\alpha = 1/273,16$.

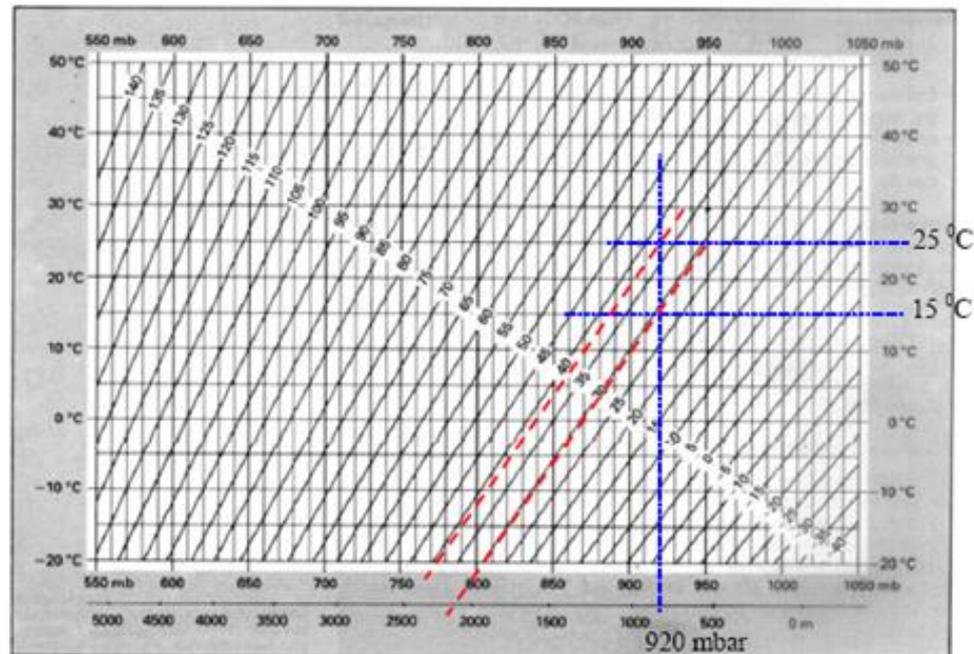
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Exemplo: nas condições seguintes, calcular a correção a aplicar à distância medida: temperatura (t) = 25.0° C, pressão atmosférica (P) = 920.0 mbar, humidade relativa (h) = 56 %.

$$x = ((7.5 \times 25.0) / (237.3 + 25.0)) + 0.7857 = 1.5005$$

$$\Delta D_1 = 281.8 - \left[\frac{0.29065 \times 920.0}{1 + 0.00421 \times 25.0} - \frac{4.126 \times 10^{-4} \times 56}{1 + 0.00421 \times 25.0} \times 10^{1.5005} \right] = 281.8 - (244.9821 - 0.67022) = 37.48 \text{ ppm}$$

Utilizando os mesmos valores para a temperatura e a pressão atmosférica, obtém-se o valor da correção utilizando o ábaco:



Correção 37,0 ppm

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Erros devido à **absorção na atmosfera**

Devido a este fenómeno, a amplitude das ondas tende a diminuir, ou seja, a energia do sinal é consumida no movimento ondulatório na passagem pelas moléculas da atmosfera. Este fenómeno **não influencia o desfazamento** medido mas limita o **alcance** das visadas. As condições mais desfavoráveis são sol forte e nevoeiro.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Erros devido à **dispersão na atmosfera**

A fonte de emissão da onda não sendo pontual nem perfeitamente focada num único ponto, origina um feixe cónico centrado no eixo do aparelho, o que cria uma dispersão da energia pois **apenas uma parte do sinal emitido incide no reflector**, o que limita o **alcance** do aparelho.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Erros devido ao **percurso do sinal**

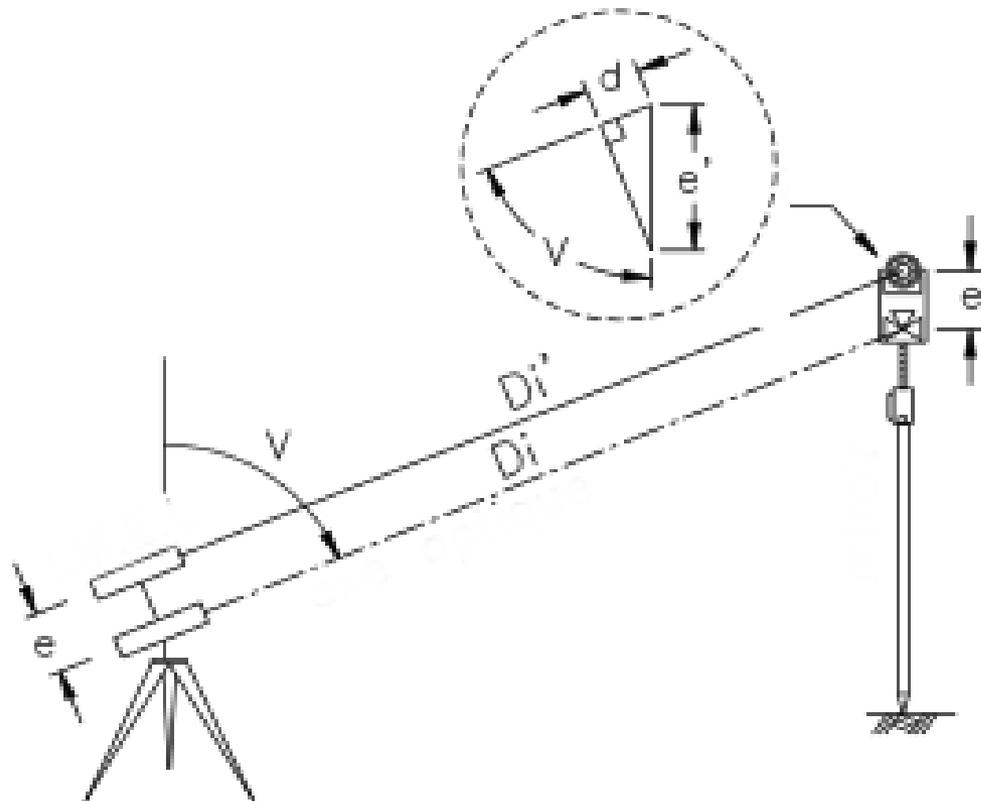
Os aparelhos modernos integram uma correcção automática devido ao erro de nível aparente, provocado pela refacção atmosférica e pela esfericidade terrestre.

A reflexão das ondas em obstáculos pode ser eliminada por medições repetidas ou cíclicas, permitindo desprezar as interrupções no sinal devido, por exemplo, à passagem de pessoas ou veículos.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Erros devido à **excentricidade do distanciômetro**

O emissor pode estar deslocado do eixo óptico do aparelho, pelo que deve ser utilizado o reflector adequado.

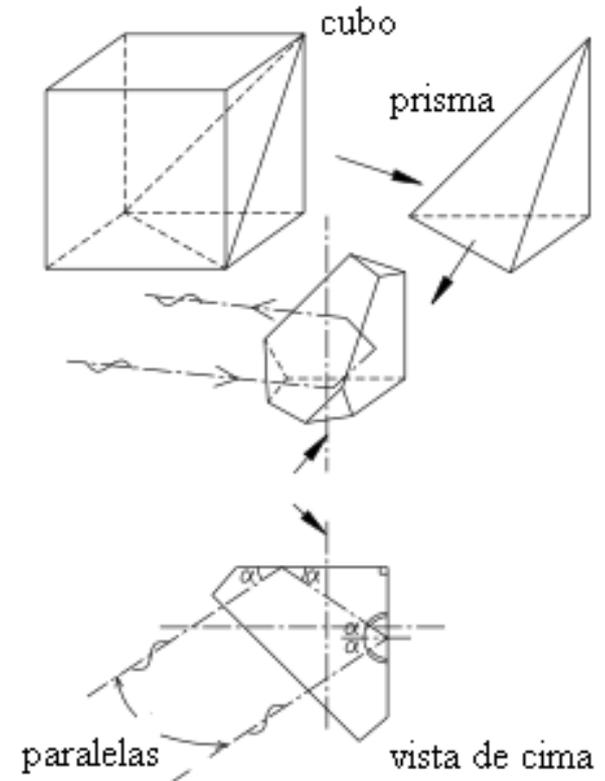


LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Erros devido à **forma do reflector**

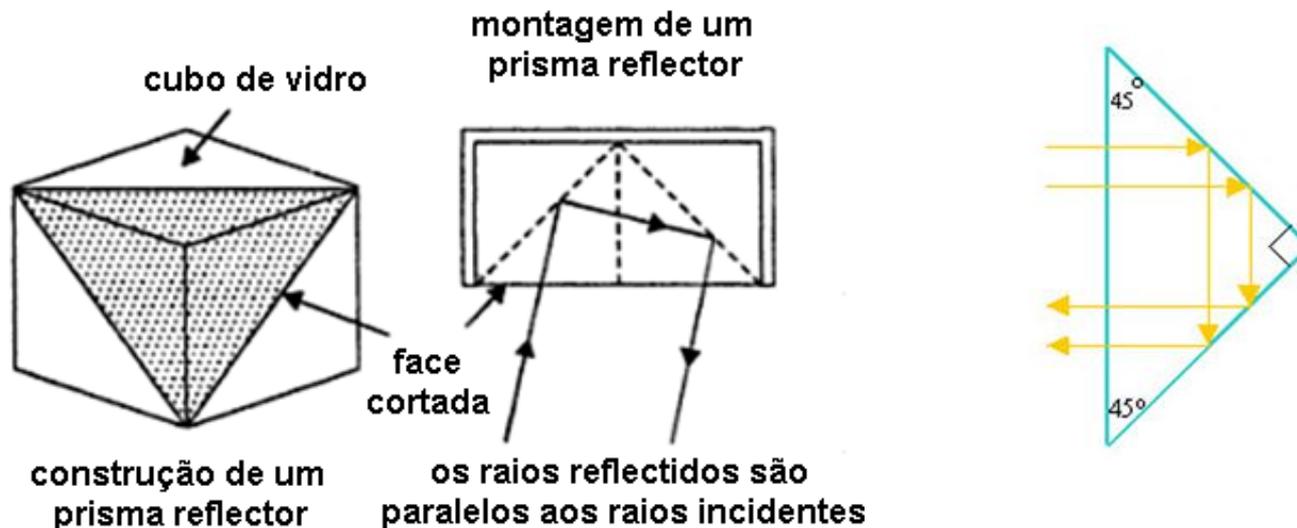
Se a potência do emissor for suficiente, qualquer superfície lisa pode reflectir o sinal. No entanto, para assegurar a autonomia dos distanciómetros, utilizam-se baterias portáteis, pelo que **a energia de emissão deve ser a mais fraca possível.**

Utilizam-se assim prismas romboidais (cubo truncado) para maximizar o sinal reflectido. Este sistema tem a propriedade de que qualquer sinal incidente sofre uma reflexão em 3 faces formando um triedro rectangular, **sendo re-enviado paralelamente a ele próprio.**



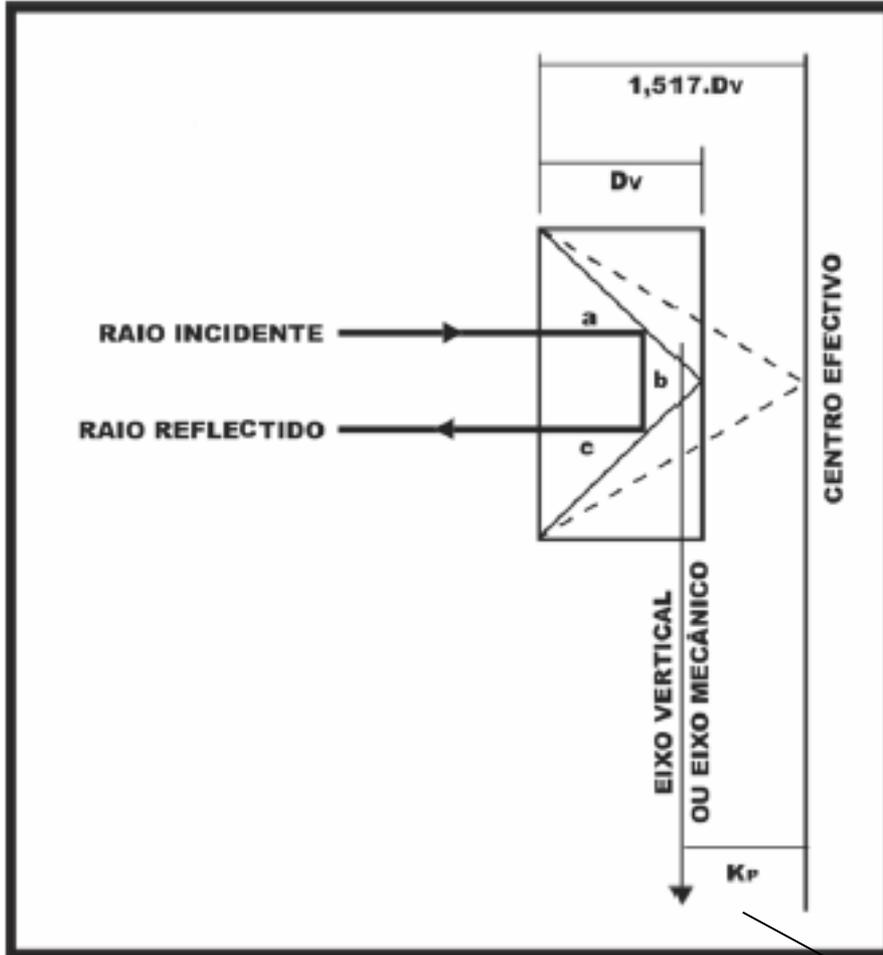
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Os prismas são utilizados em conjunto com os aparelhos EDM para reflectir o sinal emitido. Um exemplo de um prisma está representado na figura, obtido cortando os cantos de um cubo de vidro são cortados, de tal forma que o feixe incidente é reflectido na mesma direcção (retro-reflexão).



A qualidade do prisma é determinada pela perpendicularidade das faces, devendo as respectivas superfícies ser lisas e protegidas por material adequado.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Como o feixe emitido se propaga a menor velocidade no vidro do que no ar, o centro efetivo do refletor está localizado atrás do prisma, não coincidindo com o centro mecânico (bastão ou suporte), produzindo um erro sistemático nas distâncias.

constante do prisma

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

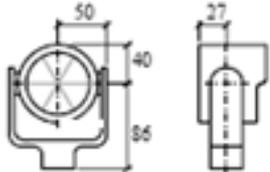
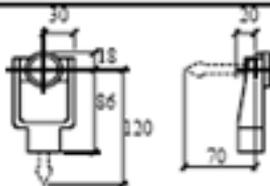
O fabricante normalmente calibra o aparelho EDM de acordo com o prisma correspondente, de forma a não ser necessário acrescentar qualquer constante. Quando se utilizam acessórios de outros fabricantes pode ser necessário configurar a constante do prisma no aparelho.

Coefficiente do prisma: a devolução do sinal de medida, emitido pelo EDM pode ser feita de duas maneiras: reflexão total (por prismas) e reflexão difusa (sem prismas). A reflexão total é utilizada em prismas para produzir o desvio dos feixes de luz em 180° , logo um feixe incidente numa face diagonal do prisma irá, após a reflexão total, retomar numa direcção paralela ao do raio incidente. Este prisma é concebido de tal forma que qualquer feixe de luz incidente sobre as suas superfícies, retorne na mesma direcção.



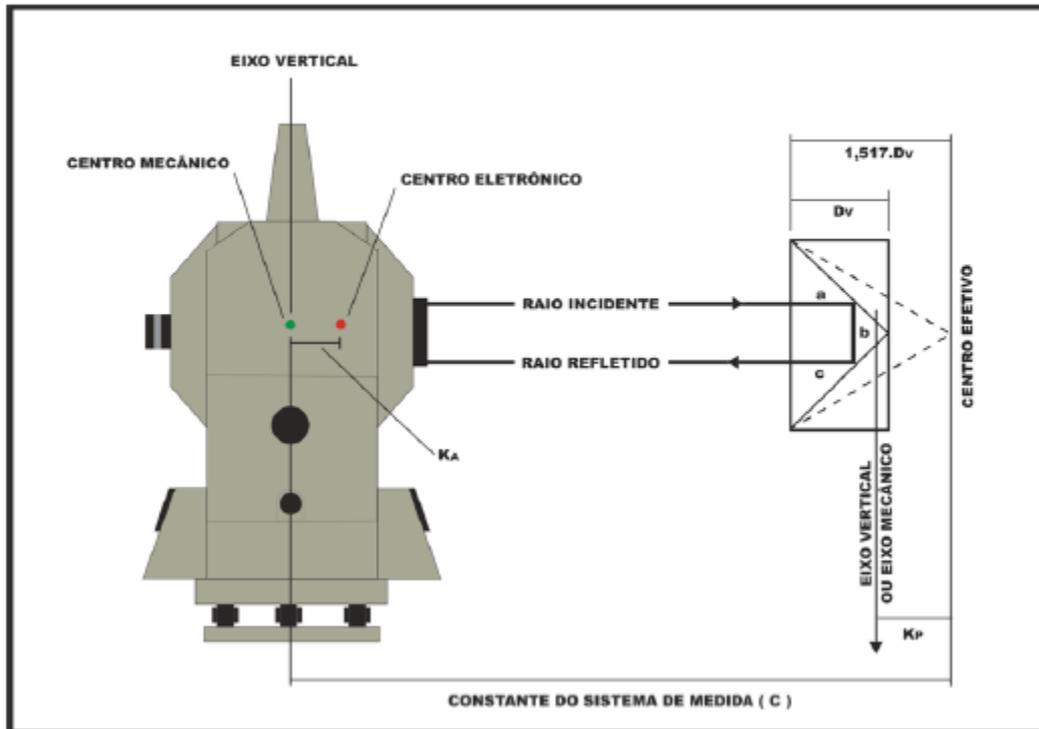
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

A utilização dos prismas nas medições electrónicas deve ser precedida da verificação da constante destes para a correção das distâncias observadas. A constante do prisma fornecida pelo construtor é resultante da constante do instrumento (normalmente zero) mais a constante do prisma, que variam com o tipo, o fabricante e o suporte do prisma.

Prismas Leica	Constantes [mm]	
Prisma padrão GPH1 + GPR1	0.0	
Prisma 360° GRZ4	+23.1	
Mini prisma GMP101/102	+17.5	
Prismas adesivos	+34.4	
USUÁRIO	--	é definido em "Cte Prisma" (-mm + 34.4; ex.: mm = 14 -> entrada = -14 + 34.4 = 20.4)
RL	+34.4	Sem prisma

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

A constante do sistema de medida é a soma da constante aditiva mais o valor da constante do prisma



O centro electrónico do distanciómetro geralmente não coincide exactamente com o centro geométrico de centragem da estação total, pelo que é necessário acrescentar (ou subtrair) à distância medida uma constante denominada “erro de zero” ou “**constante aditiva**” (K_a). Devem-se realizar correções adicionais para reduzir a distância medida na superfície ao elipsóide ou ao plano de referência de trabalho.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

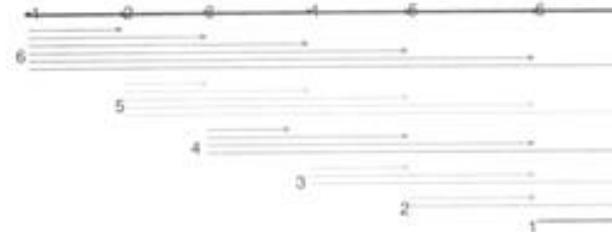
A implementação de sistemas de gestão da qualidade segundo as normas internacionais estabelecidas é, hoje em dia, uma realidade global, particularmente aplicável nas empresas utilizadoras de instrumentos topográficos (base de calibração para verificação ou determinação da rastreabilidade das medições de distância).



Base multi-pilar



ISO 17123-4 EDM (full test procedure)

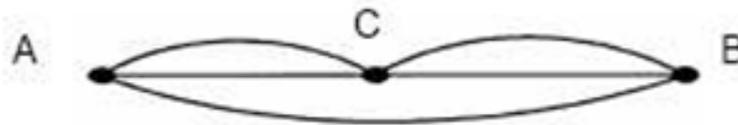


- experimental standard deviation of a single measured distance
- experimental standard deviation of zero-point correction
- zero-point correction

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Quando se utilizam prismas que não se conhece a constante, é necessário definir o valor da correção da constante do prisma para uma marca de prisma específica. Uma vez colocado este valor, este é guardado quando o aparelho for desligado. A verificação e ajuste das constantes do instrumento devem ser efectuadas numa linha base com distância conhecida, isenta de movimentos e com sistema de centragem forçada. Se não existe tal local, estabeleça sua própria linha base de 20 m e compare os dados medidos com os do manual do instrumento. Em ambos casos, a constante do prisma, erro de colimação, correção atmosférica e a correção da refração e curvatura devem estar perfeitamente configurados. Se a linha base é usada dentro de um edifício, a diferença de temperatura pode alterar a precisão da medição. Se a diferença da distância medida em relação a linha base for superior a 5 mm, altere as constantes aplicando o seguinte procedimento:

- 1) numa linha de 100 m, estacione o instrumento nos pontos A e B e meça as distâncias AC, AB e BC.
- 2) repita o passo 1 várias vezes para calcular a constante do instrumento, dada por $\text{Constante do instrumento} = AC + BC - AB$.
- 3) se houver discrepância entre a constante original do instrumento e a calculada, configurar o valor da constante do instrumento.



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

De forma a determinar a constante de um prisma utilizado em medições de distância, foram efectuadas as seguintes observações de distância horizontal ao longo de 4 estações A, B, C, D colineares, dispostas num terreno horizontal: AB = 95.178 m, BC = 194.240 m, CD = 203.306 m, AC = 289.378 m, BD = 397.510 m, AD = 492.664 m. Considerando pesos iguais, há 6 observações, sendo 3 independentes.

Considerando os valores observados de AB, BC e CD, modificados por uma constante \underline{e} do prisma, desconhecida (em mm, a ser subtraída), tem-se:

$$\text{AB: } (95178 - \underline{e} + l_1) - (95178 - \underline{e}) = v_1$$

$$\text{BC: } (194240 - \underline{e} + l_2) - (194240 - \underline{e}) = v_2$$

$$\text{CD: } (203306 - \underline{e} + l_3) - (203306 - \underline{e}) = v_3$$

$$\text{AC: } (95178 - \underline{e} + l_1) + (194240 - \underline{e} + l_2) - (289378 - \underline{e}) = v_4$$

$$\text{BD: } (194240 - \underline{e} + l_2) + (203306 - \underline{e} + l_3) - (397510 - \underline{e}) = v_5$$

$$\text{AD: } (95178 - \underline{e} + l_1) - (194240 - \underline{e} + l_2) + (203306 - \underline{e} + l_3) - (492664 - \underline{e}) = v_6$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Simplificando

$$l_1 = v_1$$

$$l_2 = v_2$$

$$l_3 = v_3$$

$$l_1 + l_2 - \underline{e} + 40 = v_4$$

$$l_2 + l_3 - \underline{e} + 36 = v_5$$

$$l_1 + l_2 + l_3 - 2\underline{e} + 60 = v_6$$

sistema cuja solução é $\underline{e} = -30$ mm.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Nas operações de medição de distâncias, desde a materialização do ponto a ser medido até à leitura do mesmo, uma série de erros podem ocorrer. Dentre as principais fontes que dão origem a erros, destacam-se aquela devida à centralização e verticalização do instrumento e do prisma nos pontos, as condições ambientais, a precisão na pontaria e as condições de fabricação e manutenção do equipamento.

Os principais erros são: constante do prisma, temperatura e pressão, centragem do instrumento e do bastão, ângulo vertical, excentricidade vertical, colimação, erro de índice (constante aditiva), erro cíclico (amplitude e fase), erro de escala (variação na frequência da onda portadora do sinal de medida).

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Os construtores de equipamentos de EDM especificam a respectiva precisão como se segue:

- 1) o desvio padrão da medição (por exemplo: ± 5 mm)
- 2) um erro proporcional à distância D, devido a variações na frequência de operação e a efeitos meteorológicos (por exemplo: ± 2 ppm ou $\pm 2 \times 10^{-6} D$)

Classes de distanciômetros	Desvio padrão, Precisão linear
1- precisão baixa	$\pm (10\text{mm} + 10 \text{ ppm } \times D)$
2- precisão média	$\pm (5\text{mm} + 5 \text{ ppm } \times D)$
3- precisão alta	$\pm (3\text{mm} + 2 \text{ ppm } \times D)$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

DI1000

DI55

DI2000

DI3000
DIOR3002



TECHNICAL DATA

	DI1000	DI55	DI2000	DI3000 ⁽¹⁾
Standard deviation	5mm + 5ppm	3mm + 2ppm	1mm + 1ppm	3 to 5mm + 1ppm
Range*				
with 1prism	800m/1000m	2.5km/3.5km	2.0km/2.5km	6km/9km
with 3prisms	1200m/1600m	3.5km/5.0km	2.3km/3.5km	7km/11km
with 11prisms	—	5.0km/7.0km	4.0km/5.5km	9km/14km
Time needed				
Standard measurement	5s	4s	4s	3.5s
Tracking update	0.3s	1s	0.5s	0.3s
Rapid measurement	—	—	2s	0.8s
Resolution	1mm/0.01ft	1mm/0.01ft	1mm/0.01ft or 0.1mm/0.001ft	1mm/0.01ft or 0.1mm/0.001ft
Recommended combinations with Wild theodolites				
electronic	T1000	T1600, T2002	T2002, T1600	T1600, T2002
optical	T1, T16	T2	T2	T2
Further combinations				
electronic	T1600, T2002	T1000, T3000	T1000, T3000	T1000, T3000
optical	T2, RDS, T0	T1, T16	T1, T16	T1, T16, yoke
Tilting range**				
on theodolite	-70gon to zenith	-70gon to zenith	-70gon to zenith	±33gon
in yoke, or with optional counterweight	—	—	—	-70gon to zenith
Displayed values	↙	↙	↙	↙, ↘, ↗, ↖, ↕, ↔, arithmetic mean, standard deviation
with optional keyboard GT55	↙, ↘, ↗, ↖, ΔE, ΔN, Δ, Δ, Δ	↙, ↘, ↗, ↖, ΔE, ΔN, Δ, Δ, Δ	↙, ↘, ↗, ↖, ΔE, ΔN, Δ, Δ, Δ	
Scale correction (ppm)				
Range	-150 to +150	-500 to +500	-500 to +500	-999 to +999
Step	1ppm	1ppm	1ppm	1ppm
Power supply 12V				
Mini-battery 3.5Ah	300	100	200	300
Small battery 2Ah	1200	400	800	1200
Large battery 7Ah	4200	1500	2800	4200
Weights				
EDM	0.6kg/1.3lb	1.1kg/2.4lb	0.7kg/1.5lb	1.7kg/3.7lb
Counterweight	0.5kg/1.1lb	0.8kg/1.8lb	0.5kg/1.1lb	1.5kg/3.3lb (optional)

Shared characteristics:

Temperature -20°C to +50°C

Measurement fully automatic

Unambiguous total distance always displayed

Angular input 170.1angon

Prism constant Range: -99mm to +99mm in 1mm steps (DI2000: ±9.9mm/0.1mm)

* in medium/favourable atmospheric conditions

** depending on theodolite used

(1) DIOR3002: see description, page 17

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

TC1000
TC1600

TC2000



estações totais

TECHNICAL DATA

	TC1000/TC1600	TC2000
Angle measurement	continuous, absolute encoder	absolute encoder, dynamic system, diametrical scanning
Smallest unit displayed	TC1000: 0.001gon, 1", 0.01mil TC1600: 0.0001gon, 1", 0.001mil	0.1", 0.00001°, 0.00001gon, 0.0001mil
Updates, continuous mode	0.1–0.3s (both Hz and V)	0.3s (both Hz and V)
Standard deviation to DIN 18723 (Hz/V)	TC1000: 3" (0.001gon) TC1600: 1.5" (0.0005gon)	0.5" (0.00015gon)
Automatic index	pendulum compensator	liquid compensator
Working range	±5" (±0.1gon)	> ±10" (> ±0.2gon)
Setting accuracy	±1" (±0.0003gon)	< ±0.1" (< ±0.0003gon)
Telescope	conventional	panfocal
Magnification	30×	30× (focused to ∞)
Field of view at 1000m	27m	26m
Shortest focusing distance	1.7m	0.9m
Displays	LCD; 2 displays in each telescope position; 8 digits and sign, symbols to guide user	LCD; 3 displays in each telescope position; 8 digits and sign, 1 alphanumeric display for user guidance, 2 data displays
Distance measurement	Coaxial telescope for angle and distance measurement	
Standard deviation		
Normal measurement	3mm+2ppm, time needed 5s	2mm+2ppm, time needed 6.5s
DIL repeat measurement	3mm+2ppm, time needed 5s	—
Tracking	5mm+2ppm, time needed 1–2s	10mm to 20mm, time needed 2.5s
Range (in average atmospheric conditions)		
with 1prism	2.0km	2.5km
with 3prisms	2.8km	3.5km
with 11prisms	4.0km	5.0km
Signal attenuation	automatic	automatic
Power consumption during measurement	about 5W (0.4A, 12V)	about 9.5W (0.8A, 12V)
Scale correction	–399ppm to +399ppm	–999ppm to +999ppm
Step	1ppm	1ppm
Additive constant	–999mm to +999mm	–99mm to +99mm
Step	1mm	1mm
Two models	Control panel on both faces, or 1 control panel and REC module insert in position II	Control panel on both faces or on one face only
Data recording	REC module or GRE4a/GRE4n	GRE4a or GRE4n
Power supply	12V DC	12V DC
Plug-in battery	GEB77 (0.45Ah)	GEB68 (2Ah)
External batteries	GEB70 (2Ah) GEB71 (7Ah)	GEB70 (2Ah) GEB71 (7Ah)
Level sensitivity		
Circular bubble in tribrach	8' per 2mm	8' per 2mm
Plate level	30" per 2mm	20" per 2mm
Weight		
Instrument	5.5kg 12.1lb	9.6kg 21.1lb
Case	3.9kg 8.6lb	5.5kg 12.1lb

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

TM3000V – TM3000D – TM3000L



TECHNICAL DATA

TM3000V/TM3000D/TM3000L

Angle measurement	Absolute encoder, dynamic measuring system, diametrical scanning system
Standard deviation to DIN 18723 (horizontal and vertical)	0.5" (0.00015gon)
Smallest unit (selectable)	0.00001gon, 0.00001°, 0.0001mil
Time taken for single measurement (horizontal and vertical)	0.9s
Compensator may be activated/deactivated	Two-axis liquid compensator
Working range, maximum tilt	3.2' (0.06gon)
Setting accuracy	0.1" (0.00003gon)
Drive of standing and tilting axes	Servo motors with incremental encoders and digital scanning system
Maximum speed of rotation	50°/s for both axes
Technical data of TM3000V	
Telescope Components	Telescope, CCD camera, optic coupler, wide-angle lens, focusing drive
Focusing drive	Servo motor with absolute linear scanning system and digital control
Focusing range	0.65m from tilting axis to ∞
Resolution of linear scanning system	2.5µm
Optic coupler	Deflection of optical path from telescope to CCD camera
CCD camera Scanning range Resolution	8.8×6.6mm (H×V) 500 pixels horizontally, 582 pixels vertically
Technical data of TM3000D	
Telescope Tilting range	Identical to T3000 Limited by limit switch
without DISTOMAT	from 44.5° to 299.2° (49.4gon to 332.4gon)
with DISTOMAT attached	from 44.5° to 175° (49.4gon to 194.4gon)
Distomat	DI2000, DI3000, DIOR3002
Technical data of TM3000L	
Telescope Components	Telescope, laser coupler with integrated laser scanner, focusing drive
Focusing drive	As for TM3000V
Laser coupler Wavelength of HeNe laser Telescope output	0.63µm 1mW (IEC class 2)
Laser scanner	Moves laser dot in circular pattern to reduce speckle effect

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Instrumentos que usam luz visível: nos instrumentos que usam luz visível, uma lâmpada emite luz que passa por um primeiro prisma de Nicol (ou filtro polaróide) que produz uma polarização segundo um plano, e se a célula Kerr não estiver funcionando, a luz não passa pelo segundo prisma de Nicol, por estar o mesmo cruzado em relação ao primeiro. Porém, a célula Kerr sob a influência da voltagem aplicada pelo oscilador controlado por cristal, gira o plano de polarização em função da diferença de potencial em cada instante e, portanto, uma parte do feixe pode atravessar o segundo prisma de Nicol. Por outras palavras, a quantidade de luz transmitida é proporcional à voltagem e, portanto, à rotação produzida pela célula Kerr, e o feixe agora modulado em intensidade na frequência de modulação, é transmitido por um espelho côncavo para o reflector. O feixe de luz que retorna para o instrumento é recebido por um outro espelho que focaliza o feixe no foco do primeiro cátodo da válvula fotomultiplicadora. A corrente que flui da válvula fotomultiplicadora varia com a intensidade da luz que incide no segundo espelho e com a voltagem aplicada a ela, de acordo com o segundo gerador controlado por cristal. O primeiro gerador funciona na frequência de aproximadamente 30 MHz e o segundo em aproximadamente 30,0015 MHz, ou seja, 1,5 KHz acima do primeiro. O sinal de saída do fotomultiplicador tem um valor de 1,5 KHz e fase φ_2 relacionada com o sinal de saída de 30 MHz. Por outro lado, os sinais dos dois geradores controlados por cristal são levados para um misturador que determina a diferença dos sinais de 1,5 KHz, com a fase φ_1 da onda emitida que é a referência de medida de fase. Portanto, pode ser medida a diferença de fase φ_2 e φ_1 utilizando um resolvedor, isto é, a fase de referência φ_1 é retardada até que os dois valores, φ_1 e φ_2 , se igualem dando um valor de zero, sendo o seu valor indicado no ecrã de leitura digital. Nestes instrumentos a propagação da luz é directa e dificilmente ocorrem reflexões secundárias, pois a maior parte das superfícies encontradas na natureza não produz reflexões fortes para esse comprimento de onda.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Por outro lado, durante o dia sempre existe a entrada de outras luzes no sistema óptico, reduzindo, assim, sua potencialidade de medida. O feixe é altamente colimado com uma divergência de apenas frações do grau, razão pela qual o receptor óptico tem um diâmetro bastante pequeno e, portanto, pequeno ângulo de aceitação. Com exceção dos equipamentos providos com laser, o alcance em geral é bem menor do que os instrumentos que usam micro-ondas, sendo que à noite o alcance aumenta. Por outro lado, a chuva ou neblina diminuem bastante o alcance. O índice de refração afectado pelas condições atmosféricas é pouco influenciável para o curto comprimento de onda usado, e a humidade que tem grande importância nas medidas com microondas é de pequena influência no geodímetro; principalmente devido a essas razões, o erro externo agora é considerado com um valor de 1 ppm. Para linhas curtas basta tomar as medidas meteorológicas numa extremidade da linha. A curvatura do percurso somente é levada em conta para as maiores distâncias e o seu valor é bastante pequeno. Com luz visível, as leis da óptica geométrica podem ser aplicadas com maior precisão aos transmissores e reflectores dos sinais, pois o percurso da onda é mais bem definido e também é mais estável. Em geral, os equipamentos eletro-ópticos são mais apropriados para medir distâncias menores para a obtenção de alta precisão, sendo o erro de zero o mais importante factor de sua limitação em precisão. O uso do equipamento é bastante aplicado na engenharia civil, podendo ser usado na abertura de túneis ou minas, barragens, pontes, instalação de máquinas, etc.; e no levantamento de campo, medidas de bases de triangulações, poligonais de precisão ou trilaterações de lados curtos.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Instrumentos que usam micro-ondas: os instrumentos que usam micro-ondas tem comprimentos de onda da ordem de alguns centímetros. Nos telurómetros, os primeiros modelos tinham comprimentos de onda de 3 a 10 cm, e o modelo mais recente, o MRA-4, tem um valor de λ em torno de 9 mm. Devido ao curto comprimento de onda, a propagação é directa, podendo em certas circunstâncias haver reflexões no solo. Os sinais são irradiados de dipolos de meia onda, colocados no ponto focal do reflector parabólico, com isso obtém-se uma propagação bastante direcional, sendo o ângulo do cone de divergência uma função das dimensões do refletor e comprimento de onda usado. Como o sinal é directo, o alcance do instrumento é limitado à linha de visada, o que implica em distâncias normalmente menores que 100 km. O equipamento pode ser utilizado de dia ou à noite, e mesmo a fraca visibilidade não impede as operações de medida. No caso de chuva o alcance diminui, principalmente com o uso de comprimentos de onda menores, como é o caso do MRA-4. Os equipamentos com micro-ondas utilizam a modulação em frequência da onda portadora, e utilizam diversas frequências para a eliminação de ambiguidades. A frequência mais alta define o limite de precisão possível, sendo que os instrumentos mais recentes utilizam uma frequência em torno de 7,5 MHz. A medida é o dobro deste valor, o que corresponde a um meio de comprimento de onda de 10 m. Como é possível medir 1/1000 partes do ciclo, tem-se uma resolução de 1 cm.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Como há a possibilidade de medir longas distâncias e considerando-se a resolução de 1 cm, as condições atmosféricas tem grande influência, e normalmente são feitas medidas meteorológicas nas extremidades da linha. As experiências têm indicado que uma precisão da ordem de 3 ppm (partes por milhão) pode ser obtida com cuidadosas observações meteorológicas. Na realidade, é da definição aproximadamente precisa do índice de refração do percurso no instante da medição, que se pode obter uma maior ou menor precisão. Nas pequenas distâncias, da ordem de 1 km, os erros instrumentais têm maior peso, bastando efectuar as medidas em uma das extremidades da linha. Os equipamentos com micro-ondas foram concebidos para medidas geodésicas, isto é, bases de triangulações, poligonações de precisão ou trilaterações de lados curtos, mas a segurança nas medidas, facilidade de operação, preço relativamente baixo, permitiu uma utilização mais ampla, de maneira que qualquer distância superior a 100 m pode, com grandes vantagens, ser medida com equipamento eletrônico, havendo necessidade de obtenção de uma precisão acima de 1/10.000 ou 1/20.000. Somente os últimos modelos permitem sua utilização em túneis, pois os feixes dos primeiros era muito grande, produzindo problemas com reflexões.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

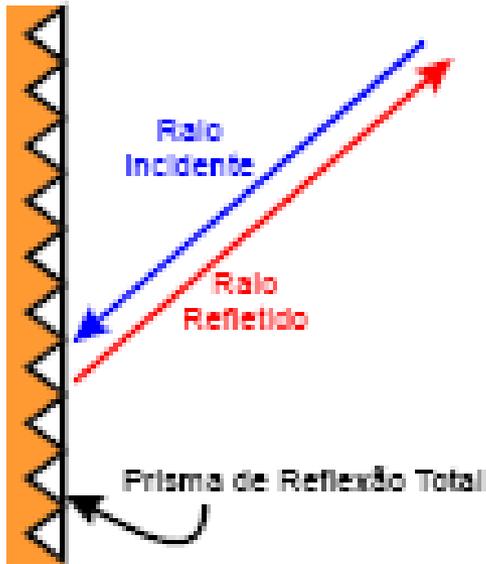
Instrumentos que usam infravermelho: os instrumentos que usam infravermelho como onda portadora têm um comprimento de onda em torno de $0,9 \mu\text{m}$. O índice de refração padrão usados para os instrumentos a infravermelho é tomado geralmente como 1,00028 e para uma precisão de 1 ppm a pressão deve ser obtida com erro inferior a 3 mm Hg. Na região do infravermelho a atmosfera tem uma forte absorção, com exceção da região entre $0,72 \mu\text{m}$ e $0,94 \mu\text{m}$, que é chamado de “janela do infravermelho”, que implica no uso desta região em todos os instrumentos. Todos os equipamentos que funcionam na região do infravermelho são limitados pela potência de saída da fonte, que é um diodo luminescente de arseniato de gálio, que emite radiação incoerente de aproximadamente $0,9 \mu\text{m}$ e que tem como principal característica a de poder ser modulado diretamente em intensidade. O diodo consiste em dois extractos semicondutores, um dos quais é um condutor positivo e o outro negativo. Na zona de transição, os elétrons podem ser levados a um estado de maior energia com a aplicação de uma corrente de excitação, e a energia se desprende sob a forma de radiação luminosa espontânea. A radiação emitida pelo diodo é proporcional à corrente de excitação, ou corrente aplicada.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

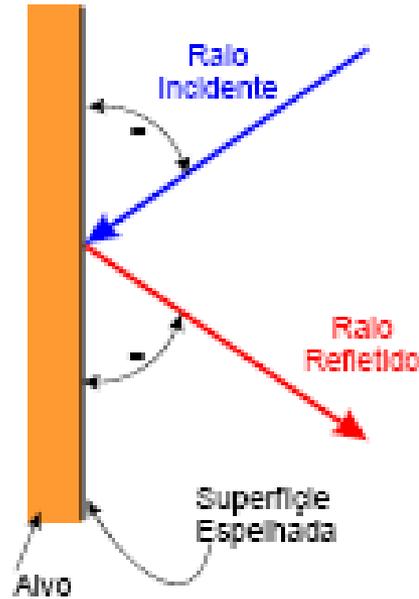


acessórios (alvos, prismas, bastões)

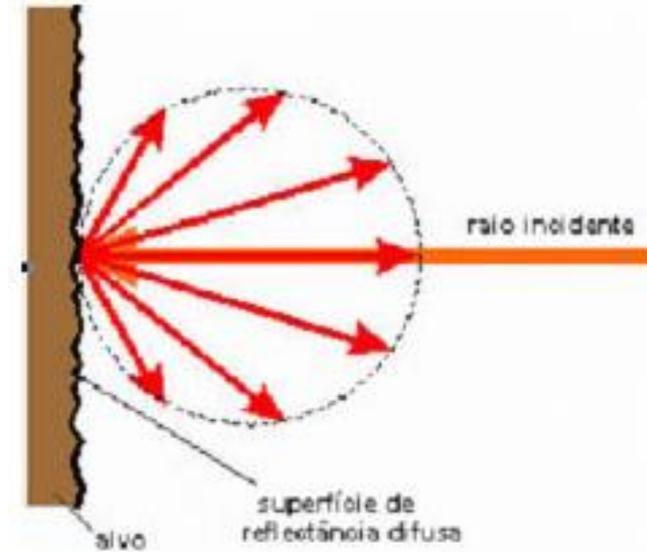
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Reflexão total



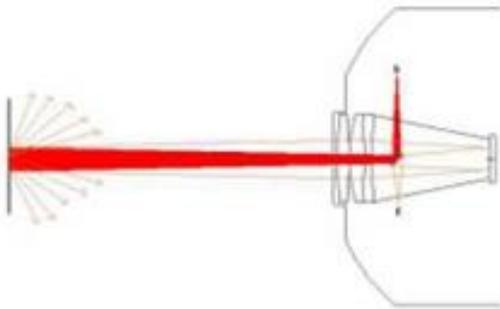
Reflexão especular



Reflexão difusa

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Na reflexão difusa os feixes de luz divergem de maneira proporcional com o aumento da distância em relação à fonte emissora. A medição sem prisma é utilizada em equipamentos que emitem laser, que é uma fonte de luz coerente com incidência bem localizada, permitindo que uma parte dos raios incidentes retorne ao EDM.



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

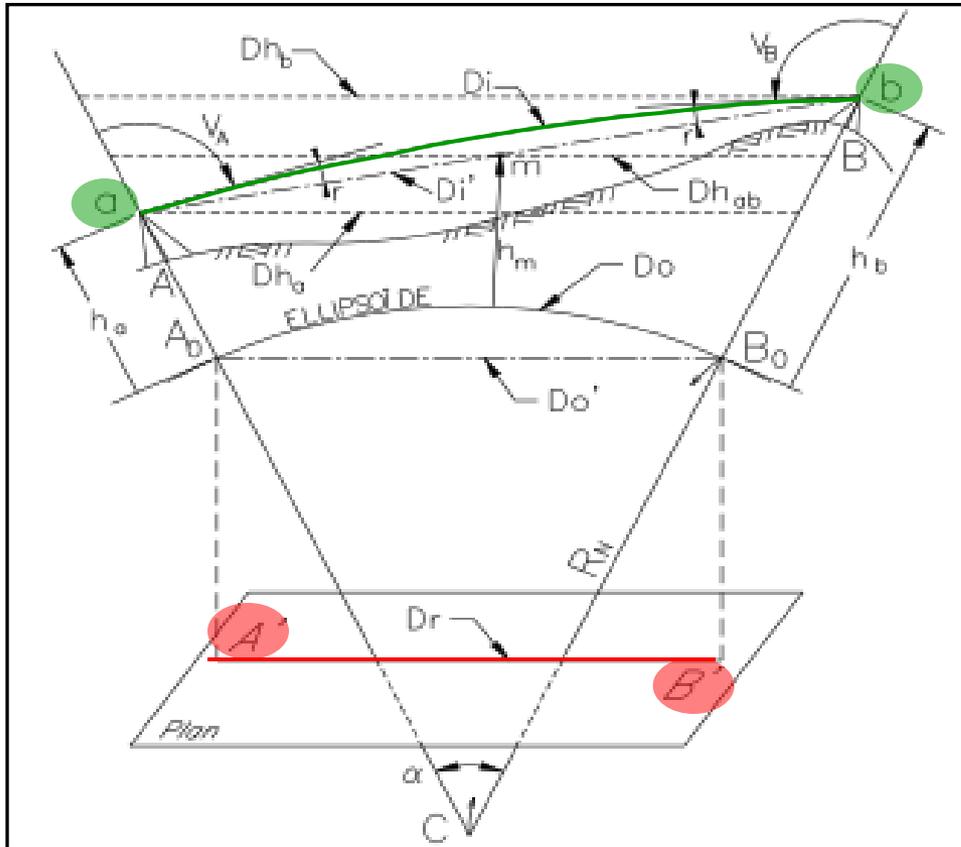
Reflexão Total - utilizado por equipamentos com portadora infravermelho e para portadoras LASER quando utilizadas para medidas de grandes distâncias. Este tipo de refletor é mais conhecido como reflector de canto, formado por três faces ortogonais. A característica principal consiste na devolução do sinal independentemente do ângulo de incidência no refletor, sendo este reflectido retorna paralelamente a ele própria. Nesta estrutura encaixam-se também as fitas adesivas utilizadas em rodovias para sinalização, conhecidas popularmente como “olhos-de-gato”. Estes modelos são econômicos e eficientes, porém só proporcionam boas respostas para distâncias curtas. Tais sistemas podem ser utilizados como alvos permanentes para controlo de estruturas.

Reflexão especular - a característica deste alvo consiste em refletir o raio incidente com o mesmo ângulo de incidência. A aplicação deste tipo de alvo na determinação de distâncias em Topografia é muito restrita.

Reflexão difusa – uma parte do sinal reflectido retorna paralelamente ao sinal emitido.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

As distâncias medidas devem ser transformadas antes de utilizadas no cálculo de coordenadas devido aos problemas da representação plana do elipsóide.



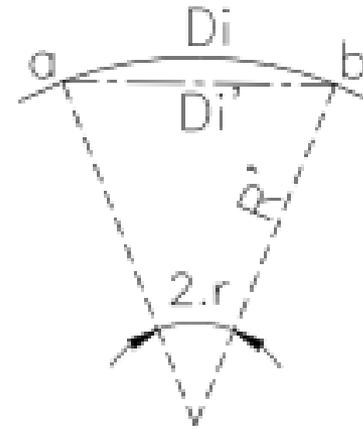
O objectivo é obter a distância $A'B'$, designada por D_r , projectada num plano horizontal, por exemplo uma carta.

No terreno, utilizando um distanciómetro, mede-se a distância D_i segundo o percurso curvo do raio luminoso devido à refração atmosférica (r =ângulo de refração) entre os pontos **a** e **b**, centros ópticos do aparelho estacionado em **A** e do prisma estacionado em **B**.

Redução das distâncias medidas

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Medição de D_i : a curva descrita pela linha de visada, cujo comprimento D_i é medido pelo distanciômetro, pode ser assimilada a um arco de circunferência de raio $R' \approx 6R_N$, em que $R_N = (R_A + R_B)/2$ é a média dos raios das secções normais ao elipsóide em a e em b.



Redução à corda para a obtenção de D_i' : em topografia esta correção é desprezada atendendo à relação entre o raio da Terra (e portanto dos raios de curvatura das linhas de visada) e as distâncias medidas; designando a corda ab por D_i' e o arco ab por D_i , tem-se $D_i = 2r_{\text{radianos}} R'$ e $D_i' = 2R' \sin r$, onde $2r$ é o ângulo subtendido pelo arco ab, donde $D_i' = 2R' \sin(D_i/2R')$. Desenvolvendo $\sin(D_i/2R')$ em série, tem-se $D_i' \approx D_i - D_i^3/24R'^2$, o que significa um erro de 1 mm para $D_i = 32.7$ km.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

A distância inclinada D_i pode ser medida de A para B ou de B para A ou ainda efectuando visadas recíprocas, simultâneas ou não. Devem ser medidas as distâncias zenitais V_A e V_B . Os pontos a e b têm a mesma **projecção sobre o elipsóide** que os pontos estação A e B, tendo portanto a mesma posição planimétrica. Sendo a_a^i e a_b^i as alturas do instrumento em A e em B, tem-se que as altitudes elipsoidais **$h_a = h_A + h_a^i$** , **$h_b = h_B + h_b^i$** , **$h_M = (h_A + h_B)/2$** , em que m é o ponto médio do segmento ab.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

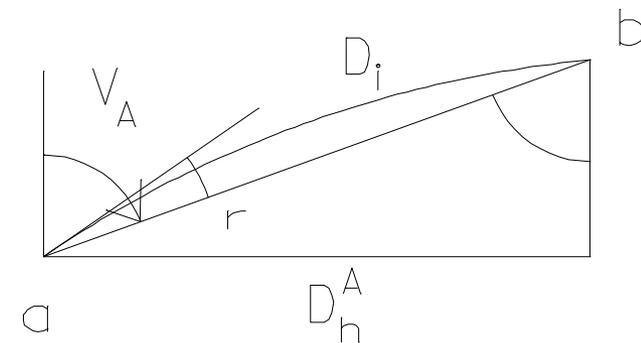
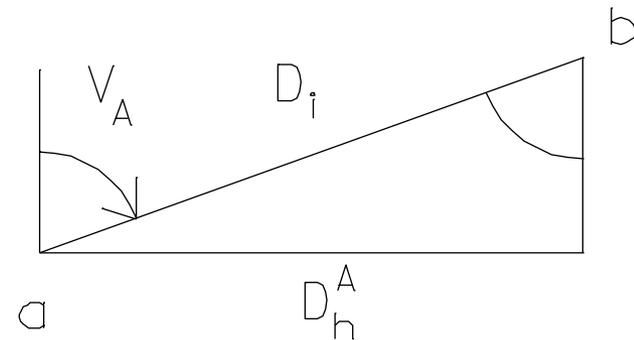
Redução à horizontal: a visada unilateral (apenas de A para B), as visadas recíprocas em A e B e as visadas recíprocas simultâneas em A e B permitem obter:

$$Dh_A = D_i \sin V_A + \frac{mra - 2}{2R_N} D_i^2 \sin V_A \cos V_A$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Dh_A = D_i \sin V_A \\ Dh_B = D_i \sin V_B \end{array} \right\} Dh_{AB} = \frac{Dh_A + Dh_B}{2}$$

$$Dh_{AB} = D_i \cos \frac{V_B - V_A}{2}$$

onde mra é o módulo de refração atmosférica, geralmente tomando o valor 0.13.



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Estas fórmulas fornecem a correcção a aplicar a D_h devido a erros provocados pela refacção atmosférica e pela esfericidade terrestre. No primeiro caso a correcção obtém-se utilizando um modelo atmosférico; nos casos restantes, os erros eliminam-se por diferença.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Devido à esfericidade terrestre, as distâncias horizontais no terreno dependem da altitude do ponto de redução; em rigor, a distância reduzida ao horizonte no ponto A é diferente da distância reduzida ao horizonte no ponto a, que por serem muito próximas, são consideradas iguais; de facto, a influência desta aproximação no resultado é muito insignificante:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{Dh_A}{R_N + h_A} = \frac{Dh_a}{R_N + h_A + h_a^i} = \frac{Dh_a - Dh_A}{h_a^i} \Rightarrow \frac{Dh_a - Dh_A}{Dh_A} = \frac{h_a^i}{R_N + h_A}$$

Numericamente, mesmo num caso desfavorável onde $h_A=0$ e $h_a^i=2$ m, o erro é da ordem de 0.3 ppm, donde, para efeitos práticos, $Dh_A=Dh_a$, $Dh_B=Dh_b$, $Dh_M=Dh_m$.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Exemplo: com que precisão é necessário ler os ângulos verticais para obter a distância horizontal $D_{h_{AB}}$ ao centímetro se a distância inclinada D_i igual a 2 km for medida por visadas recíprocas simultâneas com um distanciômetro tal que $\sigma_{D_i} = \pm(3 \text{ mm} + 2 \text{ ppm})$ e se $(V_B - V_A) = 6 \text{ gon}$?

$$\sigma_{D_h}^2 = [\sigma_{D_i} \cos(V_B - V_A)/2]^2 + 2[D_i \sigma_V \sin(V_B - V_A)/2]^2 \Rightarrow \sigma_V = \pm 5.8 \text{ mgon}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Redução ao elipsóide: o teorema de Tales permite escrever

$$D_{O'} = Dh_{ab} \frac{R_N}{R_N + h_m} = Dh_a \frac{R_N}{R_N + h_a} = Dh_b \frac{R_N}{R_N + h_b}$$

É portanto necessário conhecer a altitude média h_m da visada ab , ou seja, do ponto m , obtida a partir das altitudes dos pontos a e b . Sendo conhecido o valor do raio terrestre médio para as altitudes em questão, é suficiente o conhecimento de h_a e h_b ao metro, tendo-se consoante o caso (visadas unilaterais ou recíprocas/visadas recíprocas simultâneas):

$$\begin{cases} h_m = h_A + a_a^i + \frac{D_i}{2} \cos V_A + \frac{D_{h(\text{km})}^2}{15.2} = h_B + a_b^i + \frac{D_i}{2} \cos V_B + \frac{D_{h(\text{km})}^2}{15.2} \\ h_m = h_A + a_a^i + \frac{D_i}{2} \sin \frac{V_B - V_A}{2} = h_B + a_b^i + \frac{D_i}{2} \sin \frac{V_A - V_B}{2} \end{cases}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Exemplo: utilizando os valores numéricos do último exemplo, com que precisão é necessário conhecer h_m para obter D_o' com precisão milimétrica, admitindo que não há incerteza em D_i nem em R_N ?

De $D_i=2$ km e $V_B-V_A=6$ gon, $Dh_{AB}\approx 1997.8$ m e $\Delta h_{AB}\approx 94.2$ m;

$\sigma_{D_o'} = DhR_N / (R_N + h_m)^2 \sigma_h \Rightarrow \sigma_h \approx R_N / Dh \sigma_{D_o'} = \pm 3.2$ m para se obter D_o' com precisão igual a ± 1 mm .

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Redução ao plano cartográfico: esta correção depende da projecção utilizada; no caso da **projecção de Gauss**, o factor a aplicar à distância reduzida ao elipsóide é:

$$\frac{M_E^2 + M_V^2 + M_E M_V}{4R^2}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Reduções de distâncias

As distâncias medidas são sempre inclinadas e calculadas pela fórmula:

$$D_i = D_o * (1 + \text{ppm} * 10^{-6}) + \text{mm}$$

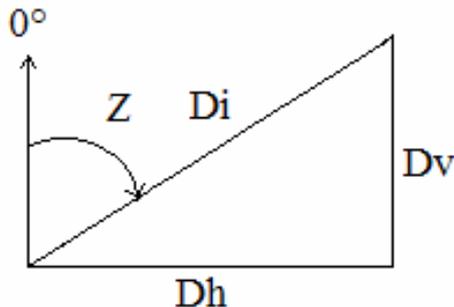
D_i = distância inclinada em metros;

D_o = distância não corrigida;

ppm = correção de escala (mm/Km);

mm = constante do prisma (mm).

A fórmula de conversão de distância inclinada em distâncias horizontal e vertical são as seguintes quando as correções de refração e curvatura da Terra não são aplicadas.



$$D_h = D_i * \text{sen } Z$$

$$D_v = D_i * \text{cos } Z$$

Z = ângulo vertical

D_h = distância horizontal

D_v = distância vertical

D_i = distância inclinada

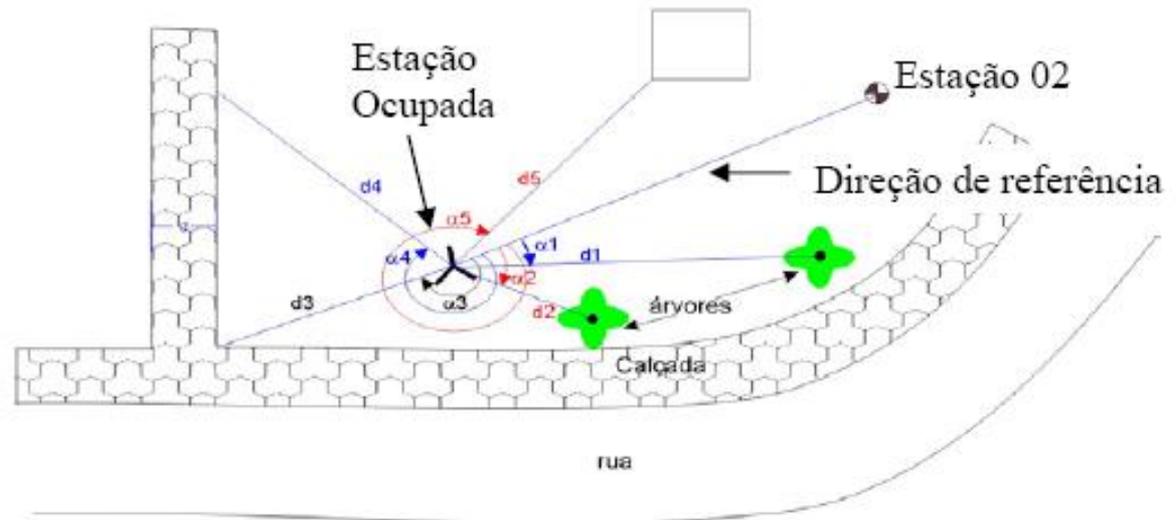
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Um **levantamento topográfico** é o conjunto de operações cuja finalidade é a **determinação da posição relativa de pontos da superfície terrestre** através de medições lineares e angulares, envolvendo:

- **planeamento**: estabelecimento das especificações de precisão, análise de documentação existente, reconhecimento do local, selecção do(s) procedimento(s) e do equipamento
- **execução**: implantação do apoio necessário, trabalho de campo
- **cálculo**: realização dos cálculos e implantação gráfica, redação de um relatório

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Um levantamento topográfico é realizado com base num certo número de estações solidamente relacionadas entre si, que constituem o “**apoio**” ou esqueleto do levantamento (este apoio pode ou não estar ligado à rede geodésica), a **partir das quais se representa o detalhe passível de ser daí obtido**. Este apoio permite uma frequente verificação das orientações e fornece pontos de partida para a coordenação de novas estações.



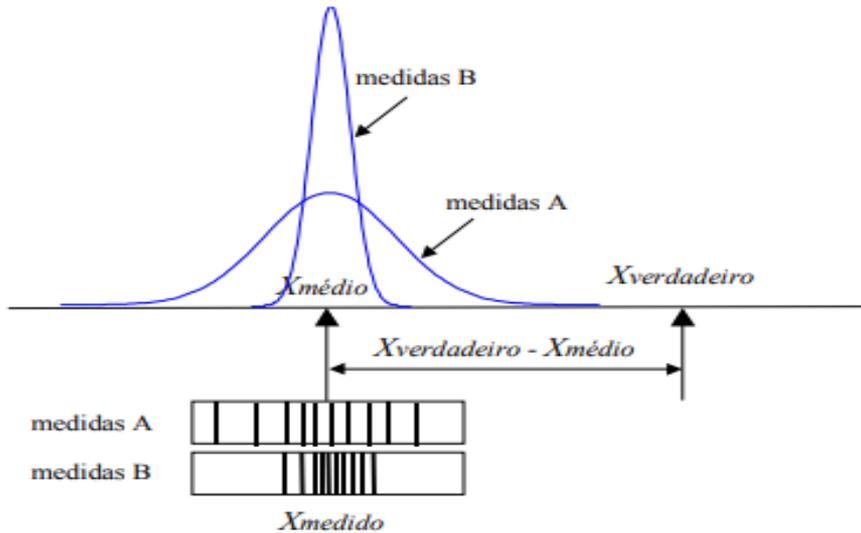
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

A **exactidão** de um conjunto de medidas representa o grau de proximidade dos valores observados com o valor verdadeiro da grandeza medida.

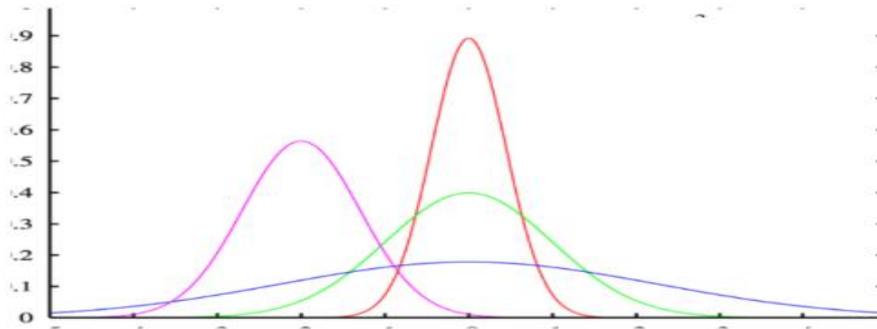
A **precisão** de um conjunto de medidas traduz a dispersão dos valores observados entre si.

Assim a exactidão é influenciada pelos **erros sistemáticos** e a precisão é influenciada pelos **erros aleatórios**.

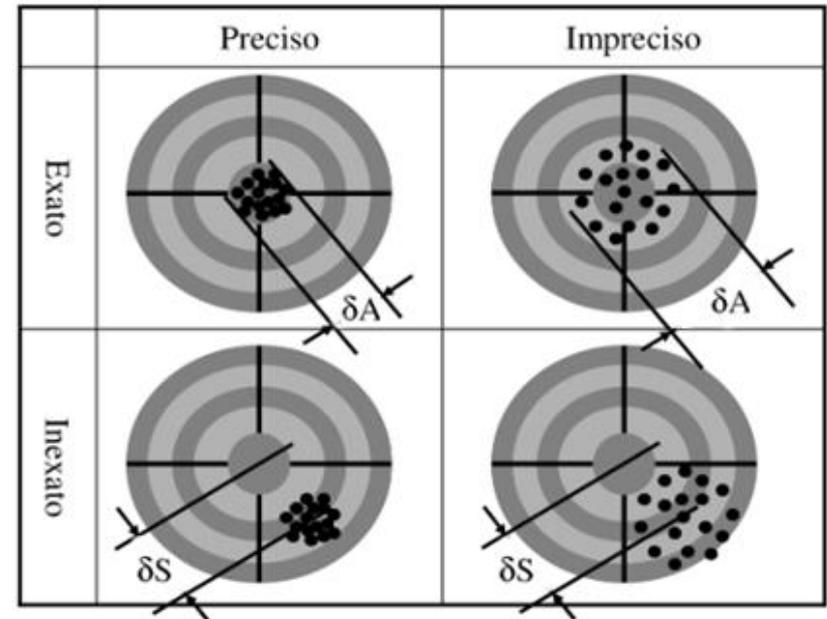
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



As 2 distribuições são igualmente exactas mas têm precisão diferente



O eixo das ordenadas representa a probabilidade; o gráfico a azul representa exactidão óptima (erro médio nulo) mas fraca precisão (variância grande devido a ruído), o verde e encarnado representam a mesma exactidão, com precisão crescente e o roxo representa exactidão e precisão médias.

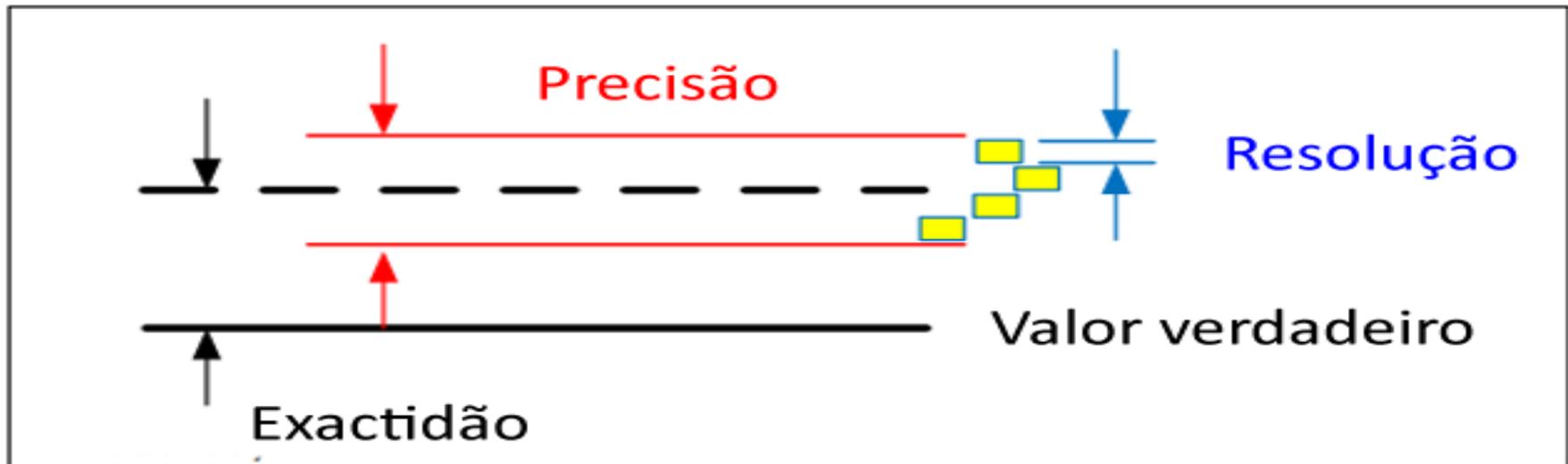


$\delta A \rightarrow$ Erro Aleatório

$\delta S \rightarrow$ Erro Sistemático

O conceito de exactidão aparece sempre ligado a um valor de referência de uma dada grandeza, utilizado para comparação. Uma precisão grande não reflecte necessariamente uma exactidão grande. Na ausência de erros sistemáticos, $\delta S=0$, o desvio padrão (a precisão) constitui uma medida de avaliação da exactidão.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



A figura ilustra os termos exactidão, precisão e resolução: os rectângulos a amarelo representam os valores medidos, sendo o eixo das abcissas por exemplo o tempo. Um sensor ideal deveria repetidamente fornecer o mesmo output, correspondente ao valor verdadeiro, representado pela linha contínua a preto. A precisão ou repetibilidade traduz a dispersão dos sucessivos valores de output. A exactidão depende da diferença entre a média dos valores de output, representada pela linha a tracejado a preto e o valor verdadeiro. A resolução representa a variação mínima do valor medido que resulta num valor diferente de output, sendo normalmente menor que a exactidão.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



1 s/10=0.1 s

Define-se **resolução** de um sensor como a menor variação que pode ser detectada e mostrada pelo sensor.

Considerem-se dois cronómetros, um analógico e outro digital. O cronómetro analógico é lido no disco do mostrador, onde a menor graduação corresponde a um décimo de segundo, que define a **resolução** do cronómetro.

O cronómetro digital mostra dois dígitos a seguir à indicação dos segundos (53), correspondendo ao centésimo de segundo, que define a **resolução** do cronómetro.

Qual é a **precisão** das medidas de cada um dos 2 sistemas de medida, que inclui a pessoa que utiliza o cronómetro em cada um dos casos (a experiência indica uma pessoa leva cerca de 1/10 de segundo a reagir a um estímulo e a accionar o botão)? No caso do cronómetro analógico a precisão é 0.1 s; no caso do cronómetro digital a precisão é também 0.1 s pois devido intervalo estímulo-resposta, o valor 0.01 s não é fidedigno, isto é, o último dígito é aleatório.



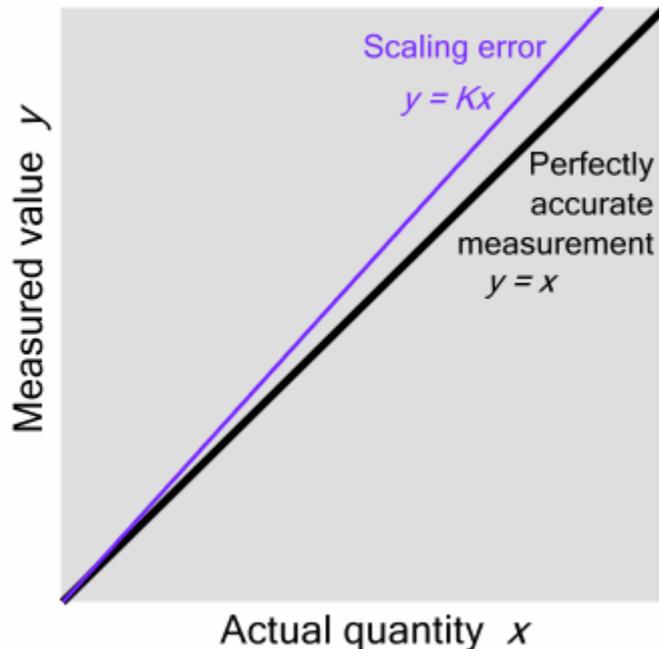
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O exemplo anterior levanta um problema importante: o advento da instrumentação digital pode levar à confusão entre resolução e precisão. Se uma leitura é apresentada com 5 dígitos decimais, esse valor está correcto! Será verdade? No que diz respeito à resolução, sim, no que diz respeito à precisão, talvez... Considere-se o caso das balanças digitais: algumas marcas apresentam uma **resolução igual a 1 g** mas não conseguem, sem um aumento significativo do preço, obter uma precisão abaixo dos 3 g (veja-se o caso dos cronómetros). Em vez de cortarem na resolução, o que seria honesto mas caro, para além de potencialmente confuso, mantêm a resolução igual a 1 g e acrescentam um circuito com um artifício que reconhece que se um objecto pesa menos de 3 g (ou 5 g para ter mais garantias) que o último objecto pesado, apresenta o peso do objecto previamente pesado, de forma a justificar a precisão anunciada.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Erros que afectam a exactidão:

1. No gráfico a linha a preto representa o comportamento de um instrumento perfeito, no sentido em que o valor medido é igual ao valor verdadeiro; a linha azul mostra o que acontece ao valor medido (leitura) se existir um **erro de escala**, obtendo-se um valor proporcional ao valor verdadeiro. Este erro acontece devido

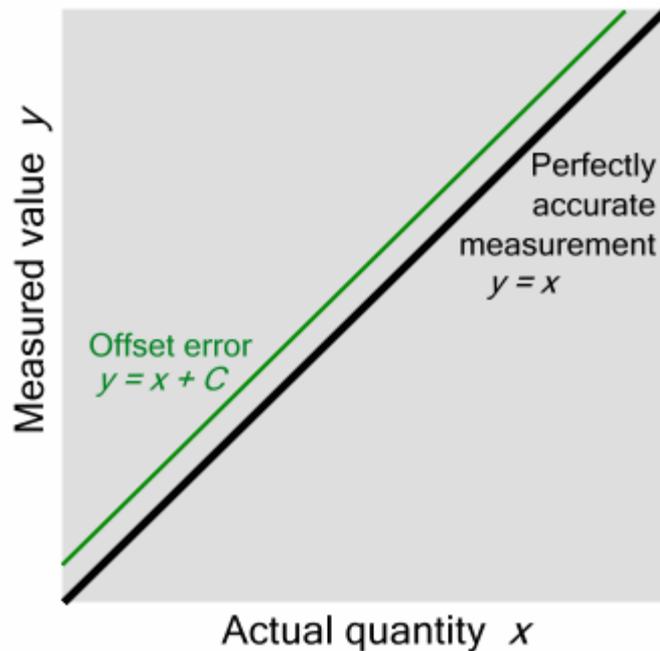


a um erro de calibração do aparelho, podendo afectar aparelhos analógicos (que em geral utilizam uma mola que estica ou comprime em resposta a uma força) ou digitais.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Erros que afectam a exactidão:

2. O **erro de offset** (desvio) ocorre quando o valor medido (leitura) é mais alto (ou baixo) do que o valor verdadeiro por um valor constante.

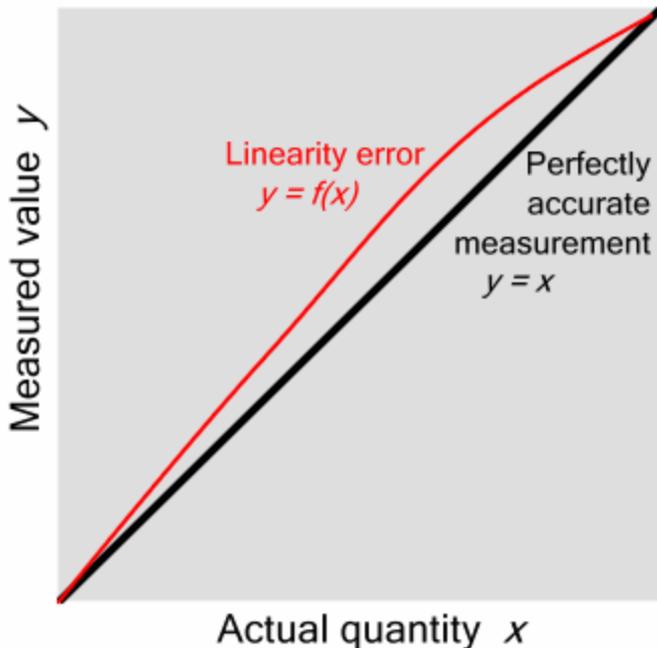


LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Erros que afectam a exactidão:

3. No gráfico, a curva encarnada coincide com a linha preta na origem e portanto não existe erro de offset; há também coincidência na outra extremidade e portanto também não erro de escala. Se a leitura do instrumento é exacta em pelo menos dois pontos bem distribuídos mas não é exacta noutros pontos, a

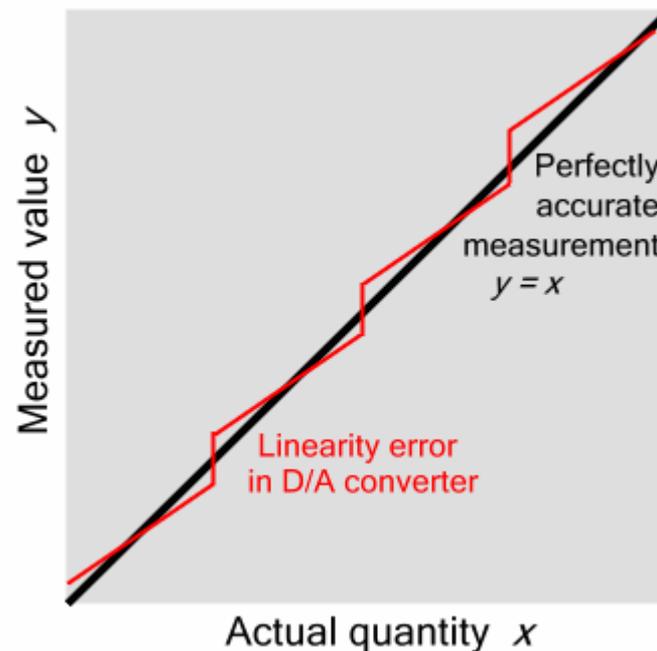
resposta do instrumento não pode ser uma linha recta e portanto não é linear, como nos dois casos anteriores – **erro não-linear**.



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Erros que afectam a exactidão:

2. O erro de offset (desvio) ocorre quando o valor medido (leitura) é mais alto (ou baixo) do que o valor verdadeiro por um valor constante.



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Um equipamento de medição deve ser regularmente objecto de uma operação que tem por objetivo avaliar se as suas características metrológicas se mantêm dentro dos limites estabelecidos. Essa operação designa-se por calibração.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Accuracy vs. Resolution

Analog to Digital

Example

Calculator

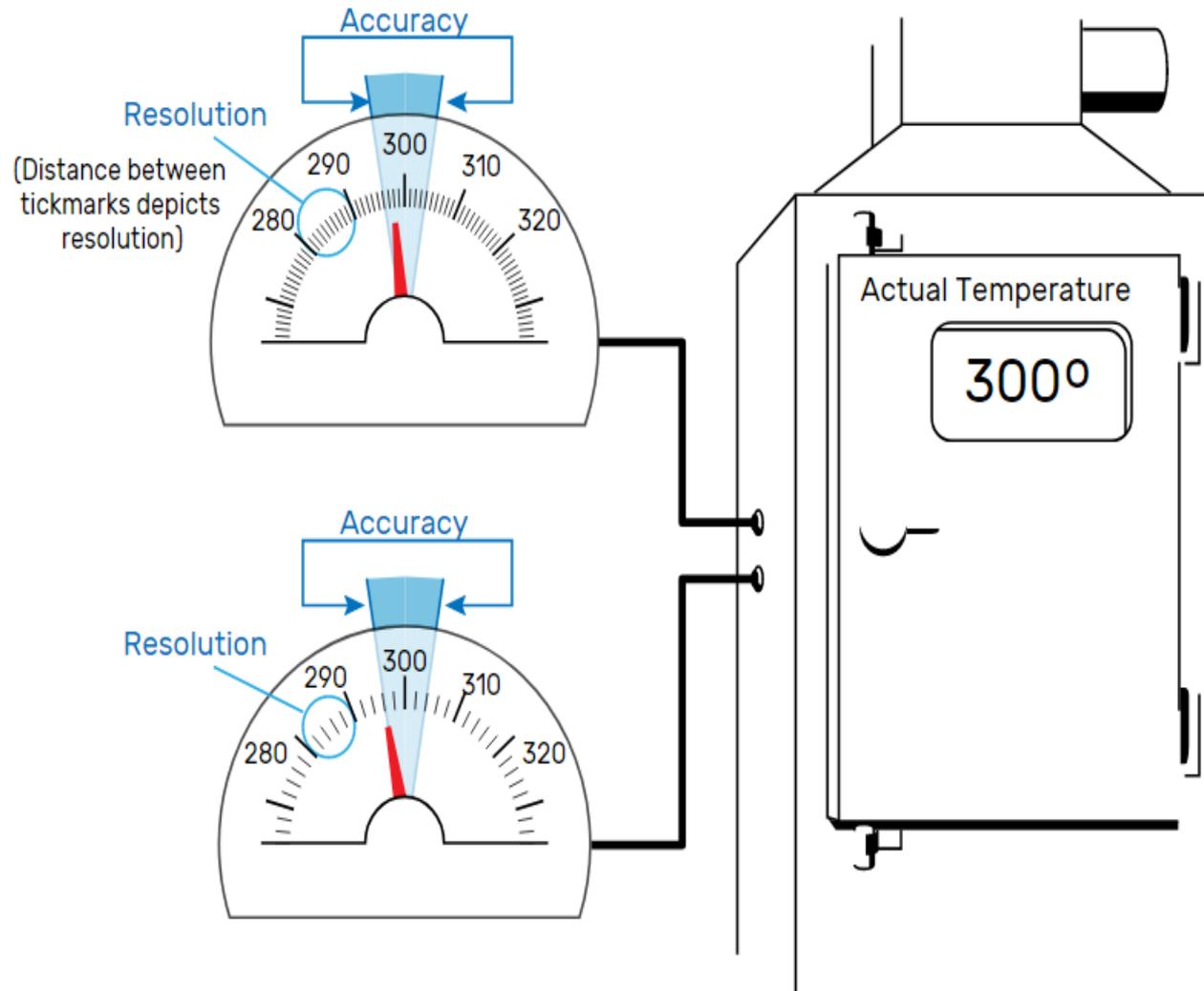
Customize and co

Accuracy vs. Resolution

What's the difference between accuracy and resolution? Accuracy is how close a reported measurement is to the true value being measured. Resolution is the smallest change that can be measured.

The accuracy of these temperature gauges is ± 4 degrees, meaning they can be different from the correct value by four degrees in either direction. (Typically, accuracy specifications are stated as a plus-minus range.)

The gauge on top has finer resolution. Notice that there are more tick marks between 280 and 290 on the top gauge than on the bottom one. **Finer resolution reduces rounding errors, but doesn't change a device's accuracy.** However, resolution that is too coarse may add rounding errors.

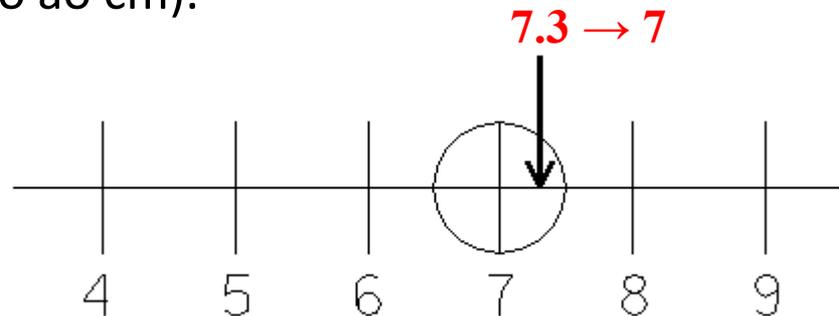


ver exemplo da régua

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Em muitas situações do dia-a-dia, não precisamos de trabalhar com números exatos. Quando estamos a utilizar números muito grandes ou números com muitas casas decimais, é por vezes útil proceder a arredondamentos para nos facilitar os cálculos, ou simplesmente, para que o número ocupe menos espaço.

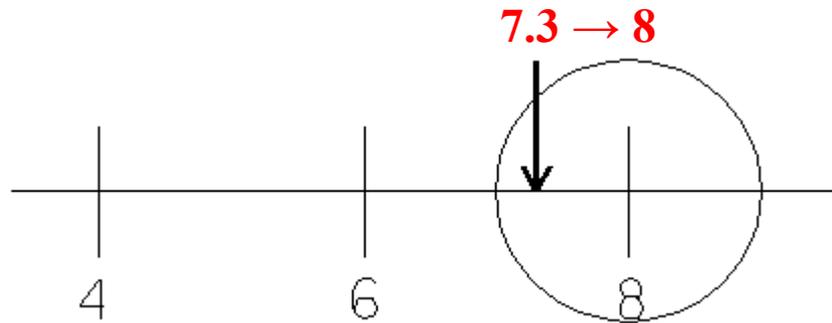
Suponha-se que o **valor exacto** de um comprimento é igual a **7.3 cm** e que se pretende determinar este valor utilizando uma régua graduada em cm, **sem estimação** (ou seja, arredondando ao cm).



A **exactidão** do valor obtido corresponde a **metade da menor graduação** (1 cm) e portanto o valor obtido é **7 ± 0.5 cm**.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Repita-se a medição do comprimento utilizando uma régua graduada de 2 em 2 cm, sem estimação (ou seja, arredondando ao cm):



A **exactidão** do valor obtido corresponde a metade da menor graduação (2 cm) e portanto o valor obtido é **8±1 cm**.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Num levantamento, as observações são utilizadas para determinar parâmetros desconhecidos, geralmente coordenadas. As observações relacionam-se com os parâmetros através do modelo matemático. Por vezes o modelo matemático é simples, como no caso do nivelamento geométrico, onde os desníveis observados Δ_{ij} se relacionam com as cotas desconhecidas na forma $\Delta_{ij} = h_j - h_i$, noutros casos o modelo matemático é mais complexo, como no caso de uma rede GPS, onde os parâmetros são coordenadas (X,Y,Z) a serem obtidas num referencial diferente daquele onde as bases Δ_{ij} foram observadas: $\Delta_{ij} = f(\alpha, \beta, \gamma, \mu, X_i, Y_i, Z_i, X_j, Y_j, Z_j)$, com $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ sendo os parâmetros de transformação.

Quando as equações que relacionam as observações e os parâmetros são não lineares é necessário lineariza-las, o que implica um processo iterativo para se obter a solução, para além de uma aproximação inicial para as coordenadas (uma má aproximação inicial pode conduzir a uma convergência lenta, com um grande número de iterações ou mesmo a uma divergência).

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O modelo matemático deve evitar constrangimentos e parametrizações exageradas. A introdução do coeficiente de refração, por exemplo, pode implicar a absorção de efeitos sistemáticos que não são causados pela própria refração; no entanto, ignorar a refração, que efectivamente tem influência nas observações, pode causar efeitos igualmente desfavoráveis.

O ajustamento das observações falha quando o modelo matemático representado pela matriz dos coeficientes dos parâmetros e pela matriz normal é singular, podendo a singularidade dever-se a um:

- problema mal colocado, como por exemplo pretender-se a determinação das coordenadas planimétricas de um ponto à custa de uma direcção horizontal observada doutro ponto
- modelo inadequadamente formulado, com demasiados parâmetros

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Para além dos problemas anteriores, os parâmetros só podem ser obtidos desde que a localização, a orientação e a escala (ou constrangimentos) da rede estejam fixados, isto é, quando se definir um *datum*; conforme a dimensão da rede e o tipo de observações, o número mínimo de constrangimentos varia (no máximo 7 numa rede 3D, 4 numa rede 2D, 1 numa rede 1D).

As observações (direcções, distâncias, desníveis, etc) são variáveis aleatórias ou estocásticas, descritas pelas respectivas distribuições de probabilidade. É assim necessário acrescentar ao modelo matemático o modelo estocástico que descreve a incerteza das observações.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

É muito importante avaliar e controlar a qualidade do trabalho porque:

- é necessário garantir determinados requisitos
- quando por razões de *design* deficiente ou devido a erros de observação esses requisitos não forem verificados, é necessário dispor de ferramentas para inverter esta situação

Conhecendo as consequências dispendiosas de erros não detectados ou de desenhos inadequados numa rede, em especial quando estes problemas são detectados numa fase adiantada dos trabalhos, torna-se claro que o controlo de qualidade é fundamental.

O procedimento a seguir inclui:

- o controlo da propagação dos erros aleatórios que afectam as observações para as coordenadas, através do cálculo da respectiva precisão
- a identificação de erros grosseiros e de desvios nas observações e o cálculo de sensibilidade dos dados relativamente a estes erros e desvios através do cálculo da fiabilidade.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

A avaliação da precisão e da fiabilidade de uma rede pode começar antes da realização das observações, através do planeamento e do reconhecimento da zona, podendo aplicar-se as regras:

- distribuir os pontos de coordenadas conhecidas ao longo da rede de forma equilibrada
- tentar que os lados dos polígonos que constituem a rede tenham lados de igual comprimento

A partir de observações efectuadas no campo, pretende-se calcular coordenadas; quando existem observações redundantes, como aconselhável, o cálculo da solução única e óptima obtém-se utilizando o ajustamento por mínimos quadrados.

Tendo determinado a solução, é importante aceder à respectiva qualidade, de forma a verificar se o resultado vai de encontro aos requisitos pré-definidos, utilizando testes estatísticos que mostram a fiabilidade dos dados: quanto mais fiável uma rede for, maior é a probabilidade de os erros serem detectados no teste, permitindo assim a eliminação ou correcção das observações afectadas por esses erros.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O ajustamento de uma rede é geralmente subdividido em 2 fases:

- ajustamento da rede com constrangimento mínimo que fixe a posição, a escala e a orientação da rede, sendo a respectiva geometria definida apenas pelas observações; desta forma, o(s) ponto(s) fixo(s) não impõem constrangimentos suplementares à solução do ajustamento. Foca-se desta forma o controlo de qualidade nas observações em vez das coordenadas dos vértices da rede (seleccionando outro *datum*, as coordenadas virão diferentes mas os resultados do teste estatístico mantêm-se
- ajustamento da rede com constrangimentos, no qual se fixam mais parâmetros dos que os estritamente necessários para se obter uma solução, já que agora o ênfase é dado às coordenadas

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

A fiabilidade de uma rede pode ser descrita em termos de sensibilidade à detecção de erros nas observações, podendo definir-se a fiabilidade interna e a fiabilidade externa:

- a fiabilidade interna pode exprimir-se pelo **Minimal Detectable Bias (MDB)**, que representa a dimensão do erro de observação de menor dimensão ainda detectável pelo teste estatístico com probabilidade igual à potência β do teste; quanto maior o valor do MDB menor é a fiabilidade da rede
- a fiabilidade externa pode exprimir-se pelo **Bias to Noise Ratio (BNR)**, utilizado para medir a influência de um eventual erro de observação nas coordenadas ajustadas; o BNR de uma observação reflecte esta influência, pelo que a dimensão do erro que afecta essa observação coincide com o MDB dessa observação; assim, o BNR é um parâmetro adimensional combinando a influência de uma observação singular em todas as coordenadas. Resumindo, o BNR é o limite superior da razão entre a influência do MDB de uma observação numa dada coordenada e o desvio padrão *a posteriori* σ_x dessa coordenada: $\frac{\nabla_x}{\sigma_x} \leq \text{BNR}$ ou, por outras palavras, o BNR pode ser interpretado como a razão entre a fiabilidade e a precisão, sendo desejável que tenha valores homogéneos em todos os pontos da rede. Uma propriedade importante dos parâmetros MDB e BNR é que são independentes da escolha do *datum*.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Os modelos matemático e estocástico baseiam-se num conjunto de presupostos designados por hipóteses, utilizando-se os testes estatísticos para verificar essas hipóteses. Um conjunto especial de presupostos tem o nome de hipótese nula, H_0 , que implica:

- não há erros grosseiros nem erros sistemáticos nas observações
- o modelo matemático descreve correctamente as relações entre as observações e os parâmetros desconhecidos
- o modelo estocástico adoptado descreve apropriadamente as propriedades estocásticas das observações

O resultado possível num teste de hipóteses é a aceitação ou rejeição de H_0 , sendo as duas regiões separadas por um limiar, que é determinado pelo nível de significância α do teste: a probabilidade que o ponto de corte seja ultrapassado, embora o conjunto de presupostos seja válido é igual a α , que é a probabilidade de uma rejeição incorrecta; dito de outra forma, $1-\alpha$ é uma medida da confiança que se pode ter na decisão.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

No teste da hipótese nula H_0 há duas situações desfavoráveis que podem ocorrer:

- rejeição de H_0 embora seja verdadeira; a probabilidade desta situação ocorrer é igual ao nível de significância α (erro do tipo I)
- aceitação de H_0 embora seja falsa; a probabilidade desta situação ocorrer é $1-\beta$, onde β é a potência do teste (erro do tipo II)

Situação	Decisão: aceitar H_0	Decisão: rejeitar H_0
H_0 verdadeira	Decisão correcta: $1-\alpha$	Erro tipo I: α
H_0 falsa	Erro tipo II: $1-\beta$	Decisão correcta: β

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Teste F: é um teste global ao modelo, dado pela expressão $F=s^2/\sigma^2$, com s^2 sendo o factor de variância *a posteriori* e σ^2 o factor da variância *a priori*, sendo a razão s^2/σ^2 testada contra o limiar de corte dado pela distribuição F com nível de significância α e com uma dada redundância.

As razões para uma eventual rejeição podem ser a presença de erros grosseiros nas observações, um modelo matemático incorrecto e um modelo estocástico incorrecto. No caso de uma eventual rejeição é necessário começar por localizar e identificar eventuais erros nas observações, utilizando o teste W (através de um processo de *datasnooping*). Se continuar a verificar-se uma rejeição no teste, é necessário verificar o modelo matemático (por exemplo, o coeficiente de refração vertical não foi considerado ou combinaram-se observações referidas a referenciais diferentes sem considerar os parâmetros de transformação para um referencial comum). Se continuar a verificar-se uma rejeição no teste, é necessário verificar o modelo estocástico, provavelmente por ter sido utilizada uma matriz de variâncias-covariâncias *a priori* demasiado optimista: é assim necessário degradar o desvio padrão das observações.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Teste W: a rejeição do teste F não identifica a razão dessa rejeição. Quando isto acontece, podem ser formuladas hipóteses nulas mais complexas mas também mais difíceis de interpretar; uma hipótese simples mas eficiente e realista baseia-se no pressuposto que há um erro presente nalguma observação, sendo as restantes correctas: o processo de verificação de cada observação através do teste W designa-se por **datasooping**.

A dimensão da correcção obtida no ajustamento por mínimos quadrados (resíduo) nem sempre é um indicador rigoroso na verificação das observações; uma quantidade teste melhor, embora apenas válida para observações não correlacionadas, é a correcção obtida por mínimos quadrados (resíduo) dividida pelo respectivo desvio padrão.

O ponto de corte do teste W depende do nível de significância α_0 , normalmente compreendido entre 0.001 e 0.05 (o valor adoptado depende da “certeza” com que se pretende testar as observações, por exemplo, $\alpha_0=0.001$ significa 1 falsa rejeição em cada 1000 observações): verificando-se uma rejeição, há probabilidade $1-\alpha_0$ de que a correspondente observação esteja efectivamente afectada por um erro e, por outro lado, há probabilidade α_0 que a observação não esteja afectada por um erro, o que significa uma rejeição injustificada.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

É fundamental que o erro seja detectado com o mesmo nível de significância em ambos os testes F e W. Por esta razão, a potência β dos dois testes fixa-se geralmente no valor 0.80. O nível de significância α_0 do teste W é igualmente fixado, o que significa que o nível de significância do teste F tenha de ser determinado. Estando α_0 e β fixados, α depende fortemente da redundância da rede: para redes de grande dimensão com muitas observações e redundância considerável, torna-se difícil que o teste F reaja a um erro único (o teste F, sendo um teste global, não é suficientemente sensível para o efeito). Como consequência da dependência entre os testes F e W, pela qual o valor de β é forçado a 0.80, o nível de significância α do teste F tem que aumentar. Tem-se então que, seja qual for o resultado do teste F, é prática corrente realizar o processo de dataspooing, no qual cada observação individual é testada.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

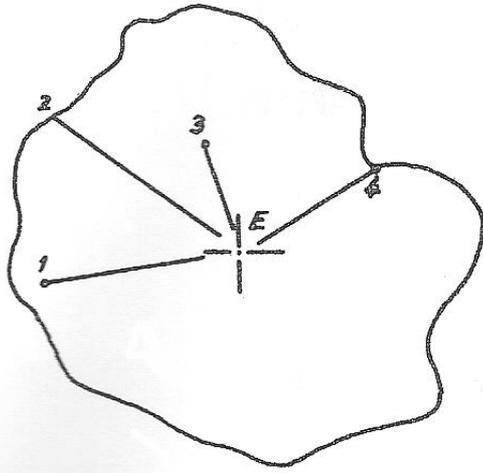
Teste T: o teste W é um teste 1D em que se assume que há apenas uma observação contendo erros, o que funciona bastante bem quando as observações são todas do mesmo tipo, por exemplo, direcções, distâncias, desníveis, etc. No entanto, para algumas observações tais como bases GPS, não basta testar os elementos (DX, DY, DZ) separadamente, é necessário testar o próprio vector. Para este efeito introduz-se o teste T: dependendo da dimensão da quantidade que está a ser testada, o teste T pode ser um teste 3D ou 2D. Da mesma forma que o teste W, o teste T também está relacionado com o teste T

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

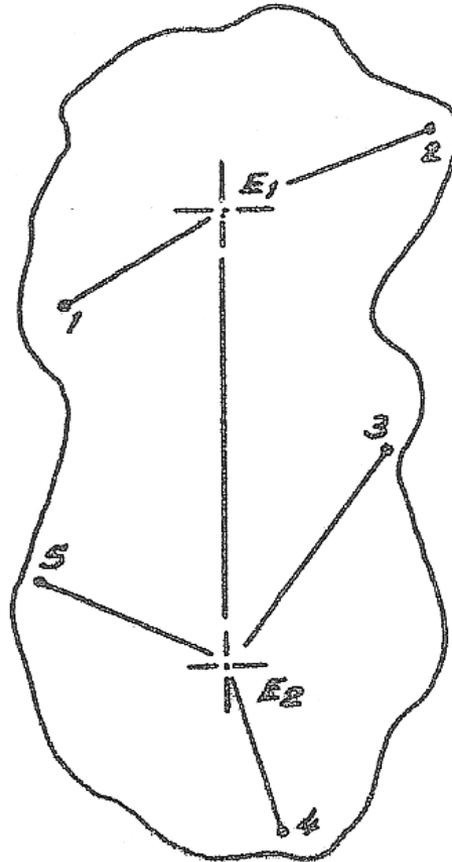
Nalguns casos, a configuração da zona a levantar permite basear o trabalho numa **única** estação (embora, para efeitos de orientação, seja necessário pelo menos mais um ponto de coordenadas conhecidas), de onde, por **transporte de coordenadas**, se irradiará para todos os pontos do pormenor.

Noutros casos serão necessárias **2** estações, noutros ainda, a configuração da zona obriga à utilização de **3** estações, formando um triângulo, que para maior precisão na respectiva resolução deve ser o mais próximo possível de um triângulo equilátero (em qualquer caso, os ângulos internos devem estar compreendidos entre 40 e 160 graus).

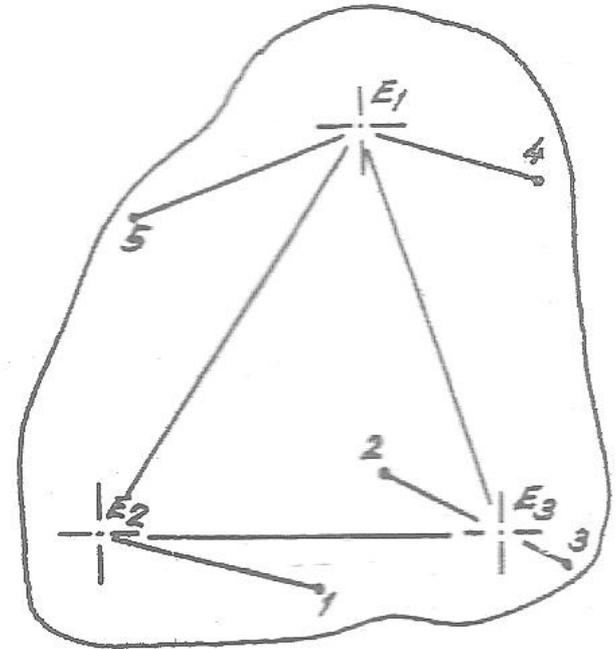
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



1 estação

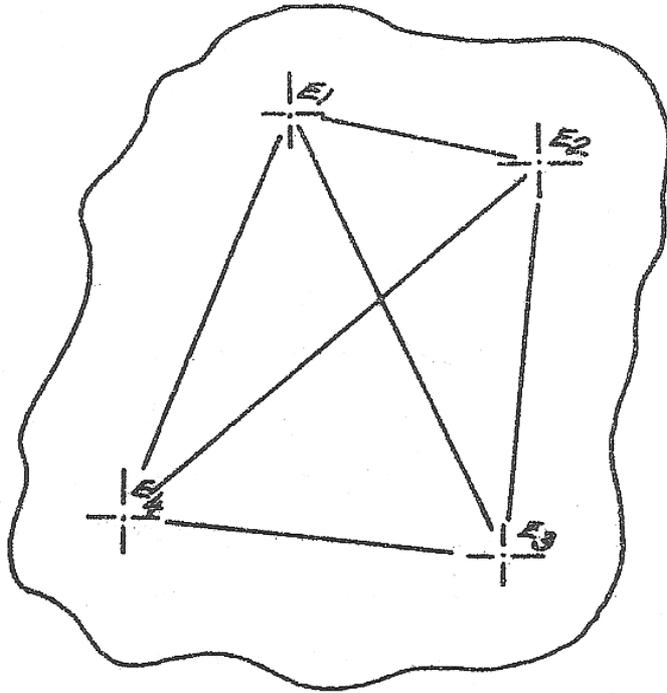


2 estações



triângulo

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



quadrilátero

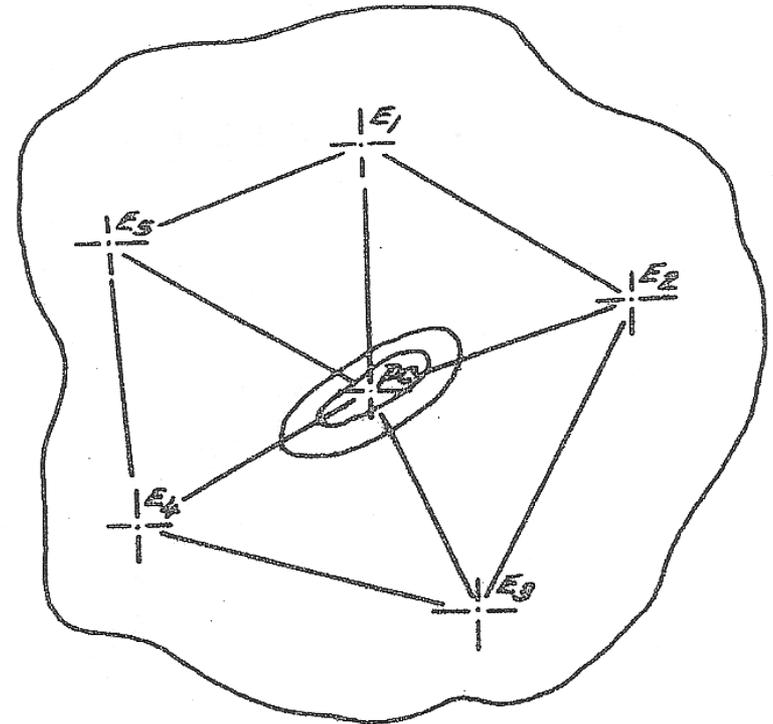
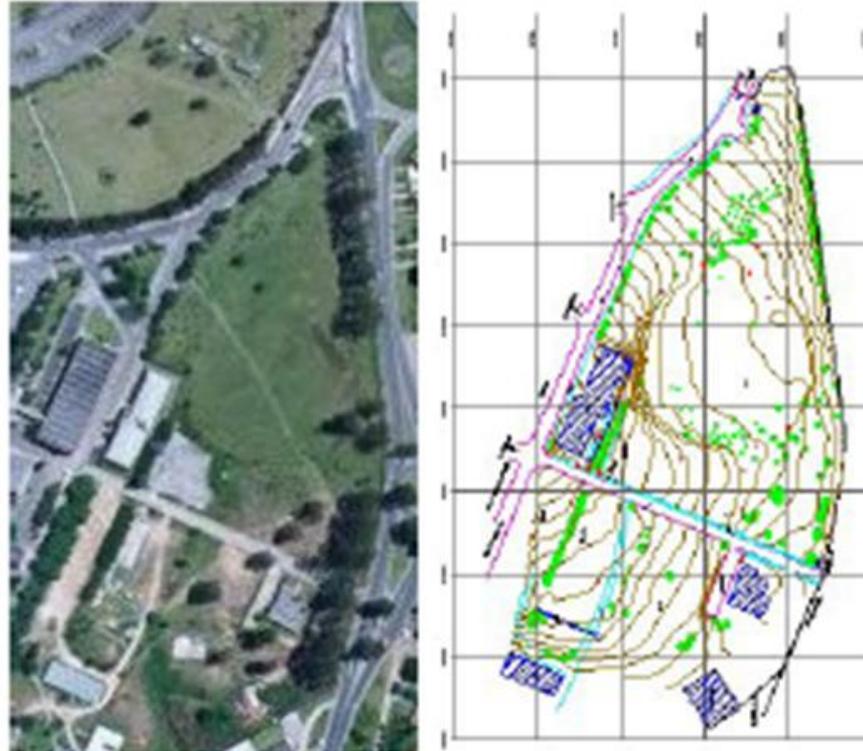


figura de ponto
central

Os pontos de apoio ao levantamento devem ser convenientemente **monumentalizados** e a figura utilizada deve ser **ajustada** com rigor.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

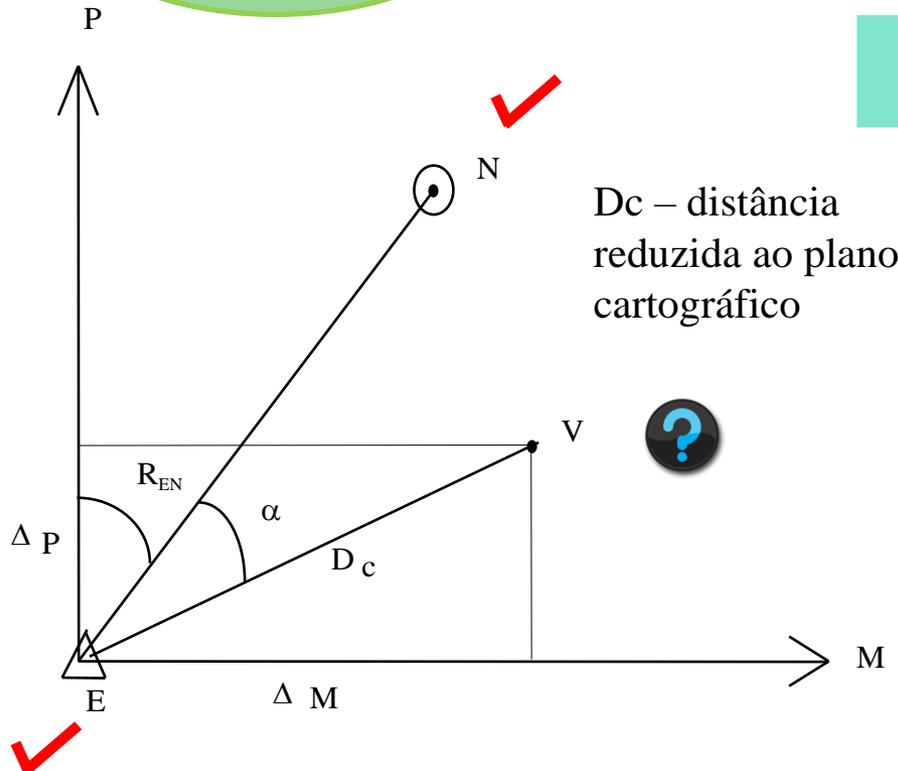


Tradicionalmente o levantamento topográfico é dividido em duas partes: o levantamento **planimétrico**, onde se determina a posição planimétrica dos pontos (coordenadas **M** e **P**) e o levantamento **altimétrico**, onde o objetivo é determinar a cota ou altitude de um ponto (coordenada **C**).

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$$R_{EN} = a \tan \frac{M_N - M_E}{P_N - P_E}$$

Coordenação de pontos novos (V) a partir de um ponto conhecido (E), medindo-se o **ângulo α** e a **distância D_c** .



$$R_{EV} = R_{EN} + \alpha$$

$$R_0 = R_{EN} - L_{EN}$$

$$R_{EV} = R_0 + L_{EV}$$

$$\Delta M = D_c \sin R_{\rightarrow EV}$$

$$\Delta P = D_c \cos R_{\rightarrow EV}$$

$$M_V = M_E + \Delta M$$

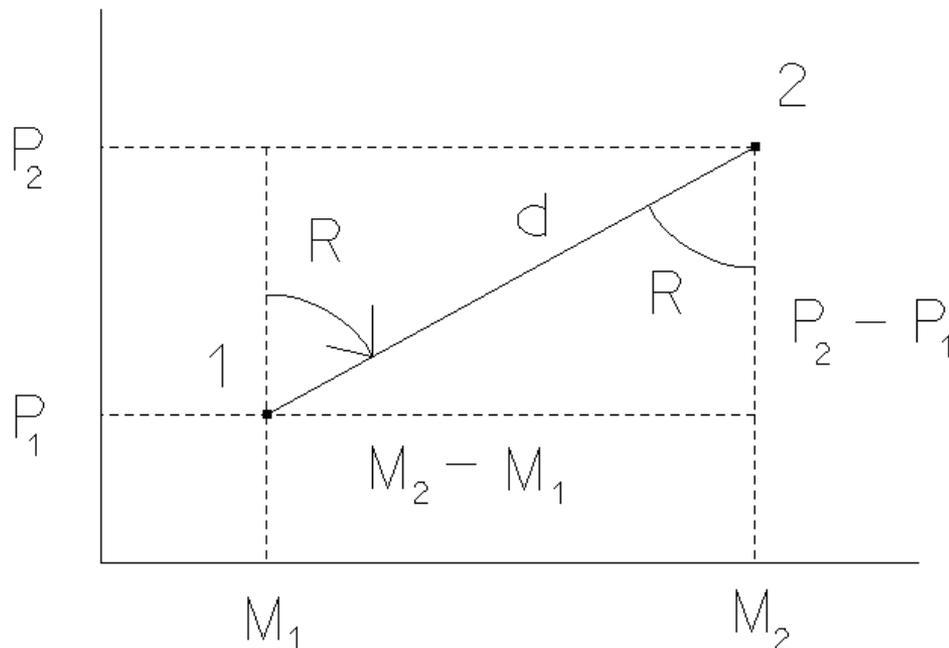
$$P_V = P_E + \Delta P$$

Uma **irradiada** obtém-se de uma intersecção directa em que se substitui um ângulo por uma distância

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

As operações topográficas baseiam-se numa rede de pontos cujas coordenadas (M_1, P_1) são conhecidas no referencial adoptado com uma dada incerteza $(\sigma_{M_1}, \sigma_{P_1})$.

É importante efectuar a **propagação dos erros** (conhecidos) em **rumo** e **distância**, das **coordenadas** do ponto estação (M_1, P_1) para as **coordenadas** do ponto visado (M_2, P_2) :



$$\begin{cases} M_2 = M_1 + d \sin R \\ P_2 = P_1 + d \cos R \end{cases}$$

(irradiada)

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Sejam Σ_{obs} a matriz de variâncias-covariâncias das **grandezas observadas**, incluindo as coordenadas do ponto estação 1

$$\Sigma_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} \sigma_{M_1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{P_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_R^2 \end{bmatrix}$$

e **J** a matriz jacobiana da transformação que permite obter as **coordenadas** do ponto visado 2 (transporte de coordenadas) a partir do ponto 1:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_2}{\partial M_1} & \frac{\partial M_2}{\partial P_1} & \frac{\partial M_2}{\partial d} & \frac{\partial M_2}{\partial R} \\ \frac{\partial P_2}{\partial M_1} & \frac{\partial P_2}{\partial P_1} & \frac{\partial P_2}{\partial d} & \frac{\partial P_2}{\partial R} \\ \frac{\partial M_1}{\partial M_1} & \frac{\partial M_1}{\partial P_1} & \frac{\partial M_1}{\partial d} & \frac{\partial M_1}{\partial R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin R & d \cos R \\ 0 & 1 & \cos R & -d \sin R \end{bmatrix}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

A matriz Σ_{coord} de variâncias-covariâncias das **coordenadas do ponto irradiado 2** é:

$$\Sigma_{\text{coord}} = \begin{bmatrix} \sigma_{M_2}^2 & \sigma_{M_2 P_2} \\ \sigma_{M_2 P_2} & \sigma_{P_2}^2 \end{bmatrix} = \text{J} \Sigma_{\text{obs}} \text{J}^t =$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{M_1}^2 + \sigma_d^2 \sin^2 R + \sigma_R^2 d^2 \cos^2 R & \sigma_d^2 \sin R \cos R - \sigma_R^2 d^2 \sin R \cos R \\ \sigma_d^2 \sin R \cos R - \sigma_R^2 d^2 \sin R \cos R & \sigma_{P_1}^2 + \sigma_d^2 \cos^2 R + \sigma_R^2 d^2 \sin^2 R \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{M_1}^2 + \left(\frac{M_2 - M_1}{d} \right)^2 \sigma_d^2 + (P_2 - P_1)^2 \sigma_R^2 & \frac{(M_2 - M_1)(P_2 - P_1)}{d^2} \sigma_d^2 - (M_2 - M_1)(P_2 - P_1) \sigma_R^2 \\ \frac{(M_2 - M_1)(P_2 - P_1)}{d^2} \sigma_d^2 - (M_2 - M_1)(P_2 - P_1) \sigma_R^2 & \sigma_{P_1}^2 + \left(\frac{P_2 - P_1}{d} \right)^2 \sigma_d^2 + (M_2 - M_1)^2 \sigma_R^2 \end{bmatrix}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O rumo **R** utilizado no cálculo da irradiada é obtido como

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{12} = \mathbf{R}_{1P} + \alpha_{P2}^{AZ}$$

em que **1** e **P** são pontos de coordenadas conhecidas, com incertezas $(\sigma_{M_1}, \sigma_{P_1})$ e

$(\sigma_{M_P}, \sigma_{P_P})$ conhecidas, respectivamente e α é o ângulo azimutal entre as direcções

1P e P2, tal que $\alpha = L_{12}^{AZ} - L_{1P}^{AZ}$, cada uma destas direcções tendo incerteza σ_α

conhecida; assim:

$$R_{1P} = a \tan \frac{M_1 - M_P}{P_1 - P_P}, \quad \Sigma_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} \sigma_{M_1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{P_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{M_P}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{P_P}^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{1P}}{\partial M_1} & \frac{\partial R_{1P}}{\partial P_1} & \frac{\partial R_{1P}}{\partial M_P} & \frac{\partial R_{1P}}{\partial P_P} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{R_{1P}}^2 = \mathbf{J} \Sigma_{\text{obs}} \mathbf{J}^t =$$

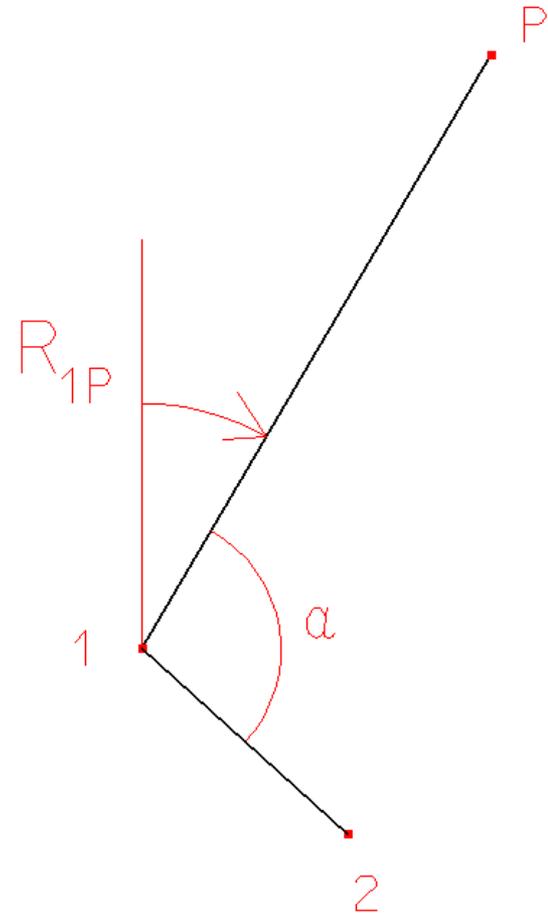
$$= \frac{\sigma_{M_1}^2}{(P_P - P_1)^2 \left(1 + \frac{(M_P - M_1)^2}{(P_P - P_1)^2} \right)^2} + \frac{(M_P - M_1)^2 \sigma_{P_1}^2}{(P_P - P_1)^4 \left(1 + \frac{(M_P - M_1)^2}{(P_P - P_1)^2} \right)} + \frac{\sigma_{M_P}^2}{(P_P - P_1)^2 \left(1 + \frac{(M_P - M_1)^2}{(P_P - P_1)^2} \right)^2} + \frac{(M_P - M_1)^2 \sigma_{P_P}^2}{(P_P - P_1)^4 \left(1 + \frac{(M_P - M_1)^2}{(P_P - P_1)^2} \right)}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$$\alpha_{P2}^{AZ} = L_{12}^{AZ} - L_{1P}^{AZ}, \quad \Sigma_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} \sigma_{AZ}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{AZ}^2 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_{P2}^{AZ}}{\partial L_{12}^{AZ}} & \frac{\partial \alpha_{P2}^{AZ}}{\partial L_{1P}^{AZ}} \end{bmatrix} = [1 \quad -1], \quad \Sigma_{\alpha} = J \Sigma_{\text{obs}} J^t = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} \sigma_{AZ}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{AZ}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2\sigma_{AZ}^2$$

Finalmente: $\sigma_R^2 = \sigma_{R_{1P}}^2 + \sigma_{\alpha}^2$

Exemplo: supondo $M_1=150.000\text{m}$,
 $P_1=250.000\text{m}$, $M_P=250.000\text{m}$, $P_P=423.205\text{m}$
 $\sigma_{M1}=\sigma_{P1}=\sigma_{MP}=\sigma_{PP}=\pm 0.010\text{m}$, $d_{12}=80.123\text{m}$,
 $\alpha_{P2}=102^\circ.456$, $\sigma_d=\pm 0.005\text{m}$, $\sigma_{AZ}=\pm 3''$, calcule
as coordenadas do ponto 2 obtidas por
irradiação a partir do ponto 1 e a respectiva
precisão.



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$$R_{1P} = a \tan \frac{M_P - M_1}{P_P - P_1} = a \tan \frac{250.000 - 150.000}{423.205 - 250.000} = a \tan \frac{100.000}{173.205} = 30^\circ.000$$

$$R_{12} = R_{1P} + \alpha_{P_2}^{AZ} = 30^\circ.000 + 102^\circ.456 = 132^\circ.456$$

$$\begin{cases} M_2 = M_1 + d_{12} \sin R_{12} = \underline{209.114\text{m}} \\ P_2 = P_1 + d_{12} \cos R_{12} = \underline{195.915\text{m}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{R_{1P}}^2 &= \frac{2(0.010)^2}{(423.205 - 250.000)^2 \left(1 + \frac{(250.000 - 150.000)^2}{(423.205 - 250.000)^2} \right)^2} + \frac{2(0.010)^2 (250.000 - 150.000)^2}{(423.205 - 250.000)^4 \left(1 + \frac{(250.000 - 150.000)^2}{(423.205 - 250.000)^2} \right)^2} \\ &= \frac{2 \times 0.010^2}{173.205^2 \times \left(1 + \frac{100.000^2}{173.205^2} \right)^2} + \frac{2 \times 0.010^2 \times 100.000^2}{173.205^4 \times \left(1 + \frac{100.000^2}{173.205^2} \right)^2} = 5 \times 10^{-9} \text{ rad}^2 \end{aligned}$$

$$\sigma_{R_{1P}} = \pm 0^\circ.00405 \approx \pm 14''.6$$

(incerteza no rumo entre os pontos de coordenadas conhecidas devida à incerteza nas respectivas coordenadas)

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

A incerteza no ângulo observado α_{2P} no ponto 1 entre os pontos 2 e P devida à incerteza associada à realização de leituras azimutais é: $\sigma_{\alpha} = \pm\sqrt{2} 3'' = 1.45444 \times 10^{-5}$ rad

A incerteza no rumo R do ponto 1 para o ponto 2 é: $\sigma_R^2 = \sigma_{R_{1P}}^2 + \sigma_{\alpha}^2 = 14'' .89$

Então, tem-se:

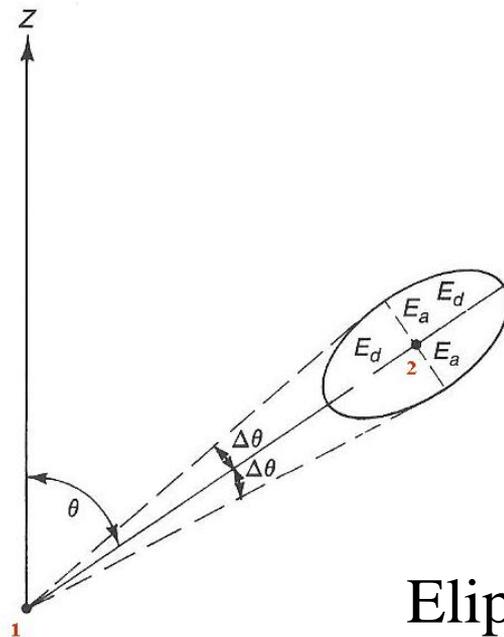
$$\sigma_{M_2}^2 = \sigma_{M_1}^2 + \left(\frac{M_2 - M_1}{d} \right)^2 \sigma_d^2 + (P_2 - P_1)^2 \sigma_R^2 = 0.000129 \text{ m}^2 \Rightarrow \sigma_{M_2} = \underline{0.011 \text{ m}}$$

$$\sigma_{P_2}^2 = \sigma_{P_1}^2 + \left(\frac{P_2 - P_1}{d} \right)^2 \sigma_d^2 + (M_2 - M_1)^2 \sigma_R^2 = 0.000129 \text{ m}^2 \Rightarrow \sigma_{P_2} = \underline{0.011 \text{ m}}$$

$$\sigma_{M_2P_2}^2 = \frac{(M_2 - M_1)(P_2 - P_1)}{d^2} \sigma_d^2 - (M_2 - M_1)(P_2 - P_1) \sigma_R^2 = 4.21052943 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \Rightarrow \sigma_{M_2P_2} = \underline{0.002 \text{ m}}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$\sigma_{M_2}^2$ e $\sigma_{P_2}^2$ são as variâncias das coordenadas do ponto visado nas direcções M e P; no entanto, os valores máximo e mínimo do erro de posicionamento do ponto visado não se encontram normalmente nas direcções dos eixos do referencial considerado. A **elipse de erro**, cujos eixos são definidos segundo as direcções dos erros máximo e mínimo, indicam graficamente a precisão do posicionamento do ponto visado.



Elipse de erro

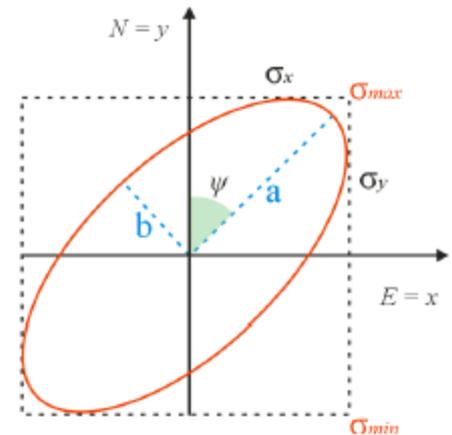
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

A elipse de erro obtém-se da equação $|\Sigma_{MP} - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (\sigma_M^2 + \sigma_P^2)\lambda + (\sigma_M^2 \sigma_P^2 - \sigma_{MP}^2) = 0$ ou seja, das duas soluções λ_1 e λ_2 tem-se que os semieixos maior e menor e o ângulo do semieixo maior com o eixo P são:

$$\Psi = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \frac{2\sigma_{MP}}{\sigma_P^2 - \sigma_M^2}$$

$$a = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\frac{(\sigma_M^2 + \sigma_P^2) + \sqrt{(\sigma_M^2 + \sigma_P^2)^2 - 4(\sigma_M^2 \sigma_P^2 - \sigma_{MP}^2)}}{2}}$$

$$b = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\frac{(\sigma_M^2 + \sigma_P^2) - \sqrt{(\sigma_M^2 + \sigma_P^2)^2 - 4(\sigma_M^2 \sigma_P^2 - \sigma_{MP}^2)}}{2}}$$



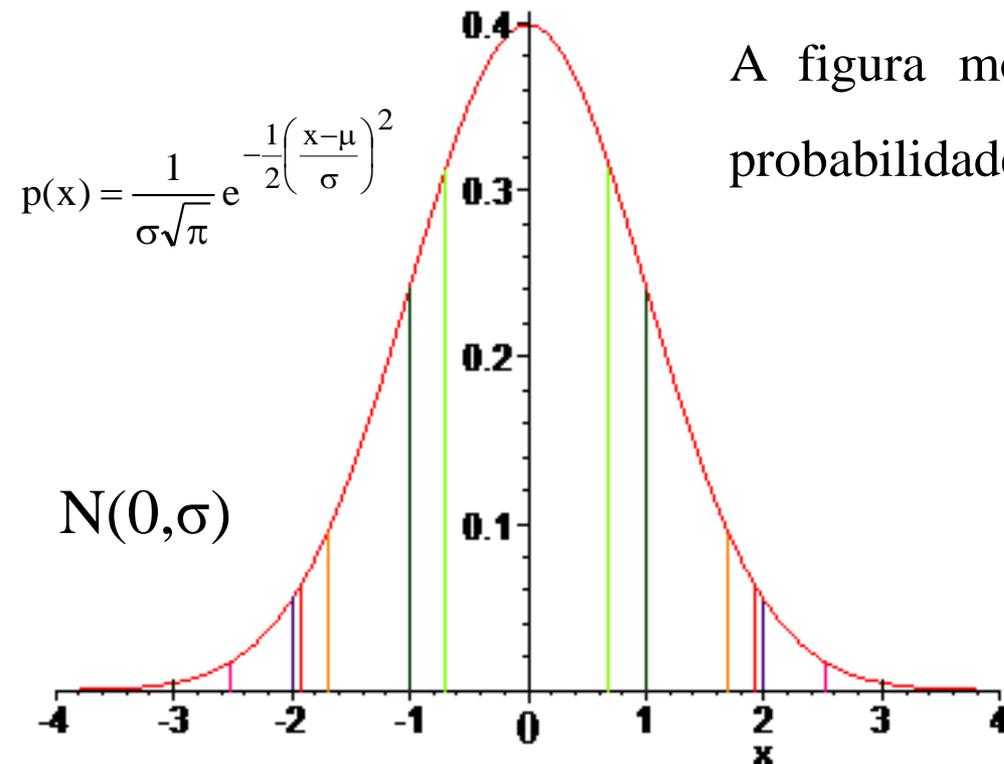
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Como já foi previamente assinalado, a análise estatística dos erros de observação parte do pressuposto de que as observações apenas estão afectadas por erros aleatórios, cuja distribuição é normal com valor médio $\mu=0$ e desvio padrão σ ,

respectivamente aproximados por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

$$s = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2}{n-1}$$



A figura mostra a curva da densidade de probabilidade dos erros:

$$P(-0.6745\sigma < x < 0.6745\sigma) = 0.5000$$

$$P(-\sigma < x < \sigma) = 0.6827$$

$$P(-1.6449\sigma < x < 1.6449\sigma) = 0.9000$$

$$P(-1.9600\sigma < x < 1.9600\sigma) = 0.9500$$

$$P(-2\sigma < x < 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(-2.5758\sigma < x < 2.5758\sigma) = 0.9900$$

$$P(-3\sigma < x < 3\sigma) = 0.9973$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Exemplo: 50% dos erros de uma dada série de medições não excedem ± 20 cm (**erro provável**); 90% dos erros dessa série de medições não excedem ± 49 cm.

Apesar de serem dados diferentes erros, cada um deles expressa a mesma precisão (σ) do processo de medição:

$$0.6745\sigma = \pm 20\text{cm} \Rightarrow \sigma = \pm 29.7\text{cm}$$

$$1.6449\sigma = \pm 49\text{cm} \Rightarrow \sigma = \pm 29.7\text{cm}$$

Qual é o **erro padrão** do processo considerado ($P[-\sigma < x < \sigma] = 0.6827$)?

$$1\sigma = \text{erro padrão} \Rightarrow \text{erro padrão} = \pm 29.7\text{cm}$$

(68.27% dos erros ocorrem dentro do intervalo $\pm\sigma$)

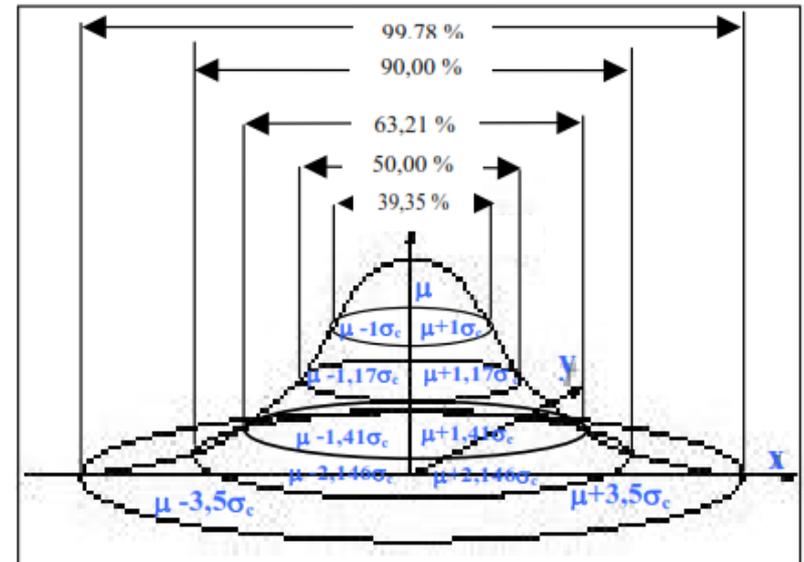
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

No caso **bidimensional**, a probabilidade de um ponto estar contido na **elipse de erro** é igual a **0.3935** (probabilidade de um acontecimento conjunto correspondente a um intervalo de 1σ em cada direcção).

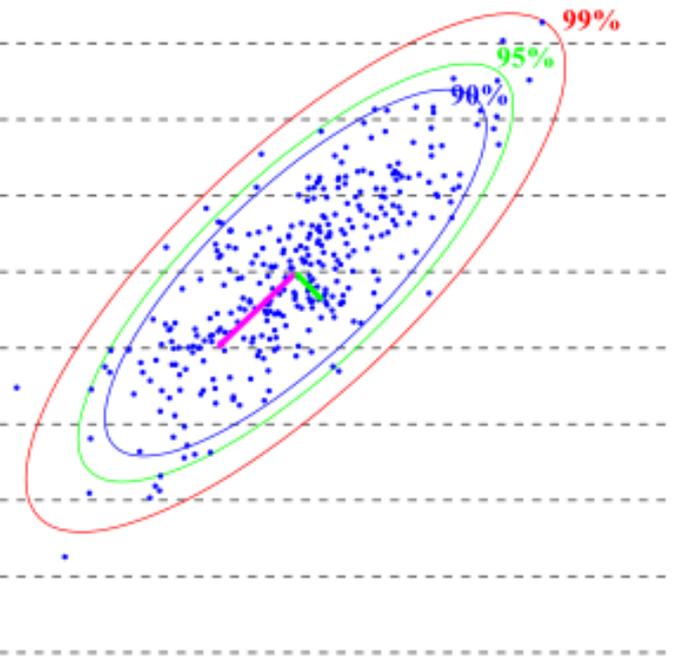
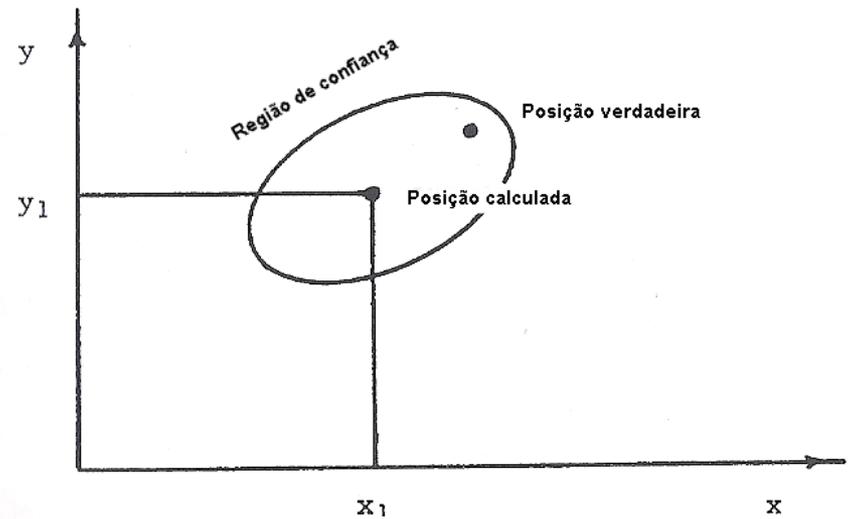
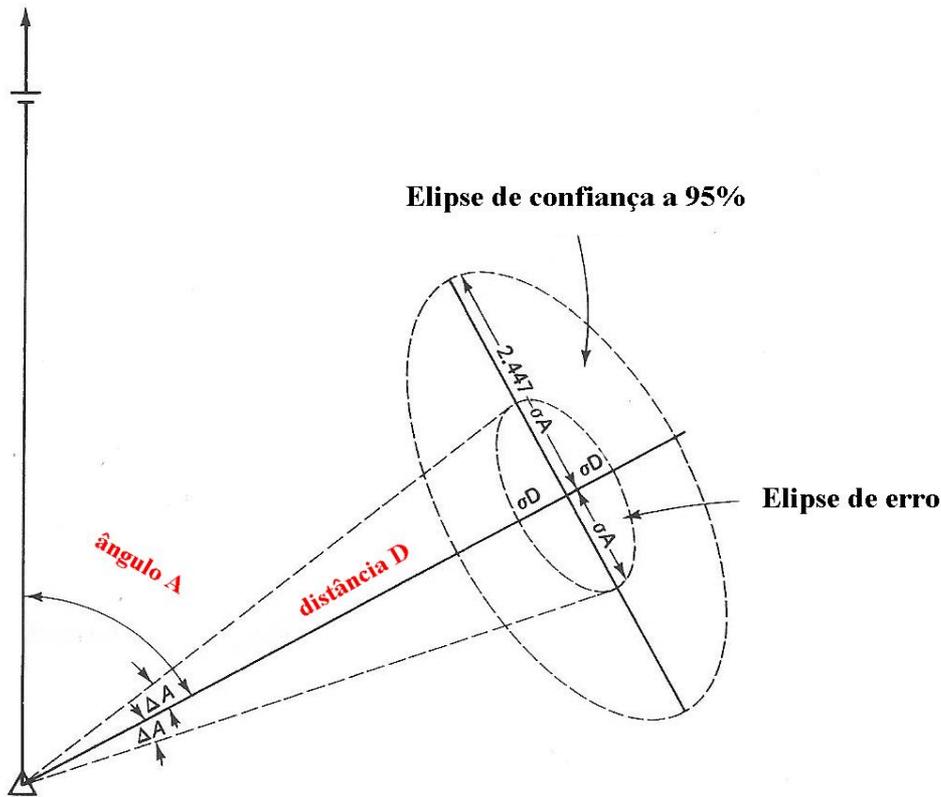
Mais geralmente:

intervalo	1.000σ	1.177σ	1.41σ	2.146σ	2.447σ	2.76σ	3.035σ	3.5σ
probabilidade	0.3935	0.5000	0.6321	0.9000	0.950	0.975	0.9900	0.9978

A **elipse de confiança** obtém-se da elipse de erro ampliando os semieixos por um factor conveniente, por exemplo 2.45 para a elipse de confiança a **95%**, 3.03 para a elipse de confiança a **99%**.



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Neste caso, a precisão linear é mais elevada que a precisão angular.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

A interpretação geométrica da elipse de erro pode ser entendida como a região do plano que apresenta uma probabilidade de 39.4% em que a posição estimada para um ponto esteja dentro da elipse centrada nas coordenadas desse ponto. Para uma probabilidade de 95%, basta multiplicar os semi-eixos maior e menor por um fator de 2.45.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Supondo que um ponto A localizado a 450.00 m da estação deve ser determinado por irradiação com **precisão posicional P** igual a **± 0.04 m**, qual é a **precisão necessária na medição do ângulo e da distância?**

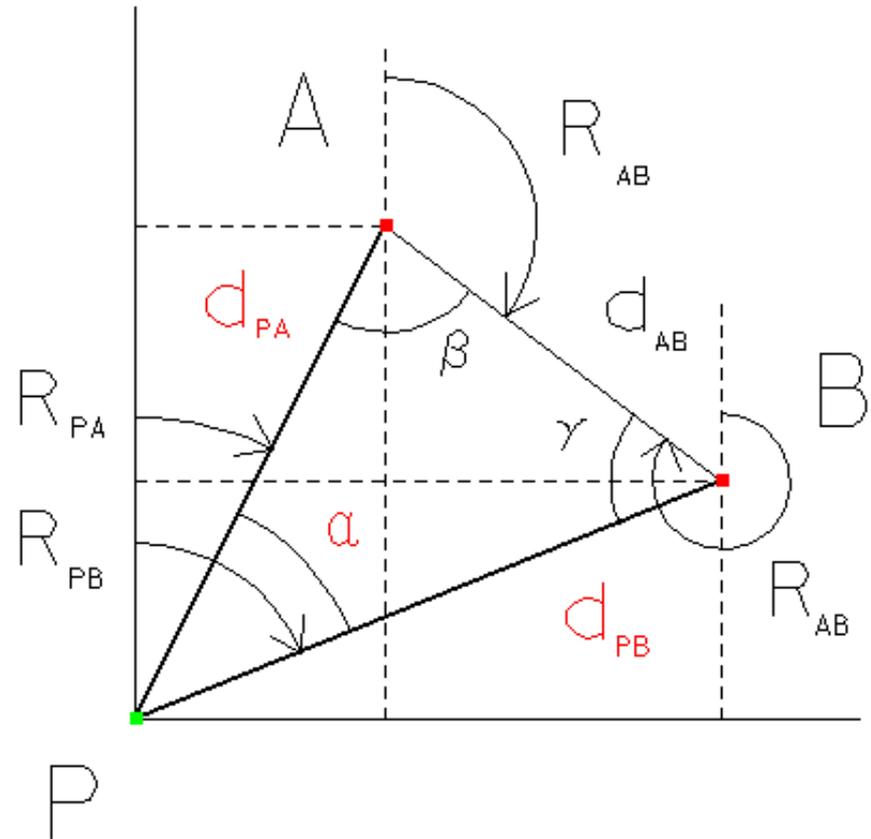
De $P = \sqrt{(\sigma_M^2 + \sigma_P^2)} = \pm 0.04$, o que significa que a elipse de erro é uma circunferência com $\sigma_M = \sigma_P$, $\sqrt{(2\sigma_M^2)} = \pm 0.04$, $\sigma_M = 0.04 / \sqrt{2} = 0.028$ m.

Para um erro linear de 0.028 m, a precisão com que a distância deve ser medida é igual a $\sigma_d = 0.028/450 = 1/16000$; como o erro angular também é igual a 0.028, a precisão com que o ângulo deve ser medido é $0.028/450 = \tan \sigma_\alpha \Rightarrow \sigma_\alpha = 0^\circ 0' 13''$.

Estes valores correspondem à elipse de erro; caso se considere a elipse de confiança a 95%, o erro limite é $0.028/2.45 = 0.011$ tanto para as distâncias como para os ângulos, o que para uma distância de 450 m, implica uma precisão angular de $0^\circ 0' 05''$.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

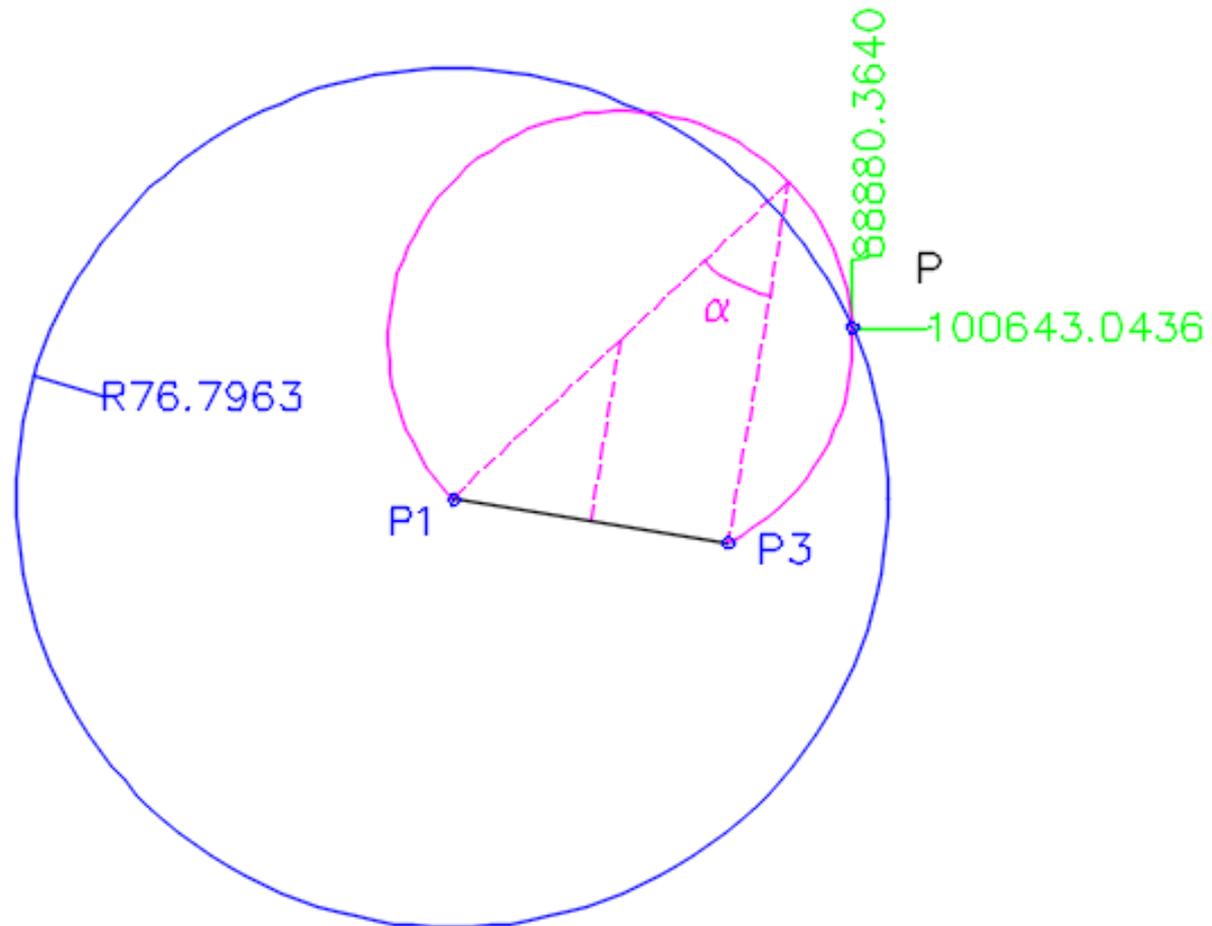
Problema: estacionou-se no ponto **P** de coordenadas desconhecidas e observou-se a distância horizontal d_{PA} , a distância horizontal d_{PB} e o ângulo α . Sendo conhecidas as coordenadas dos pontos **A** e **B**, calcule as coordenadas do ponto **P**.



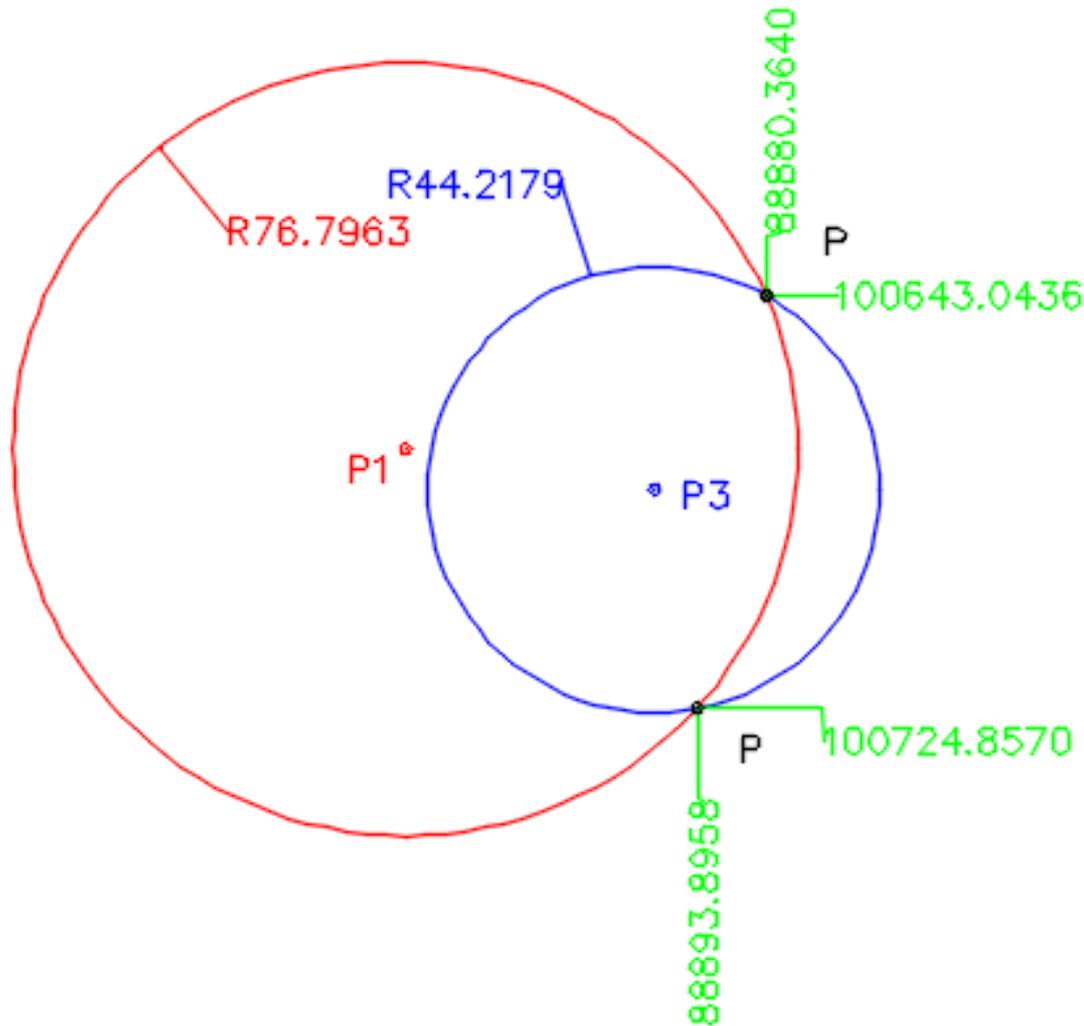
Uma estação livre obtém-se de uma intersecção inversa onde se substituiu um ângulo por uma distância ou duas distâncias.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Estação livre: o ângulo α observado em P entre as pontarias para P3 e P1 dá origem ao arco capaz que subtende o ângulo α para esses pontos. A distância $PP1=P1P$ dá origem a uma circunferência centrada em P1.



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Estação livre resolvida através da intersecção da **circunferência** centrada em **P1** e com raio igual a **PP1=P1P** e da **circunferência** centrada em **P3** e com raio igual a **PP3=P3P**. Como há 2 soluções, a escolha é feita utilizando o ângulo observado em P entre as direcções PP3 e PP1.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

```

|> # cálculo da estação livre a partir das distancias d1 e d2
> # medidas do ponto estação, de coordenadas (M,P) desconhecidas,
> # para os pontos (M1,P1) e (M2,P2) de coordenadas conhecidas:
> # o ponto (M,P) é obtido como intersecção de 2 circunferencias
>
> # exemplo estação livre no ponto P calculada com os pontos P1
e P3
>
> M1:=-88950.905;
                                     M1 := -88950.905
>
> P1:=-100673.402;
                                     P1 := -100673.402
>
> M2:=-88902.289;
                                     M2 := -88902.289
>
> P2:=-100681.443;
                                     P2 := -100681.443
>
> d1:=76.79628235;
                                     d1 := 76.79628235
>
> d2:=44.21790757;
                                     d2 := 44.21790757
>
> eqns := { (M1-M) ^2+ (P1-P) ^2=d1^2, (M2-M) ^2+ (P2-P) ^2=d2^2 };
eqns := { (-88950.905 - M)2 + (-100673.402 - P)2 = 5897.668983,
          (-88902.289 - M)2 + (-100681.443 - P)2 = 1955.223350 }
>
> sols := solve( eqns );
sols := { P = -100724.8570 M = -88893.89579 }, { P = -100643.0436 M = -88880.36399 }

```

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

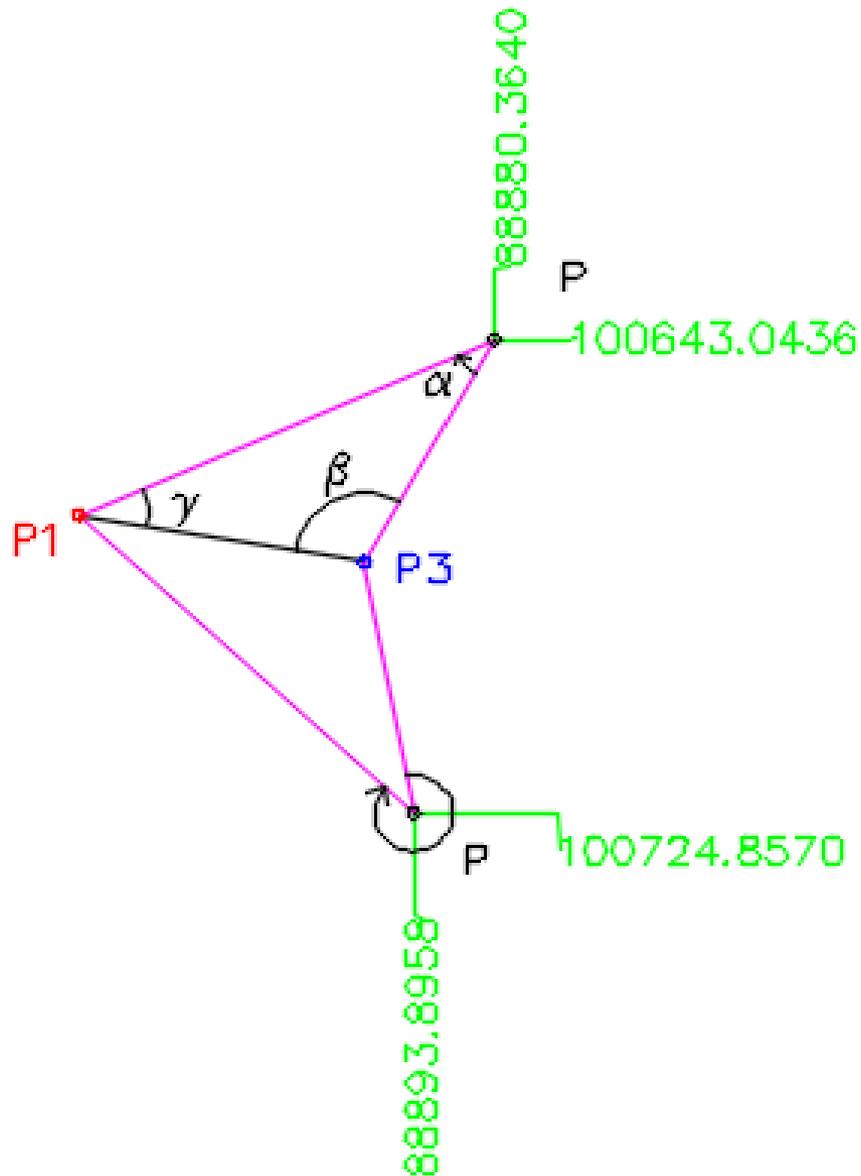
Estação livre resolvida através da analogia dos senos, calculando-se os restantes elementos do triângulo PAB:

$$d_{AB} = \sqrt{(M_B - M_A)^2 + (P_B - P_A)^2}$$

$$\frac{\sin \alpha}{d_{AB}} = \frac{\sin \beta}{d_{PB}} = \frac{\sin \gamma}{d_{PA}} \Rightarrow \begin{cases} \beta = a \sin\left(\frac{d_{PB}}{d_{AB}} \sin \alpha\right) \\ \gamma = a \sin\left(\frac{d_{PA}}{d_{AB}} \sin \alpha\right) \end{cases}$$

$$\varepsilon = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) \Rightarrow \begin{cases} \bar{\beta} = \beta + \frac{\varepsilon}{3} \\ \bar{\gamma} = \gamma + \frac{\varepsilon}{3} \end{cases}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Tendo os ângulos β e γ sido calculados, a **estação livre** pode ser resolvida como uma intersecção directa.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

```

v if (abs(200-alfa-beta1-gama1)<1) then beta:=beta1 end if;
v if (abs(200-alfa-beta1-gama1)<1) then gama:=gama1 end if;
v
v if (abs(200-alfa-beta1-gama2)<1) then beta:=beta1 end if;
      beta := 36.31455014
v if (abs(200-alfa-beta1-gama2)<1) then gama:=gama2 end if;
      gama := 122.5642982
v
v if (abs(200-alfa-beta2-gama1)<1) then beta:=beta2 end if;
v if (abs(200-alfa-beta2-gama1)<1) then gama:=gama1 end if;
v
v if (abs(200-alfa-beta2-gama2)<1) then beta:=beta2 end if;
v if (abs(200-alfa-beta2-gama2)<1) then gama:=gama2 end if;
v
v erro_fecho:=(200-alfa-beta-gama);
      erro_fecho := .0276034
v alfa:=alfaterro_fecho/3;
      alfa := 41.11195056
v beta:=betaterro_fecho/3;
      beta := 36.31915070
v gama:=gamaterro_fecho/3;
      gama := 122.5688987

```

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Tendo os ângulos β e γ sido calculados, a **estação livre** pode igualmente ser resolvida como uma irradiada a partir de A ou de B:

$$R_{AB} = a \tan \frac{M_B - M_A}{P_B - P_A}$$

$$R_{AP} = R_{AB} + \bar{\beta} \Rightarrow R_{PA} = R_{AP} \pm \pi$$

$$R_{BP} = R_{BA} - \bar{\gamma} \Rightarrow R_{PB} = R_{BP} \pm \pi$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$$\sin R_{PA} = \frac{M_A - M_P}{d_{PA}} \Rightarrow M_P = M_A - d_{PA} \sin R_{PA}$$

$$\cos R_{PA} = \frac{P_A - P_P}{d_{PA}} \Rightarrow P_P = P_A - d_{PA} \cos R_{PA}$$

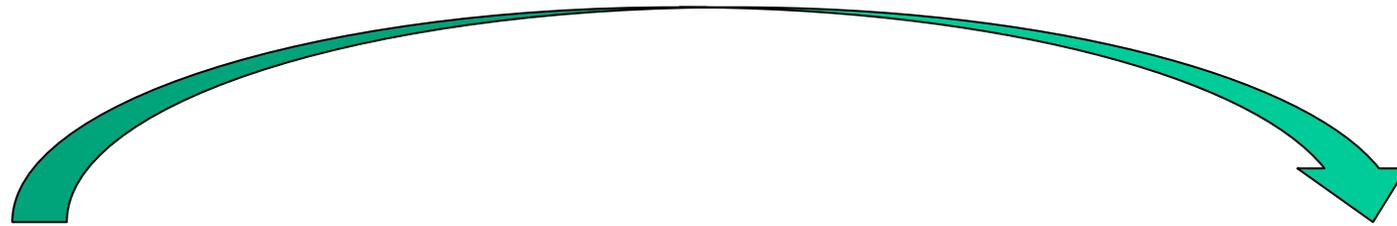
$$\sin R_{PB} = \frac{M_B - M_P}{d_{PB}} \Rightarrow M_P = M_B - d_{PB} \sin R_{PB}$$

$$\cos R_{PB} = \frac{P_B - P_P}{d_{PB}} \Rightarrow P_P = P_B - d_{PB} \cos R_{PB}$$

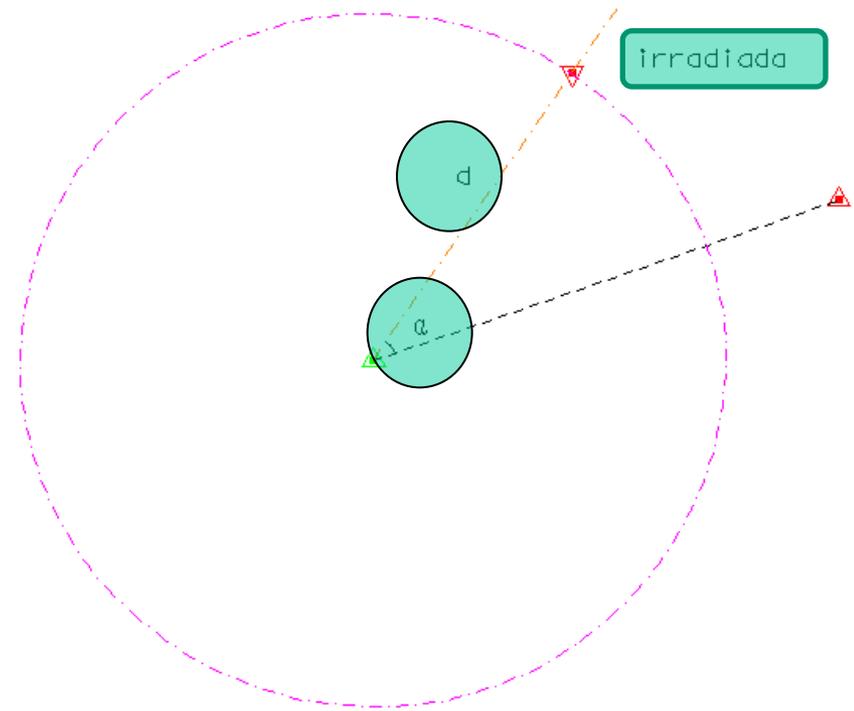
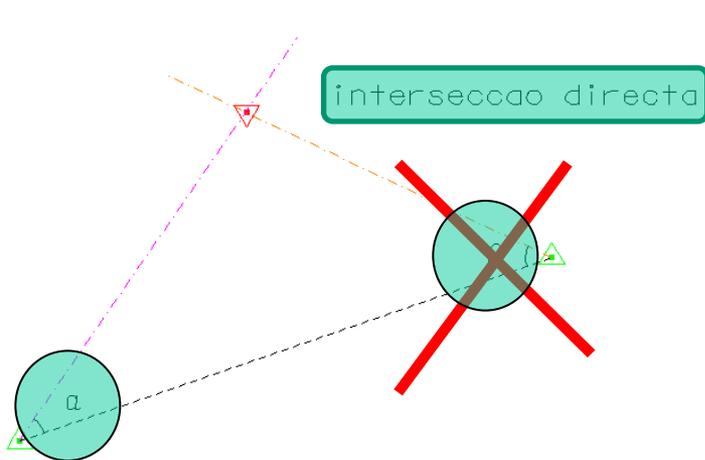
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Pretendendo-se determinar as coordenadas de um ponto (2 incógnitas), é necessário utilizar 2 observações independentes.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



2 angulos



legenda:

triângulo direito: ponto de coordenadas conhecidas

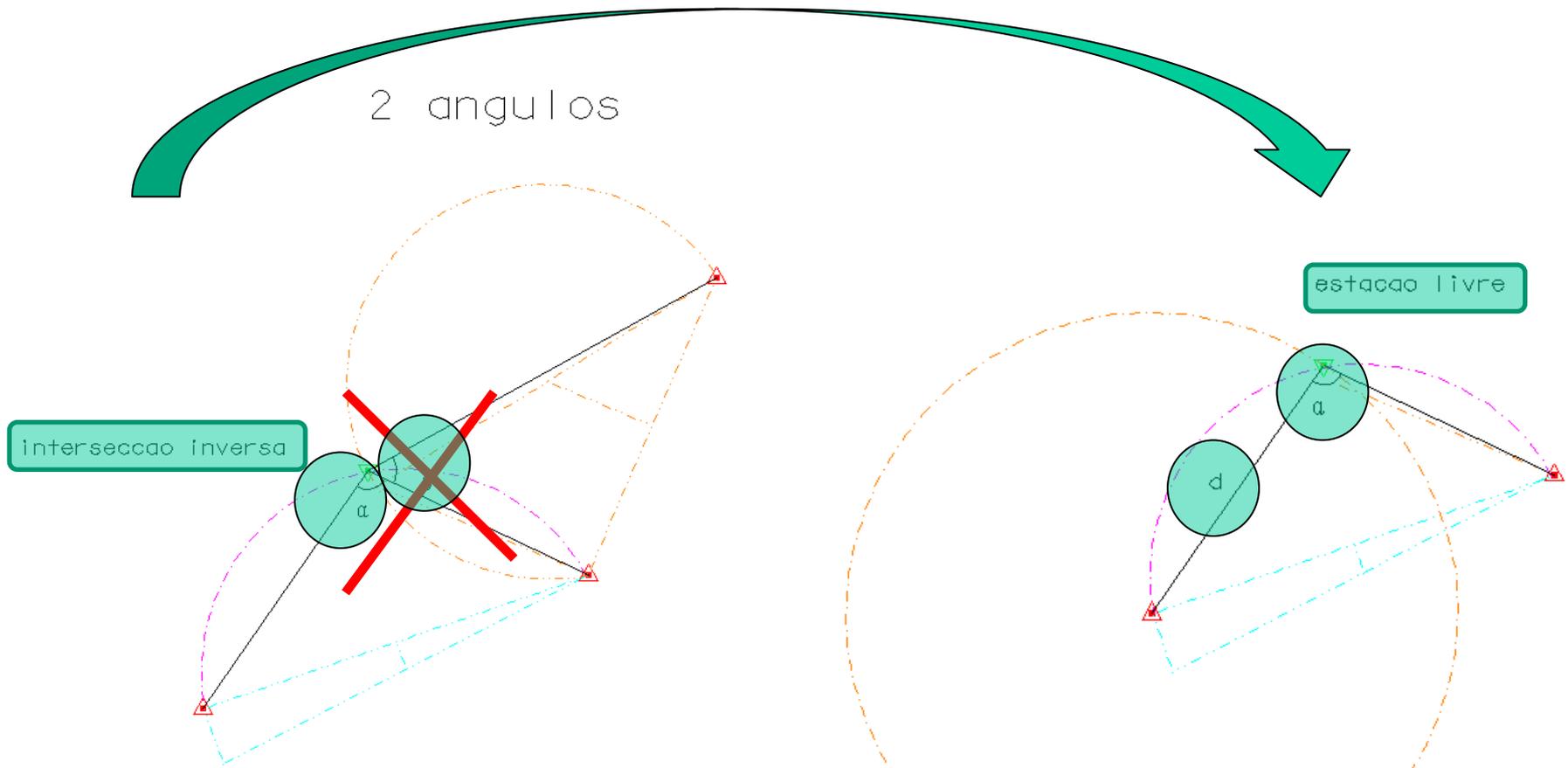
triângulo invertido: ponto de coordenadas desconhecidas

triângulo verde: ponto estacionado

triângulo encarnado: ponto não estacionado

1 ANGULO, 1 DISTANCIA

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

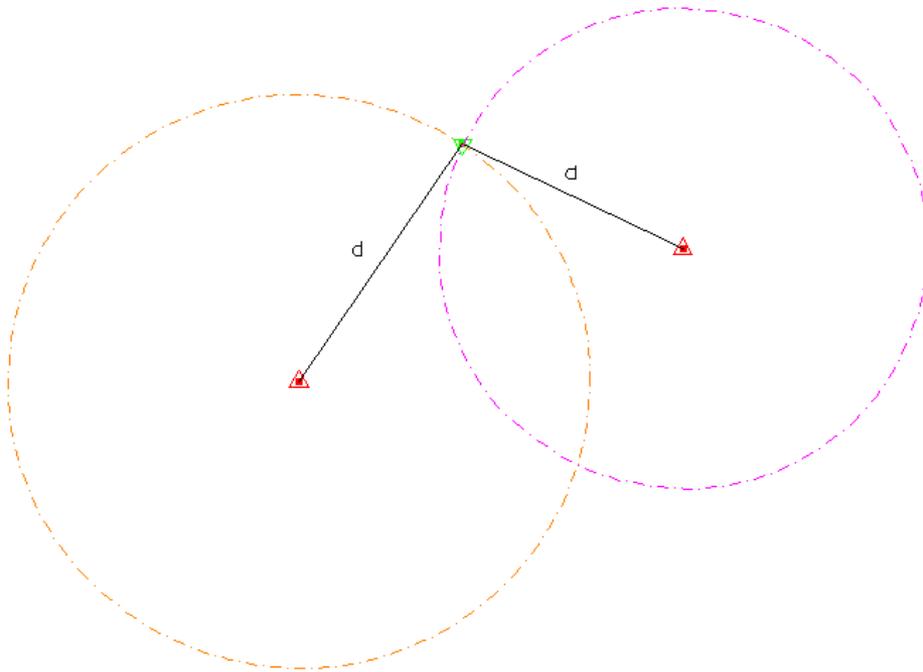


- legenda:
- triângulo direito: ponto de coordenadas conhecidas
 - triângulo invertido: ponto de coordenadas desconhecidas
 - triângulo verde: ponto estacionado
 - triângulo encarnado: ponto não estacionado

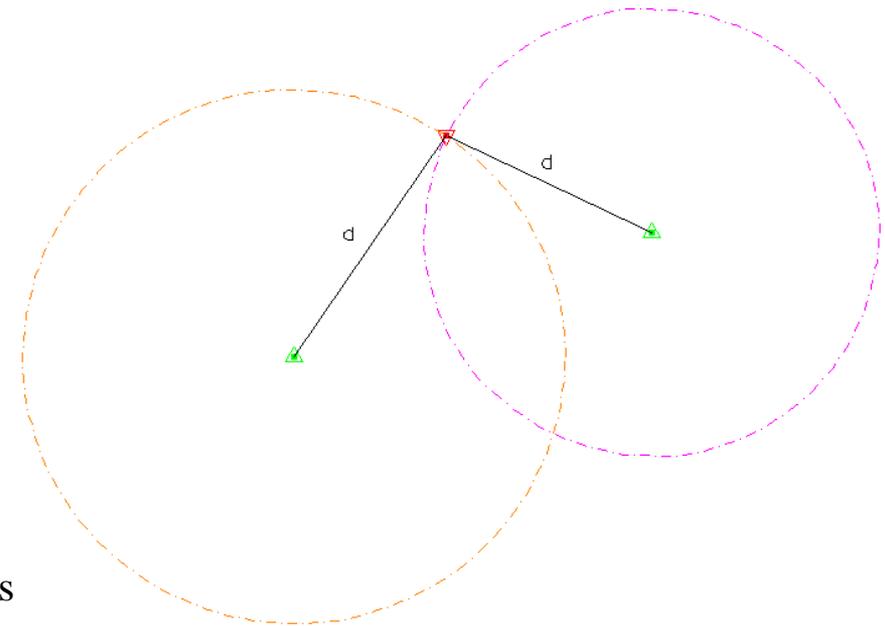
1 ANGULO, 1 DISTANCIA

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

2 DISTANCIAS



2 DISTANCIAS



legenda:

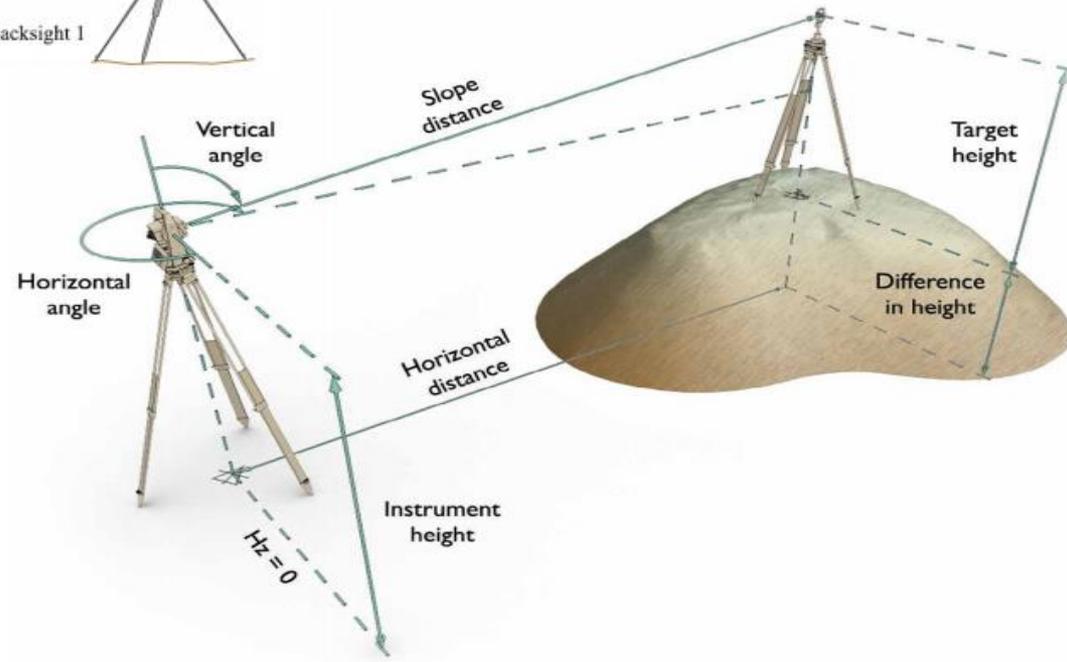
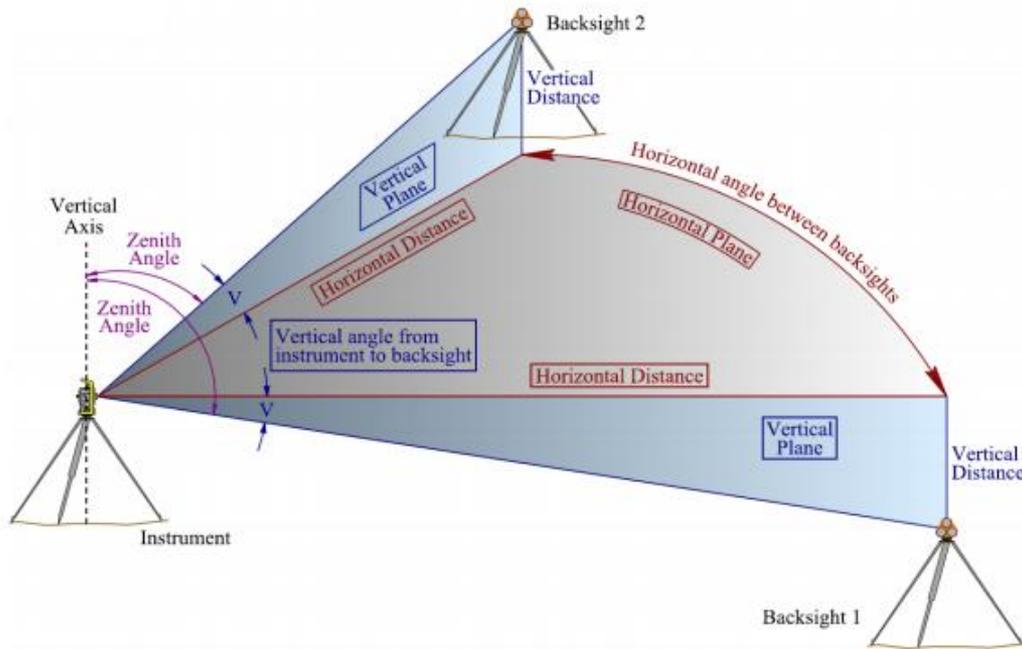
triângulo direito: ponto de coordenadas conhecidas

triângulo invertido: ponto de coordenadas desconhecidas

triângulo verde: ponto estacionado

triângulo encarnado: ponto não estacionado

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

A figura de apoio mais vulgar, por se adaptar a todas as condições de terreno, é a **poligonal** ou **irradiada sucessiva**. Para a respectiva resolução (cálculo das coordenadas das estações intermédias), além do conhecimento das **coordenadas do ponto inicial**, é necessário conhecer a **orientação inicial**.

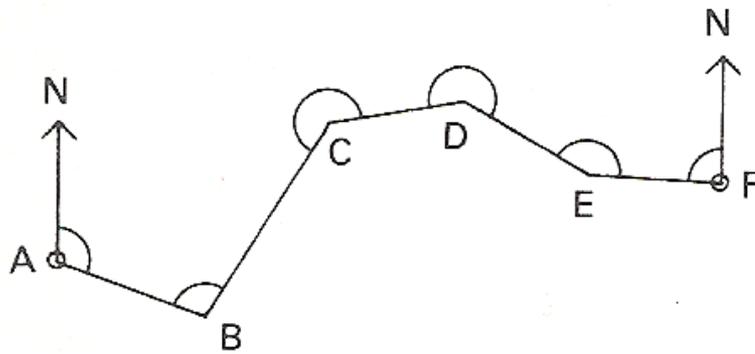
As poligonais podem ser, do ponto de vista **geométrico**:

- **fechadas**, quando têm início e fim no mesmo ponto.
- **abertas**, quando o primeiro e o último ponto não coincidem.

As poligonais podem ser, do ponto de vista **matemático**:

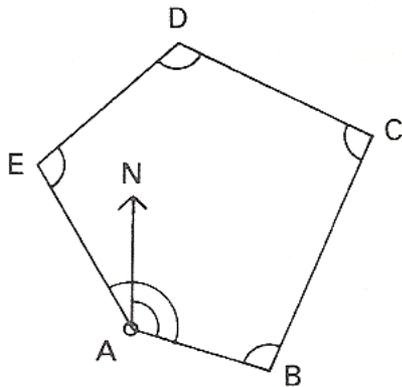
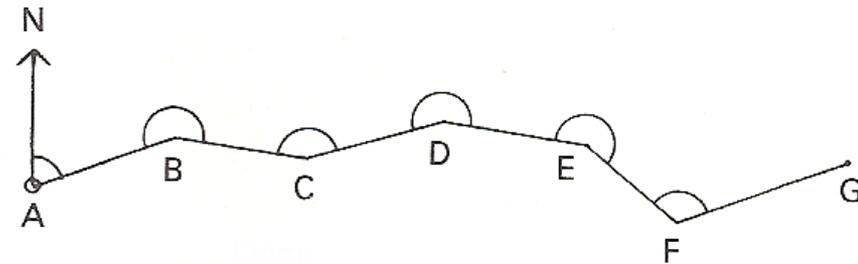
- apoiadas ou **fechadas**, quando têm início e fim em pontos de coordenadas conhecidas.
- **abertas**, quando têm início num ponto de coordenadas conhecidas mas terminam num ponto de coordenadas desconhecidas.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

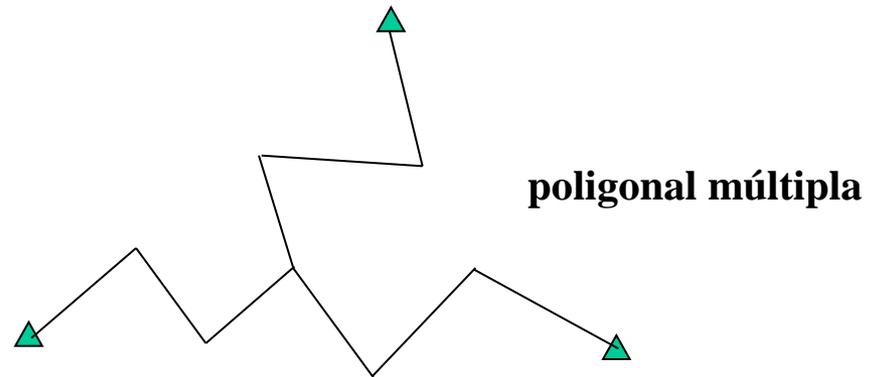


poligonal **geomericamente aberta**
poligonal **matematicamente aberta**

poligonal **geomericamente aberta**
poligonal **matematicamente fechada**



poligonal **geomericamente fechada**
poligonal **matematicamente fechada**



poligonal múltipla

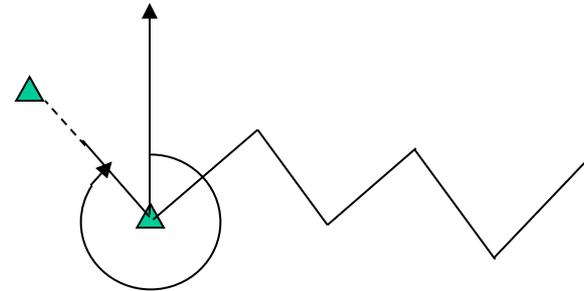
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Modo de
Orientação

Goniométrico: o rumo em cada estação é **transportado** a partir do rumo calculado no ponto inicial, usando os ângulos entre visadas atrás e à frente)

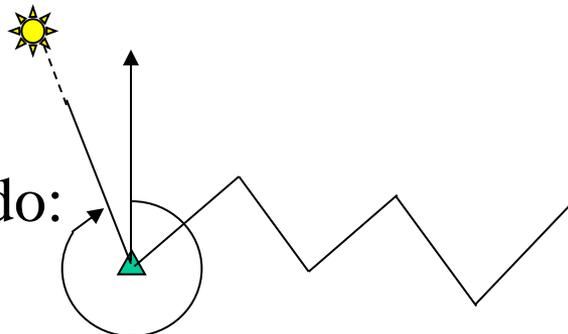
Declinado: o rumo é **observado** em cada estação

Modo
Goniométrico:



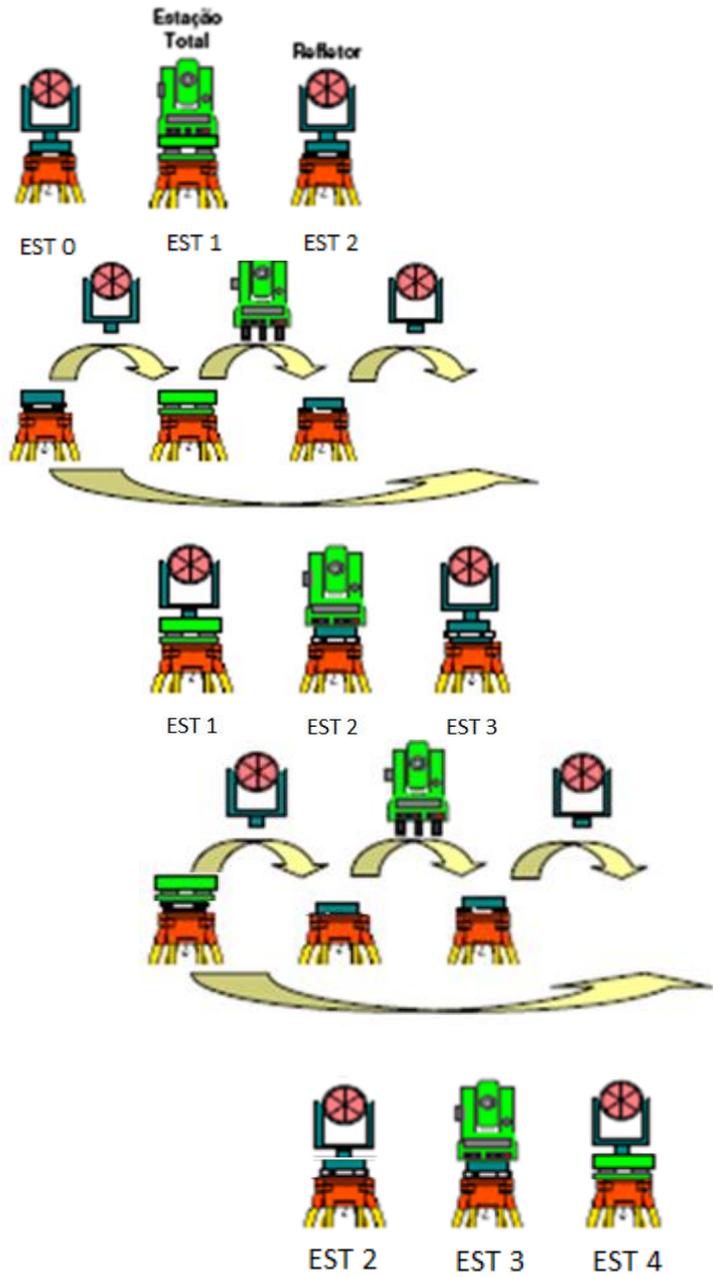
Orientação a partir de um vértice.

Modo Declinado:

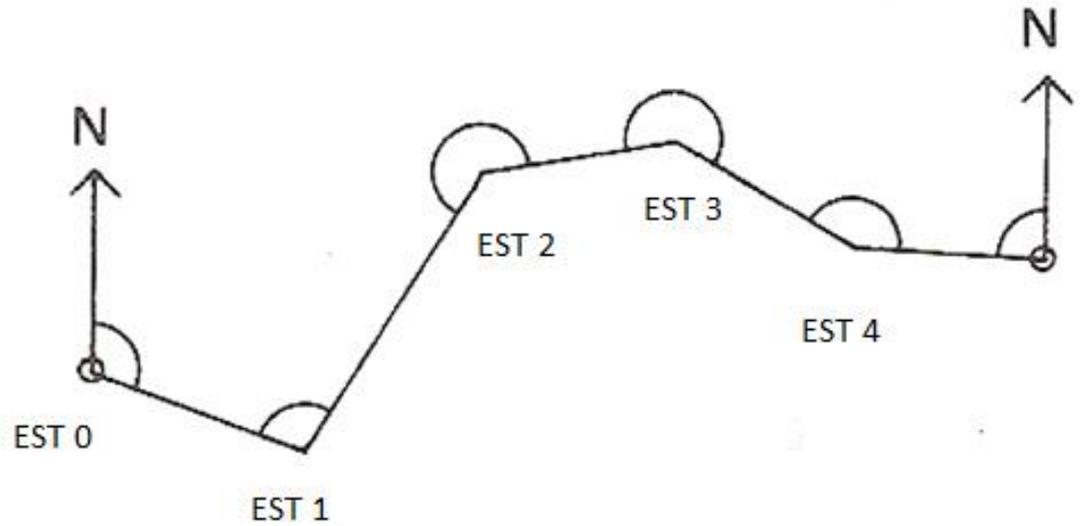


Orientação a partir de uma estrela, do sol, de uma agulha magnética, ou com um giroscópio.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



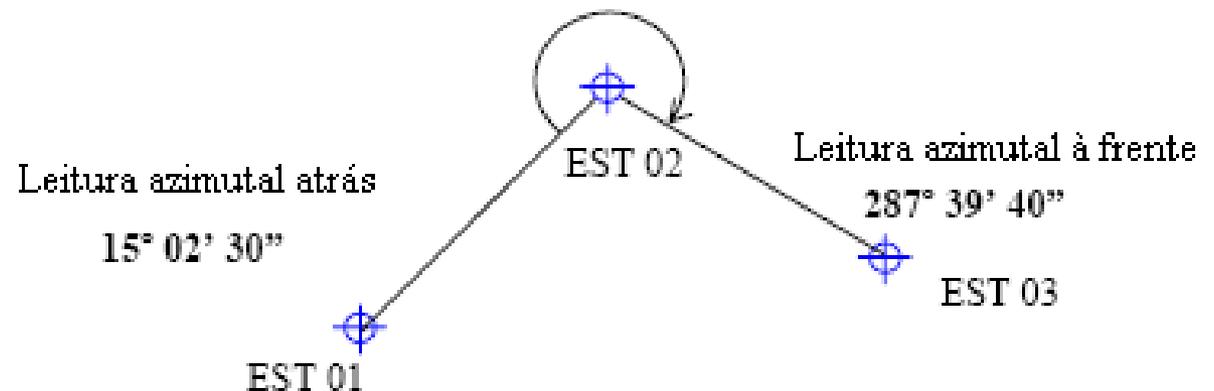
Método dos 3 tripés



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



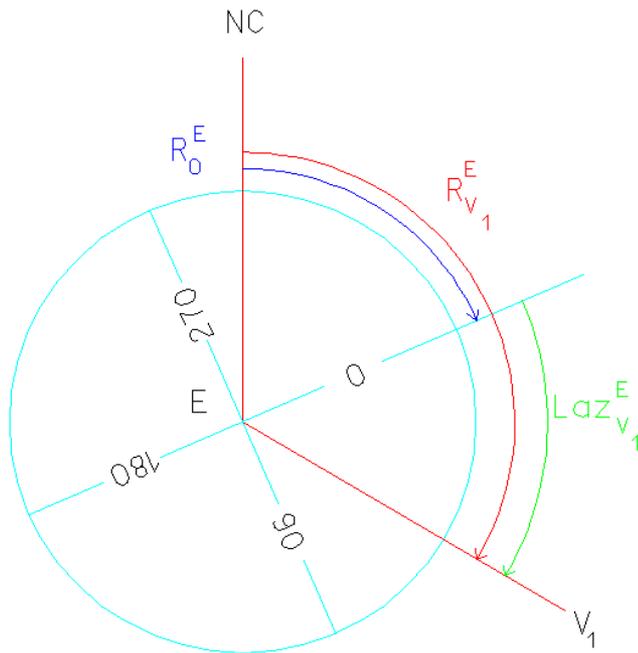
$$\text{Ângulo horizontal} = 287^{\circ} 39' 40'' - 15^{\circ} 02' 30'' = 272^{\circ} 37' 10''$$



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Sendo o ponto estação E de coordenadas conhecidas e o ponto visado V_1 igualmente de coordenadas conhecidas, tem-se:

$$R_0^E = R_E^{V_1} - \text{Laz}_E^{V_1} = a \tan \frac{M_{V_1} - M_E}{P_{V_1} - P_E} - \text{Laz}_E^{V_1}$$



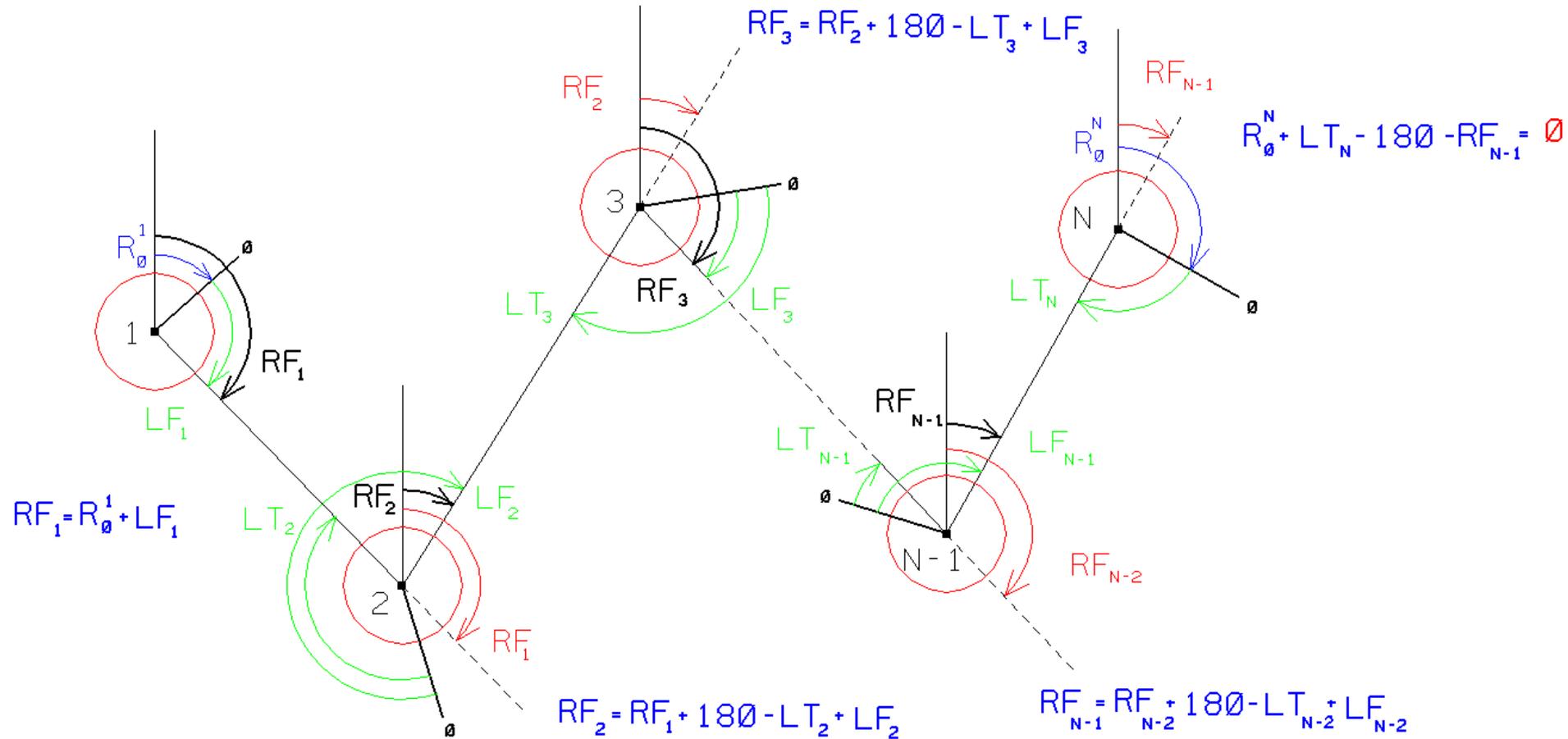
Este cálculo deve ser confirmado através de uma pontaria para pelo menos mais um ponto de coordenadas conhecidas pois se ocorrer algum erro na identificação do ponto visado, não há forma de no cálculo da poligonal identificar este erro.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Considere-se uma poligonal com **n pontos (incluindo os extremos)**, observada em modo goniométrico (ou seja, os rumos são transmitidos por observação de ângulos), cujo ponto inicial é o ponto **1**, onde foi feita uma orientação para um ponto de coordenadas conhecidas (para o cálculo do R0 nesse ponto), sendo aí efectuadas leituras de distância para a frente e de direcção azimutal para a frente; nos pontos intermédios **2 a n-1**, são efectuadas observações de direcção azimutal e distância entre pontos da poligonal; no último ponto da poligonal (**n**), para além de ser feita uma orientação para um ponto de coordenadas conhecidas (para o cálculo de R0 nesse ponto), apenas se observam a direcção azimutal e a distância para trás; há portanto **n-2 ângulos observados**, **n-1 distâncias observadas**, **n-1 rumos para a frente calculados**:

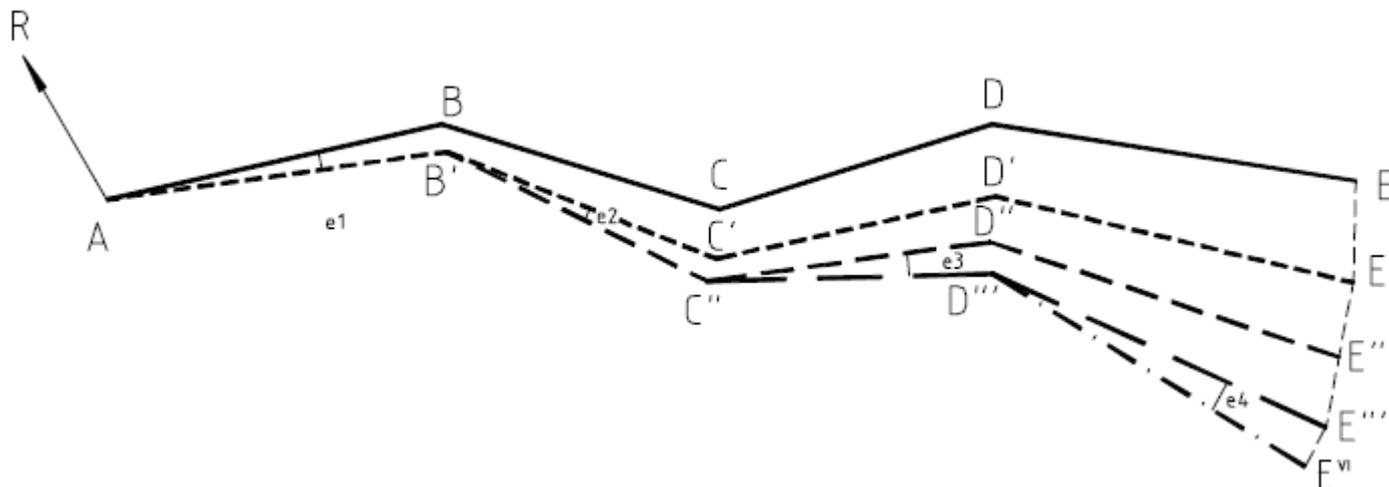
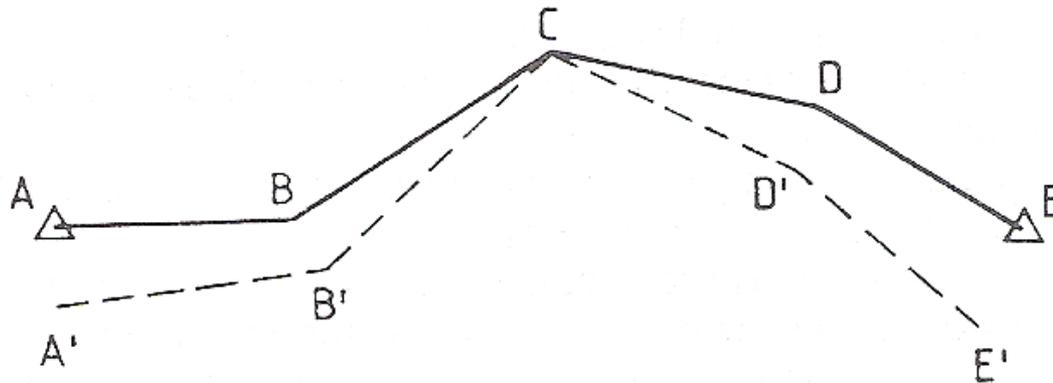
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

POLIGONAL (FECHADA) COM N PONTOS ESTACIONADOS



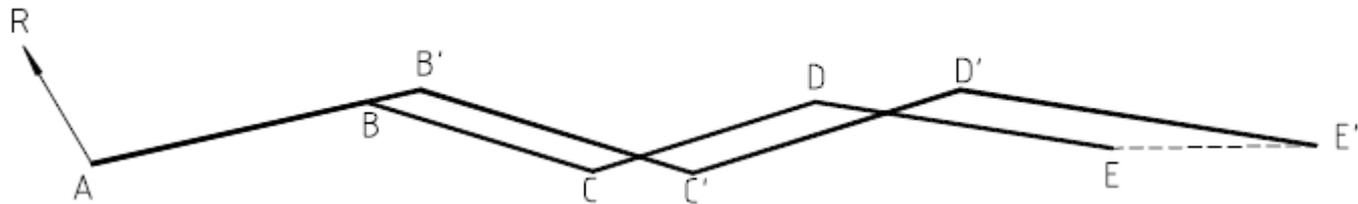
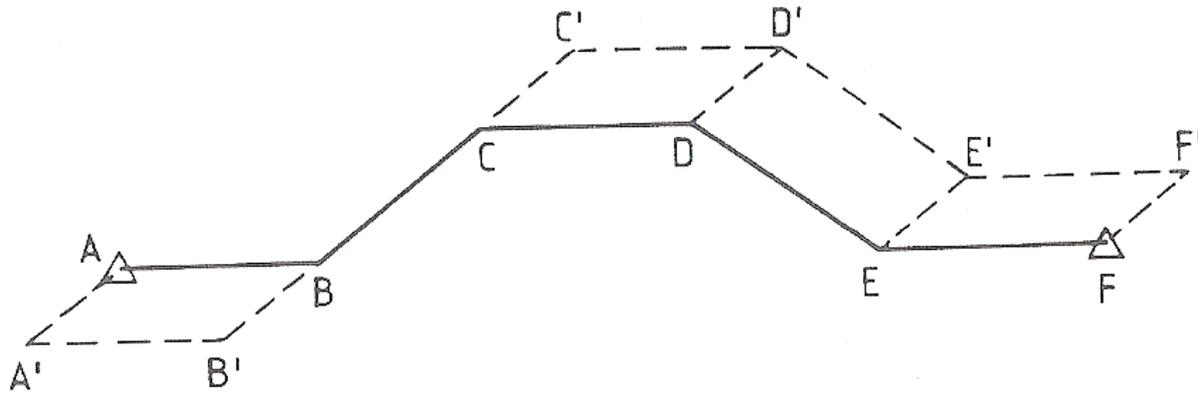
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

erro angular no ponto **C**

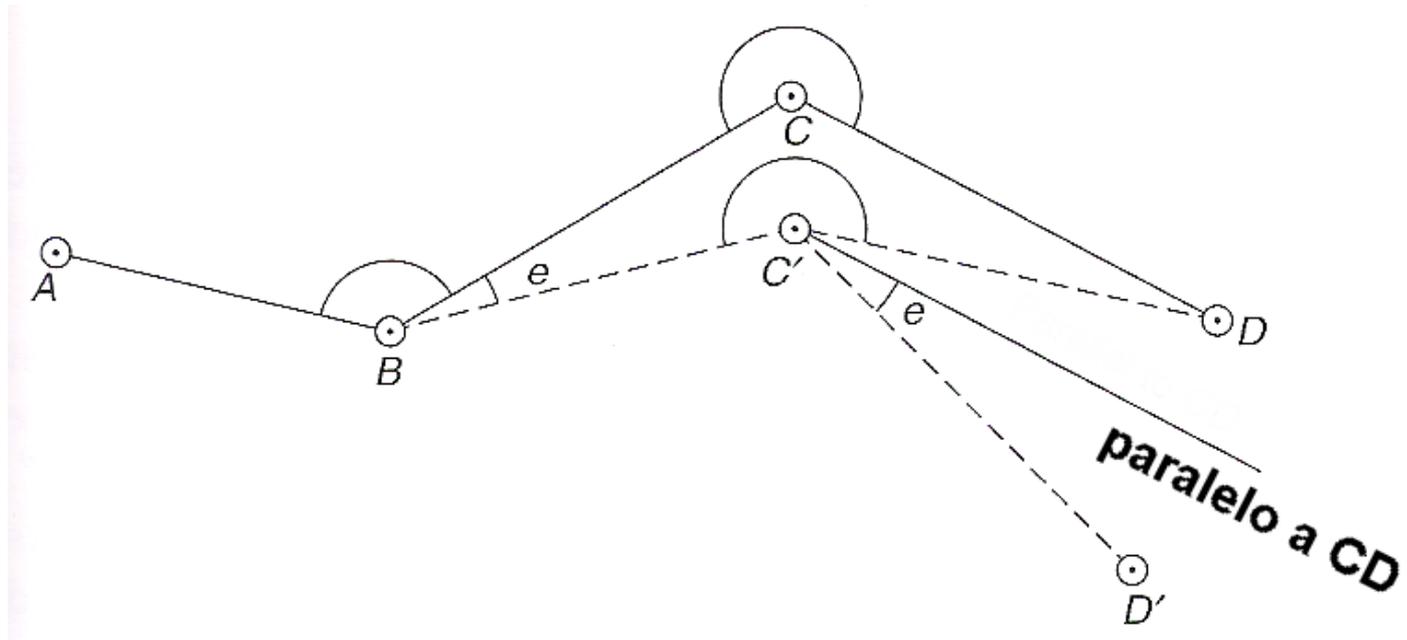


LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

erro na distância **CB**



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



erro no estacionamento em **C**

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Cálculo do rumo para frente em cada ponto da poligonal:

- No ponto 1: $RF_1 = R_0^1 + LF_1$
- No ponto $k, k=2, \dots, n-1$: $RF_k = RF_{k-1} + \pi + LF_k - LT_k$

Cálculo do erro de fecho angular: $\varepsilon_\alpha = RF_{n-1} + \pi - LT_n - R_0^n$

Cálculo da compensação dos rumos: $RF_k = RF_k - \frac{k}{n-1} \varepsilon_\alpha, k=1, \dots, n-1$

<i>Tipo de poligonal</i>	<u><i>Tolerância p/ erro de fecho angular</i></u> <i>(minutos de grado)</i>
Corrente	$e_\alpha \cong 4\sqrt{n}$
Precisão	$e_\alpha \cong 2\sqrt{n}$
Alta precisão	$e_\alpha \cong \sqrt{n}$

n é o número de vértices da poligonal, incluindo os extremos

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Cálculo da redução das distâncias ao horizonte:

- No ponto 1: $DHF_1 = DIF_1 \times \sin(ZF_1)$
- No ponto k , $k=2, \dots, n-1$: $DHT_k = DIT_k \times \sin(ZT_k)$, $DHF_k = DIF_k \times \sin(ZF_k)$
- No ponto n : $DHT_n = DIT_n \times \sin(ZT_n)$

Cálculo da média das distâncias horizontais:

- No ponto k , $k=1, \dots, n-1$: $DMH_k = (DHF_k + DHT_{k+1}) / 2$ |
- Caso só exista distância num sentido, a média coincide com esse valor

Cálculo do somatório das distâncias horizontais: $DHT = \sum_{k=1}^{n-1} DMH_k$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Cálculo dos desníveis:

- No ponto k , $k=1, \dots, n-1$: $\Delta F_k = DMH_k / \tan(ZF_k) + a_k^{inst} - a_k^{vis} + 6.82 \times 10^{-8} \times DMH_k^2$

$$\Delta T_k = DMH_k / \tan(ZT_{k+1}) + a_{k+1}^{inst} - a_{k+1}^{vis} + 6.82 \times 10^{-8} \times DMH_k^2$$

Cálculo da média dos desníveis: $\Delta M_k = (\Delta F_k + \Delta T_k) / 2$

Cálculo do somatório dos desníveis: $\Delta_{total} = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta M_k$

Cálculo do erro de fecho altimétrico: $\varepsilon_a = \cot a_1 - \cot a_n + \Delta_{total}$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Compensação do erro de fecho altimétrico:

- No ponto 1: cota₁
- No ponto k, k=2,...,n: $\text{cot } a_k = \text{cot } a_{k-1} + \Delta M_k - \frac{DMH_{k-1}}{DHT} \varepsilon_a$

Calculo da tolerância para o erro altimétrico: $t_a = \sqrt{n-1} \times 0.03$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Cálculo da redução das distâncias ao elipsóide:

- No ponto $k, k=1, \dots, n-1$: $DME_k = DMH_k \times R / (R + (\cot a_k + \cot a_{k+1}) / 2)$

Cálculo provisório da planimetria:

- No ponto 1: M_1, P_1
- No ponto $k, k=1, \dots, n$:
 $M_k = M_{k-1} + DME_{k-1} \times \sin(RF_{k-1})$
 $P_k = P_{k-1} + DME_{k-1} \times \cos(RF_{k-1})$

Cálculo da redução ao plano cartográfico:

- No ponto $k, k=1, \dots, n-1$: $DMP_k = DME_k + (M_k^2 + M_k \times M_{k+1} + M_{k+1}^2) \times 4.1018 \times 10^{-15} \times DME_k$

Calculo do somatório das distâncias reduzidas ao plano cartográfico: $DPT = \sum_{k=1}^{n-1} DMP_k$ (desenvolvimento)

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Calculo definitivo da planimetria:

- No ponto k , $k=1, \dots, n-1$: $\text{deltaM}_k = \text{DMP}_k \times \sin(\text{RF}_k)$

$$\text{SdeltaM} = \sum_{k=1}^{n-1} \text{deltaM}_k$$

$$\text{ASdeltaM} = \sum_{k=1}^{n-1} \text{abs}(\text{deltaM}_k)$$

$$\text{deltaP}_k = \text{DMP}_k \times \cos(\text{RF}_k)$$

$$\text{SdeltaP} = \sum_{k=1}^{n-1} \text{deltaP}_k$$

$$\text{ASdeltaP} = \sum_{k=1}^{n-1} \text{abs}(\text{deltaP}_k)$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Cálculo do erro de fecho linear:

$$M_{dif} = M_1 - M_n$$

$$P_{dif} = P_1 - P_n$$

$$\varepsilon_M = M_{dif} + S\delta M$$

$$\varepsilon_P = P_{dif} + S\delta P$$

$$\varepsilon_{linear} = \sqrt{\varepsilon_M^2 + \varepsilon_P^2}$$

<i>Tipo de poligonal</i>	<i>Tolerância p/ erro de fecho linear (metros)</i>
Corrente	$e_L \cong 0,06\sqrt{L}$
Precisão	$e_L \cong 0,01\sqrt{L} + 0,1$
Alta precisão	$e_L \cong 0,005\sqrt{L} + 0,05$

L=desenvolvimento)

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Cálculo da compensação planimétrica:

$$\text{corrM} = -\frac{\varepsilon_M}{AS_{\text{deltaM}}}$$

$$\text{corrP} = -\frac{\varepsilon_P}{AS_{\text{deltaP}}}$$

- No ponto k , $k=1, \dots, n-1$:

$$\text{deltaM}_k = \text{deltaM}_k + \text{corrM} \times \text{abs}(\text{deltaM}_k)$$

$$\text{deltaP}_k = \text{deltaP}_k + \text{corrP} \times \text{abs}(\text{deltaP}_k)$$

- No ponto k , $k=2, \dots, n$

$$M_k = M_{k-1} + \text{deltaM}_k$$

$$P_k = P_{k-1} + \text{deltaP}_k$$

Cálculo do erro relativo:

$$\varepsilon_{\text{relativo}} = \frac{\varepsilon_{\text{linear}}}{DPT}$$

($\approx \frac{1}{10000}$ em topografia)

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Em geral, a qualidade de uma poligonal é definida pelo respectivo erro de fecho linear, função da precisão das medições das direcções e das distâncias, o que permite a determinação da precisão relativa dessa poligonal: por exemplo, se o erro de fecho linear é 0.36 m e o desenvolvimento for 1762 m, a precisão relativa é dada por $0.36/1762$ ou $1/4894$. Embora a precisão relativa seja um indicador geral da precisão de uma poligonal, não dá informação sobre a incerteza posicional dos pontos da poligonal.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Para o ponto k da poligonal, obtêm-se as seguintes expressões para a propagação das variâncias-covariâncias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{M_k}^2 = \sum_{i=1}^{k-1} (P_k - P_i)^2 \sigma_{\alpha_i}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(M_{i+1} - M_i)^2}{d_i^2} \sigma_{d_i}^2 \\ \sigma_{P_k}^2 = \sum_{i=1}^{k-1} (M_k - M_i)^2 \sigma_{\alpha_i}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(P_{i+1} - P_i)^2}{d_i^2} \sigma_{d_i}^2 \\ \sigma_{M_k P_k} = - \sum_{i=1}^{k-1} (M_k - M_i)(P_k - P_i) \sigma_{\alpha_i}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(M_{i+1} - M_i)(P_{i+1} - P_i)}{d_i^2} \sigma_{d_i}^2 \end{array} \right.$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

A elipse de erro obtém-se da equação

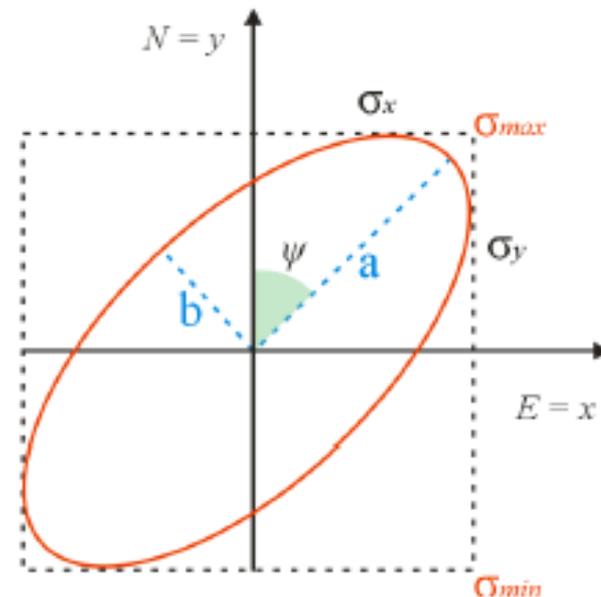
$$|\Sigma_{YX} - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (\sigma_M^2 + \sigma_P^2)\lambda + (\sigma_M^2\sigma_P^2 - \sigma_{MP}^2) = 0$$

ou seja, das duas soluções λ_1 e λ_2 tem-se que os semieixos maior e menor e o ângulo do semieixo maior com o eixo P são:

$$a = \sqrt{\lambda_1}$$

$$b = \sqrt{\lambda_2}$$

$$\Psi = \frac{1}{2} a \tan \frac{2\sigma_{MP}}{\sigma_P^2 - \sigma_M^2}$$



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$$a = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\frac{(\sigma_M^2 + \sigma_P^2) + \sqrt{(\sigma_M^2 + \sigma_P^2)^2 - 4(\sigma_M^2 \sigma_P^2 - \sigma_{MP}^2)}}{2}}$$

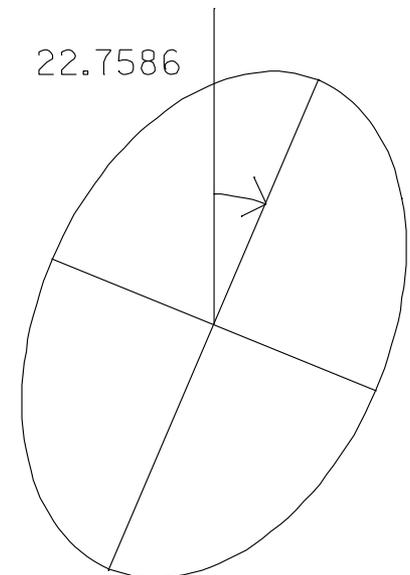
$$b = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\frac{(\sigma_M^2 + \sigma_P^2) - \sqrt{(\sigma_M^2 + \sigma_P^2)^2 - 4(\sigma_M^2 \sigma_P^2 - \sigma_{MP}^2)}}{2}}$$

$$\Psi = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \frac{2\sigma_{MP}}{\sigma_P^2 - \sigma_M^2}$$

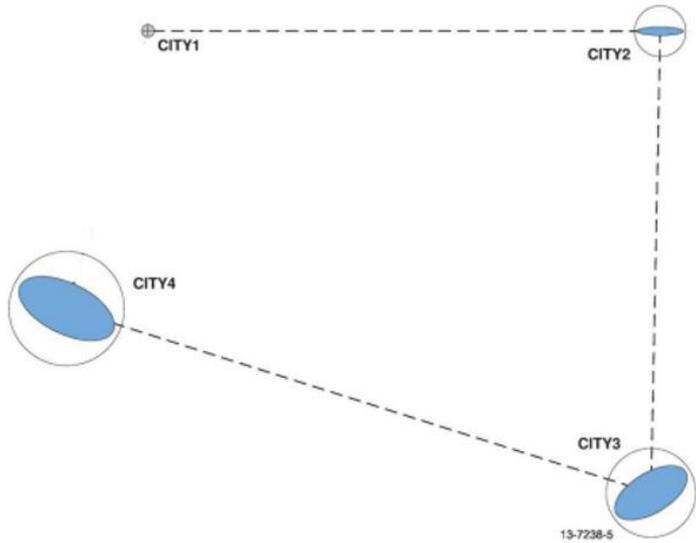
Exemplo: calcule os elementos da elipse de erro num dado ponto de uma poligonal supondo que a matriz de variâncias-covariâncias das coordenadas planimétricas desse ponto é

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^2_X & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma^2_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.005963 & 0.002403 \\ 0.002403 & 0.010683 \end{bmatrix}_{m^2}$$

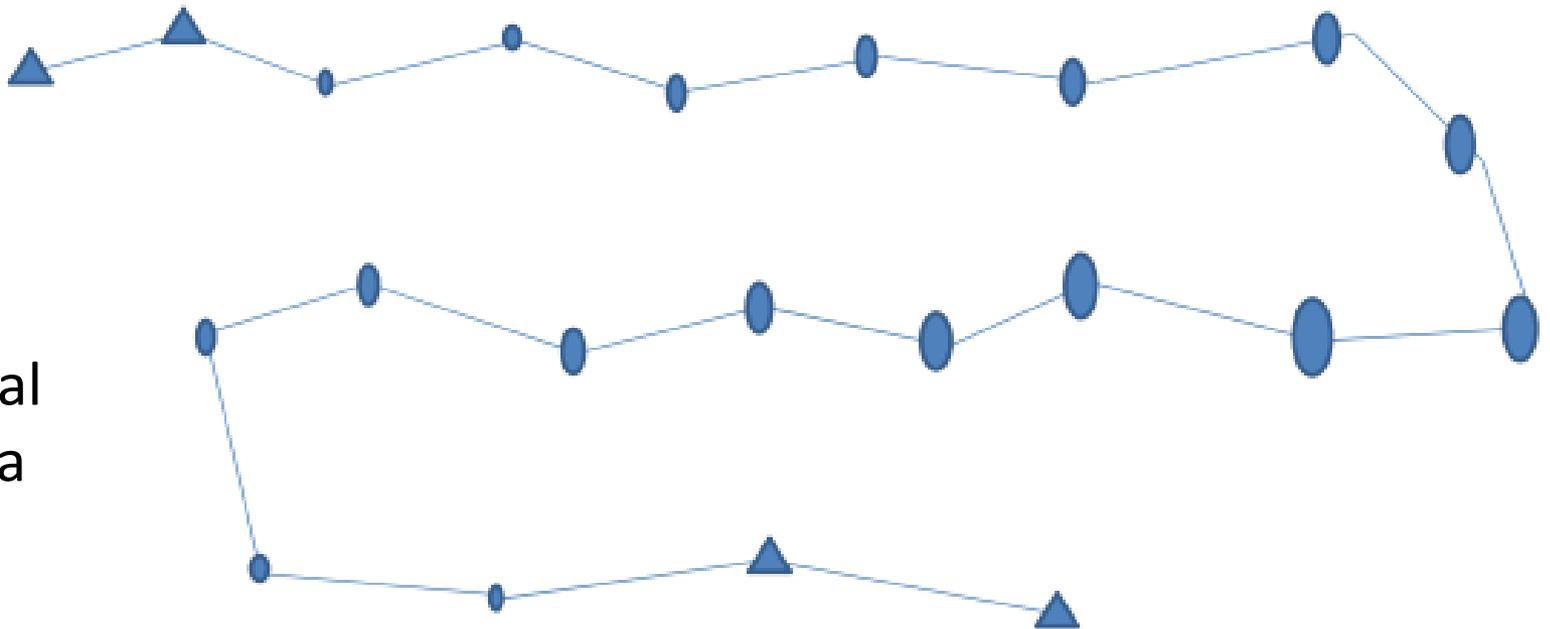
$$a=0.108 \text{ m}, b=0.070 \text{ m}, \theta=22^\circ.7586$$



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Poligonal aberta

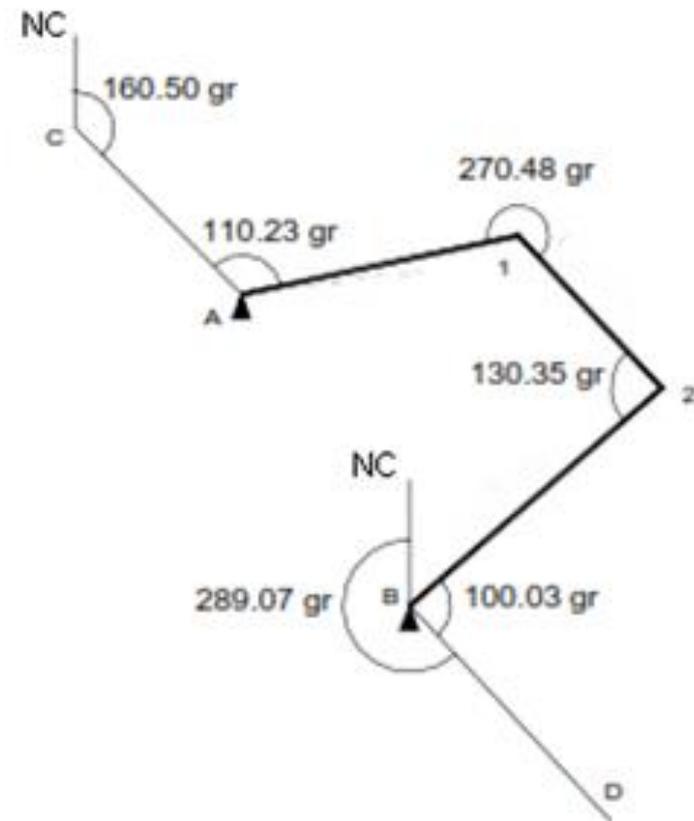


Poligonal fechada

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Calcule o erro de fecho angular da poligonal ilustrada na figura e classifique-a, sendo n o número de estações da poligonal.

Tipo de poligonal	Tolerância para o erro de fecho angular (minutos de grado)
Corrente	$<4\sqrt{n}$
Precisão	$<2\sqrt{n}$
Alta precisão	$<\sqrt{n}$



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Observou-se uma poligonal para coordenar os pontos C, D, E, tendo-se obtido as observações seguintes:

Estação	Pontos visados	Leituras azimutais	Distâncias horizontais
A	B	120.300 g	---
	C	68.445 g	54.03 m
	E	364.160 g	37.48 m
C	A	239.330 g	---
	D	356.435 g	88.96 m
D	C	104.825 g	---
	E	153.160 g	93.62 m
E	D	299.730 g	---
	A	30.090 g	---

Sabendo que $M_A=3264.87$ m, $P_A=-5703.03$ m, $M_B=3942.35$ m, $P_B=-4967.50$ m, determine os rumos compensados dos lados da poligonal.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Tendo a poligonal n estações, tem-se:

$$R_{\text{frente}}(1) = R_0(1) + Az_{\text{frente}}(1)$$

$$R_{\text{frente}}(i) = R_{\text{frente}}(i-1) + 200 + Az_{\text{frente}}(i) - Az_{\text{trás}}(i) , i=2, \dots, n-1$$

O erro de fecho angular da poligonal é dado por:

$$\text{Erro}_{\text{fecho angular}} = R_{\text{frente}}(n-1) + 200 - Az_{\text{trás}}(n) - R_0(n)$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Assim, tem-se:

$$R_0^A = R_{A,B} - L_{A,B}^{az} = a \tan \frac{M_B - M_A}{P_B - P_A} - L_{A,B}^{az} = a \tan \frac{3942.35 - 3264.87}{-4967.50 + 5703.03} - 120.300 = 47.386 - 120.300 + 400 = 327.086 \text{ g}$$

$$R_{A,C} = R_0^A + L_{A,C}^{az} = 327.086 + 68.445 = 395.531 \text{ g}$$

$$R_{C,D} = R_{A,C} + 200 + L_{C,D}^{az} - L_{C,A}^{az} = 395.531 + 200 + 356.435 - 239.330 - 400 = 312.636 \text{ g}$$

$$R_{D,E} = R_{C,D} + 200 + L_{D,E}^{az} - L_{D,C}^{az} = 312.636 + 200 + 153.160 - 104.825 - 400 = 160.971 \text{ g}$$

$$R_{E,A} = R_{D,E} + 200 + L_{E,A}^{az} - L_{E,D}^{az} = 160.971 + 200 + 30.090 - 299.730 - 400 = 91.331 \text{ g}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Erro de fecho angular:

$$\varepsilon_{\alpha} = R_{E,A} + 200 - L_{A,E}^{az} - R_0^A = 91.331 + 200 - 364.160 - 327.086 + 400 = 0.085 \text{ g}$$

Os rumos compensados são obtidos por:

$$R_{\text{frente}}^{\text{compensado}}(i) = R_{\text{frente}}(i) - \frac{i}{(n-1)} \cdot \varepsilon_{\alpha}$$

$$R_{A,C}^c = R_{A,C} - \frac{0.085}{4} = 395.510 \text{ g}$$

$$R_{C,D}^c = R_{C,D} - \frac{2 \times 0.085}{4} = 112.594 \text{ g}$$

$$R_{D,E}^c = R_{D,E} - \frac{3 \times 0.085}{4} = 160.907 \text{ g}$$

$$R_{E,A}^c = R_{E,A} - 0.085 = 291.246 \text{ g}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Ajuste recorrendo ao método clássico a seguinte poligonal observada entre os vértices A e D, cujas coordenadas são $M_A=208.715$ m, $P_A=-73095.011$ m, $C_A=841.260$ m e $M_D=-5397.377$ m, $P_D=-72916.893$ m, $C_D=982.048$ m, sabendo que em A e em D foi efectuada a orientação da poligonal respectivamente para os vértices Seixos e Cabeço Branco, de coordenadas $M_{\text{Seixos}}=2167.644$ m, $P_{\text{Seixos}}=-72841.331$ m e $M_{\text{Cabeço Branco}}=-5498.351$ m, $P_{\text{Cabeço Branco}}=-72231.579$ m (despreze a redução ao plano cartográfico):

	Leituras azimutais		Leituras zenitais	Distâncias inclinadas	Altura instrumento	Altura visada
	P/ trás	P/ frente	P/ frente	P/ frente	P/ frente	P/ frente
A	023.741	248.099	103.922	1628.090	1.72	1.65
B	301.630	088.889	098.615	2104.551	1.69	1.76
C	079.381	264.802	093.710	1972.649	1.74	1.80
D	308.106	209.960				

(as distâncias estão em m e as leituras angulares em grados).

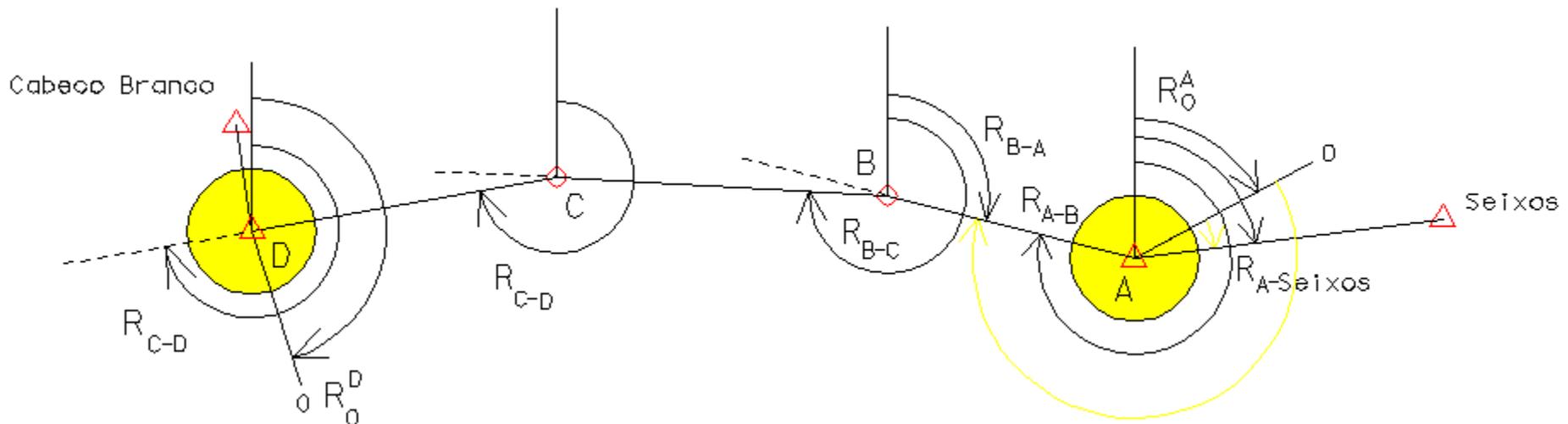
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

•cálculo do R_0 no ponto inicial da poligonal (A)

$$R_0^A = a \tan \frac{M_{\text{Seixos}} - M_A}{P_{\text{Seixos}} - P_A} - L_{A,\text{Seixos}}^{\text{az}} = a \tan \frac{1958.929}{253.68} - 23^\circ.741 = 91^\circ.801 - 23^\circ.741 = 68^\circ.060$$

•cálculo do R_0 no ponto final da poligonal (D)

$$R_0^D = a \tan \frac{M_{\text{Cabeço Branco}} - M_D}{P_{\text{Cabeço Branco}} - P_D} - L_{D,\text{Cabeço Branco}}^{\text{az}} = a \tan \frac{-100.974}{685.314} - 209^\circ.960 = 400^\circ - 9^\circ.313 - 209^\circ.960 = 180^\circ.727$$



LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

•cálculo dos rumos para a frente por transporte ao longo da poligonal

$$\text{em A: } R_{A,B} = R_0^A + L_{A,B}^{Az} = 91^g.801 + 248^g.099 = 316^g.159$$

$$\text{em B: } R_{B,C} = R_{A,B} + L_{B,C}^{Az} - L_{B,A}^{Az} + 200^g = 316^g.159 + 88^g.889 - 301^g.630 + 200^g = 303^g.418$$

$$\text{em C: } R_{C,D} = R_{B,C} + L_{C,D}^{Az} - L_{C,B}^{Az} + 200^g = 303^g.418 + 264^g.802 - 79^g.381 + 200^g = 288^g.839$$

•cálculo do erro de fecho angular

$$\varepsilon_\alpha = R_{C,D} + 200^g - L_{D,C}^{az} - R_0^D = 288^g.839 + 200^g - 308^g.106 - 180^g.727 = 0^g.006$$

•compensação dos rumos

$$\bar{R}_{A,B} = R_{A,B} - \frac{\varepsilon_\alpha}{3} = 316^g.159 - 0^g.002 = 316^g.157$$

$$\bar{R}_{B,C} = R_{B,C} - \frac{2\varepsilon_\alpha}{3} = 303^g.418 - 0^g.004 = 303^g.414$$

$$\bar{R}_{C,D} = R_{C,D} - \frac{3\varepsilon_\alpha}{3} = 288^g.839 - 0^g.006 = 288^g.833$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

•redução das distâncias ao horizonte

$$d_{A,B}^{\text{hor}} = d_{A,B}^{\text{incl}} \sin L_{A,B}^z = 1628.090 \sin 103^{\text{g}}.922 = 1625.001 \text{ m}$$

$$d_{B,C}^{\text{hor}} = d_{B,C}^{\text{incl}} \sin L_{B,C}^z = 2104.551 \sin 98^{\text{g}}.615 = 2104.053 \text{ m}$$

$$d_{C,D}^{\text{hor}} = d_{C,D}^{\text{incl}} \sin L_{C,D}^z = 1972.649 \sin 93^{\text{g}}.710 = 1963.028 \text{ m}$$

•cálculo dos desníveis

$$\Delta_{A,B} = d_{A,B}^{\text{hor}} / \tan L_{A,B}^z + \frac{0.43}{6371000} d_{A,B}^{\text{hor}^2} + a_A^{\text{ins}} - a_A^{\text{vis}} = 1625.001 / \tan 103^{\text{g}}.922 + \frac{0.43}{6371000} 1625.001^2 + 1.72 - 1.65 = -99.988 \text{ m}$$

$$\Delta_{B,C} = d_{B,C}^{\text{hor}} / \tan L_{B,C}^z + \frac{0.43}{6371000} d_{B,C}^{\text{hor}^2} + a_B^{\text{ins}} - a_B^{\text{vis}} = 2104.053 / \tan 98^{\text{g}}.615 + \frac{0.43}{6371000} 2104.053^2 + 1.69 - 1.76 = 46.014 \text{ m}$$

$$\Delta_{C,D} = d_{C,D}^{\text{hor}} / \tan L_{C,D}^z + \frac{0.43}{6371000} d_{C,D}^{\text{hor}^2} + a_C^{\text{ins}} - a_D^{\text{vis}} = 1963.028 / \tan 93^{\text{g}}.710 + \frac{0.43}{6371000} 1963.028^2 + 1.74 - 1.80 = 194.790 \text{ m}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

• cálculo do erro de fecho altimétrico

$$\varepsilon_C = C_A - C_D + (\Delta_{A,B} + \Delta_{B,C} + \Delta_{C,D}) = 841.260 - 982.048 + (-99.988 + 46.014 + 194.790) = 0.028 \text{ m}$$

• compensação dos desníveis

$$\bar{\Delta}_{A,B} = \Delta_{A,B} - \frac{d_{A,B}^{\text{hor}}}{d_{A,B}^{\text{hor}} + d_{B,C}^{\text{hor}} + d_{C,D}^{\text{hor}}} \varepsilon_C = -99.988 - \frac{1625.001}{1625.001 + 2104.053 + 1963.028} 0.028 = -99.996 \text{ m}$$

$$\bar{\Delta}_{B,C} = \Delta_{B,C} - \frac{d_{B,C}^{\text{hor}}}{d_{A,B}^{\text{hor}} + d_{B,C}^{\text{hor}} + d_{C,D}^{\text{hor}}} \varepsilon_C = 46.014 - \frac{2104.053}{1625.001 + 2104.053 + 1963.028} 0.028 = 46.004 \text{ m}$$

$$\bar{\Delta}_{C,D} = \Delta_{C,D} - \frac{d_{C,D}^{\text{hor}}}{d_{A,B}^{\text{hor}} + d_{B,C}^{\text{hor}} + d_{C,D}^{\text{hor}}} \varepsilon_C = 194.790 - \frac{1963.028}{1625.001 + 2104.053 + 1963.028} 0.028 = 194.780 \text{ m}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

•cálculo das cotas

$$C_B = C_A + \bar{\Delta}_{A,B} = 841.260 - 99.996 = 741.264 \text{ m}$$

$$C_C = C_B + \bar{\Delta}_{B,C} = 741.264 + 46.004 = 787.268 \text{ m}$$

$$C_D = C_C + \bar{\Delta}_{C,D} = 787.268 + 194.780 = 982.048 \text{ m}$$

•redução das distâncias ao elipsóide

$$d_{A,B}^{\text{elip}} = d_{A,B}^{\text{hor}} \frac{6371000}{6371000 + \frac{C_A + C_B}{2}} = 1624.799 \text{ m}$$

$$d_{B,C}^{\text{elip}} = d_{B,C}^{\text{hor}} \frac{6371000}{6371000 + \frac{C_B + C_C}{2}} = 2103.801 \text{ m}$$

$$d_{C,D}^{\text{elip}} = d_{C,D}^{\text{hor}} \frac{6371000}{6371000 + \frac{C_C + C_D}{2}} = 1962.755 \text{ m}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

•cálculo das coordenadas planimétricas

$$\delta M_A = d_{A,B}^{\text{elip}} \sin \bar{R}_{A,B} = 1624.799 \sin 316^{\text{g}}.157 = -1572.752$$

$$\delta P_A = d_{A,B}^{\text{elip}} \cos \bar{R}_{A,B} = 1624.799 \cos 316^{\text{g}}.157 = 407.951$$

$$\delta M_B = d_{B,C}^{\text{elip}} \sin \bar{R}_{B,C} = 2103.801 \sin 303^{\text{g}}.414 = -2100.777$$

$$\delta P_B = d_{B,C}^{\text{elip}} \cos \bar{R}_{B,C} = 2103.801 \cos 303^{\text{g}}.414 = 112.766$$

$$\delta M_C = d_{C,D}^{\text{elip}} \sin \bar{R}_{C,D} = 1962.755 \sin 288^{\text{g}}.833 = -1932.636$$

$$\delta P_C = d_{C,D}^{\text{elip}} \cos \bar{R}_{C,D} = 1962.755 \cos 288^{\text{g}}.833 = -342.526$$

$$M_B = M_A + \delta M_A = 208.715 - 1572.752 = -1364.037 \text{ m}$$

$$P_B = P_A + \delta P_A = -73095.011 + 407.951 = -72687.060 \text{ m}$$

$$M_C = M_B + \delta M_B = -1364.037 - 2100.777 = -3464.814 \text{ m}$$

$$P_C = P_B + \delta P_B = -72687.060 + 112.7664 = -72574.294 \text{ m}$$

$$M_D = M_C + \delta M_C = -3464.814 - 1932.636 = -5397.450 \text{ m}$$

$$P_D = P_C + \delta P_C = -72574.294 - 342.526 = -72916.820 \text{ m}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

•cálculo definitivo da planimetria

$$\sum \delta M = \delta M_A + \delta M_B + \delta M_C = -5606.165$$

$$\sum \delta P = \delta P_A + \delta P_B + \delta P_C = 178.191$$

$$\Delta M = M_A - M_D = 5606.092$$

$$\Delta P = P_A - P_D = -178.118$$

$$EFM = \Delta M + \sum \delta M = -0.073$$

$$EFP = \Delta P + \sum \delta P = 0.073$$

$$\left| \sum \delta M \right| = |\delta M_A| + |\delta M_B| + |\delta M_C| = 5606.165$$

$$\left| \sum \delta P \right| = |\delta P_A| + |\delta P_B| + |\delta P_C| = 863.243$$

$$KM = -EFM / \left| \sum \delta M \right| = 1.302138 \times 10^{-5}$$

$$KP = -EFP / \left| \sum \delta P \right| = -8.456448 \times 10^{-5}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$$\bar{\delta}M_A = \delta M_A + KM \times |\delta M_A| = -1572.732$$

$$\bar{\delta}P_A = \delta P_A + KP \times |\delta P_A| = 407.917$$

$$\bar{\delta}M_B = \delta M_B + KM \times |\delta M_B| = -2100.750$$

$$\bar{\delta}P_B = \delta P_B + KP \times |\delta P_B| = 112.756$$

$$\bar{\delta}M_C = \delta M_C + KM \times |\delta M_C| = -1932.611$$

$$\bar{\delta}P_C = \delta P_C + KP \times |\delta P_C| = -342.555$$

$$M_B = M_A + \bar{\delta}M_A = -1364.017$$

$$P_B = P_A + \bar{\delta}P_A = -72687.094$$

$$M_C = M_B + \bar{\delta}M_B = -3464.767$$

$$P_C = P_B + \bar{\delta}P_B = -72574.338$$

$$M_D = M_C + \bar{\delta}M_C = -5397.378$$

$$P_D = P_C + \bar{\delta}P_C = -72916.893$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

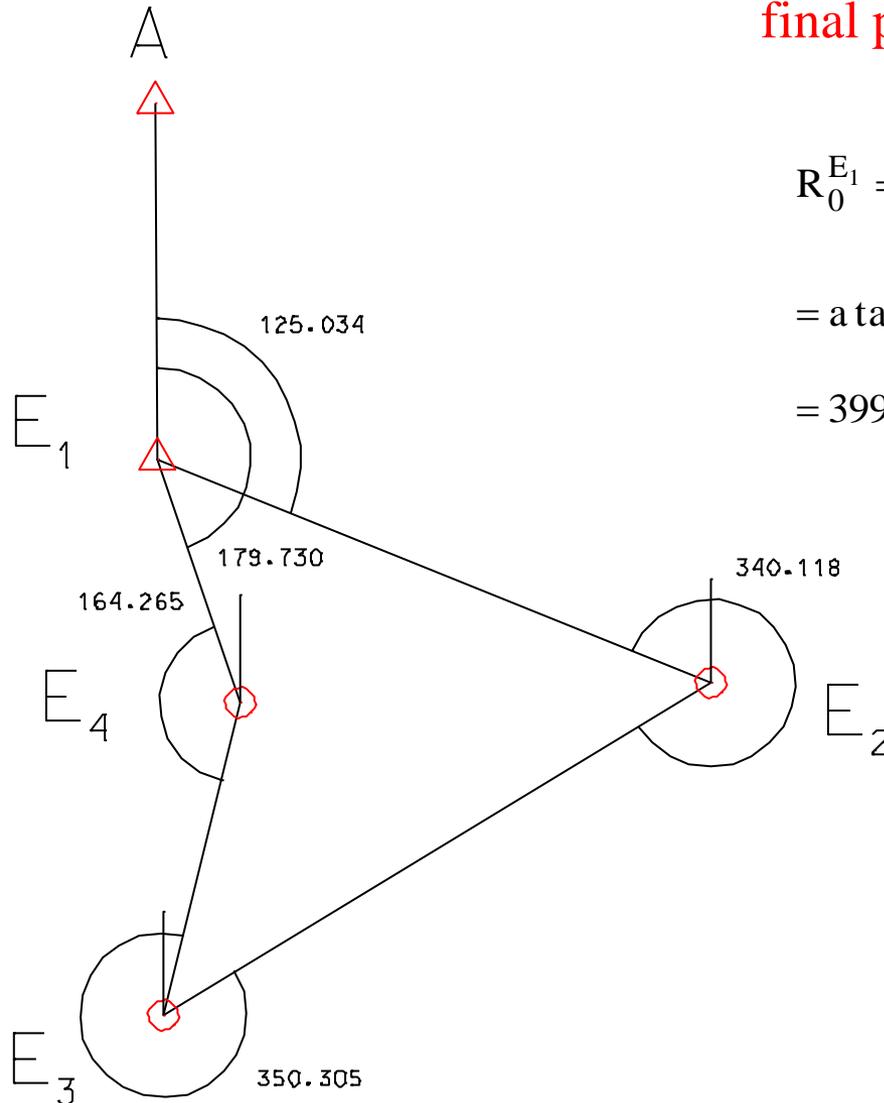
Na observação de uma poligonal de média precisão obteve-se o seguinte registo de campo:

Estação	Ponto visado	Leitura azimutal	Distância (m)
E ₁	A	003 ^g .448	---
	E ₂	128 ^g .482	116.88
	E ₄	183 ^g .178	---
E ₂	E ₁	321 ^g .869	---
	E ₃	261 ^g .987	125.73
E ₃	E ₂	051 ^g .530	---
	E ₄	001 ^g .835	63.77
E ₄	E ₃	027 ^g .853	---
	E ₁	192 ^g .118	50.90

Conhecendo as coordenadas $M_A=187.23$ m, $P_A=278.44$ m, $M_{E1}=187.66$ m, $P_{E1}=207.73$ m, determine as coordenadas planimétricas ajustadas dos restantes pontos da poligonal.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

cálculo do R_0 no ponto E_1 (ponto inicial e final pois a poligonal é fechada):



$$\begin{aligned} R_0^{E_1} &= R_{E_1,A} - L_{E_1,A}^{az} = a \tan \frac{M_A - M_{E_1}}{P_A - P_{M_1}} - L_{E_1A}^{az} = \\ &= a \tan \frac{187.23 - 187.66}{278.44 - 207.73} - 3^g.448 = \\ &= 399^g.612 - 3^g.448 = 396^g.165 \end{aligned}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

cálculo dos rumos para a frente por transporte ao longo da poligonal:

$$R_{E_1, E_2} = R_0^{E_1} + L_{E_1 E_2}^{az} = 396^g.165 + 128^g.482 = 124^g.647$$

$$R_{E_2, E_3} = R_{E_1, E_2} + L_{E_2 E_3}^{az} - L_{E_2, E_1}^{az} + 200^g = 124^g.647 + 261^g.987 - 321^g.869 + 200^g = 264^g.765$$

$$R_{E_3, E_4} = R_{E_2, E_3} + L_{E_3 E_4}^{az} - L_{E_3, E_2}^{az} + 200^g = 264^g.765 + 1^g.835 - 51^g.530 + 200^g = 15^g.070$$

$$R_{E_4, E_1} = R_{E_3, E_4} + L_{E_4 E_1}^{az} - L_{E_4, E_3}^{az} + 200^g = 15^g.070 + 192^g.118 - 27^g.853 + 200^g = 379^g.335$$

cálculo do erro de fecho angular:

$$\varepsilon_\alpha = R_{E_4, E_1} + 200^g - L_{E_1, E_4}^{az} - R_0^{E_1} = 379^g.335 + 200^g - 183^g.178 - 396^g.165 = -0^g.008$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

compensação dos rumos:

$$\bar{R}_{E_1,E_2} = R_{E_1,E_2} + \frac{0^g.008}{4} = 124^g.649$$

$$\bar{R}_{E_2,E_3} = R_{E_2,E_3} + \frac{2 \times 0^g.008}{4} = 264^g.769$$

$$\bar{R}_{E_3,E_4} = R_{E_3,E_4} + \frac{3 \times 0^g.008}{4} = 15^g.076$$

$$\bar{R}_{E_4,E_1} = R_{E_4,E_1} + \frac{4 \times 0^g.008}{4} = 379^g.343$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

cálculo das coordenadas planimétricas:

$$\delta M_{E_2} = d_{E_1, E_2} \sin \bar{R}_{E_1, E_2} = 116.88 \sin 124^{\text{g}}.649 = 108.23 \text{ m}$$

$$\delta P_{E_2} = d_{E_1, E_2} \cos \bar{R}_{E_1, E_2} = 116.88 \cos 124^{\text{g}}.649 = -44.13 \text{ m}$$

$$\delta M_{E_3} = d_{E_2, E_3} \sin \bar{R}_{E_2, E_3} = 125.73 \sin 264^{\text{g}}.769 = -106.96 \text{ m}$$

$$\delta P_{E_3} = d_{E_2, E_3} \cos \bar{R}_{E_2, E_3} = 125.73 \cos 264^{\text{g}}.769 = -66.08 \text{ m}$$

$$\delta M_{E_4} = d_{E_3, E_4} \sin \bar{R}_{E_3, E_4} = 63.77 \sin 15^{\text{g}}.076 = 14.96 \text{ m}$$

$$\delta P_{E_4} = d_{E_3, E_4} \cos \bar{R}_{E_3, E_4} = 63.77 \cos 15^{\text{g}}.076 = 61.99 \text{ m}$$

$$\delta M_{E_1} = d_{E_4, E_1} \sin \bar{R}_{E_4, E_1} = 50.90 \sin 379^{\text{g}}.343 = -16.23 \text{ m}$$

$$\delta P_{E_1} = d_{E_4, E_1} \cos \bar{R}_{E_4, E_1} = 50.90 \cos 379^{\text{g}}.343 = 48.24 \text{ m}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$$M_{E_2} = M_{E_1} + \delta M_{E_1} = 187.66 + 108.23 = 295.89 \text{ m}$$

$$P_{E_2} = P_{E_1} + \delta P_{E_1} = 207.73 - 44.13 = 163.60 \text{ m}$$

$$M_{E_3} = M_{E_2} + \delta M_{E_2} = 295.89 - 106.96 = 188.93 \text{ m}$$

$$P_{E_3} = P_{E_2} + \delta P_{E_2} = 163.60 - 66.08 = 97.52 \text{ m}$$

$$M_{E_4} = M_{E_3} + \delta M_{E_3} = 188.93 + 14.96 = 203.89 \text{ m}$$

$$P_{E_4} = P_{E_3} + \delta P_{E_3} = 97.52 + 61.99 = 159.51 \text{ m}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$$\Delta M = 0 \text{ m}$$
$$\Delta P = 0 \text{ m} \quad (\text{os pontos inicial e final coincidem})$$

$$EFM = \Delta M + \sum \delta M = \delta M_{E_1} + \delta M_{E_2} + \delta M_{E_3} + \delta M_{E_4} = 0 \text{ m}$$

$$EFP = \Delta P + \sum \delta P = \delta P_{E_1} + \delta P_{E_2} + \delta P_{E_3} + \delta P_{E_4} = 0.02 \text{ m}$$

$$\sum |\delta M| = 246.38 \text{ m}$$

$$\sum |\delta P| = 220.44 \text{ m}$$

$$KM = -EFM / \sum |\delta M| = 0$$

$$KP = -EFP / \sum |\delta P| = -9.072763 \times 10^{-5}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$$\bar{\delta M}_{E_2} = \delta M_{E_2} + KM \times |\delta M_{E_2}| = 108.23 \text{ m}$$

$$\bar{\delta P}_{E_2} = \delta P_{E_2} + KP \times |\delta P_{E_2}| = -44.13 \text{ m}$$

$$\bar{\delta M}_{E_3} = \delta M_{E_3} + KM \times |\delta M_{E_3}| = -106.96 \text{ m}$$

$$\bar{\delta P}_{E_3} = \delta P_{E_3} + KP \times |\delta P_{E_3}| = -66.09 \text{ m}$$

$$\bar{\delta M}_{E_4} = \delta M_{E_4} + KM \times |\delta M_{E_4}| = 14.96 \text{ m}$$

$$\bar{\delta P}_{E_4} = \delta P_{E_4} + KP \times |\delta P_{E_4}| = 61.98 \text{ m}$$

$$\bar{\delta M}_{E_1} = \delta M_{E_1} + KM \times |\delta M_{E_1}| = -16.23 \text{ m}$$

$$\bar{\delta P}_{E_1} = \delta P_{E_1} + KP \times |\delta P_{E_1}| = 48.24 \text{ m}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

$$M_{E_2} = M_{E_1} + \bar{\delta}M_{E_2} = 187.66 + 108.23 = 295.89 \text{ m}$$

$$P_{E_2} = P_{E_1} + \bar{\delta}P_{E_2} = 207.73 - 44.13 = 163.60 \text{ m}$$

$$M_{E_3} = M_{E_2} + \bar{\delta}M_{E_3} = 295.89 - 106.96 = 188.93 \text{ m}$$

$$P_{E_3} = P_{E_2} + \bar{\delta}P_{E_3} = 163.60 - 68.09 = 97.51 \text{ m}$$

$$M_{E_4} = M_{E_3} + \bar{\delta}M_{E_4} = 188.93 + 14.96 = 203.89 \text{ m}$$

$$P_{E_4} = P_{E_3} + \bar{\delta}P_{E_4} = 95.51 + 61.98 = 159.49 \text{ m}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Medição de **desnível ou distância vertical** entre planos horizontais, ou mais precisamente, entre duas superfícies de nível.

O desnível é uma medida que depende directamente do campo gravítico, pois é medido sobre a vertical do lugar entre superfícies equipotenciais.

Os diversos tipos de nivelamento baseiam-se em diferentes princípios, e consoante o princípio, assim se define o método ou o tipo de nivelamento.

Desníveis

Níveis;

Taqueómetros auto redutores, estações totais

Barómetros\

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Tipos de nivelamento

- Trigonométrico (10 cm/km)
 - 1- teodolito + distanciómetro e alvo reflector
 - 2- teodolito e estadia
 - 3- taqueómetro e mira
 - 4- taqueómetro auto-redutor e mira;
- geométrico (1 mm/km a 1 cm/km) (com níveis);
- barométrico (1 m/km) (com altímetro de precisão);
- hidrostático (vasos comunicantes).

- Precisão do nivelamento:
- alta precisão (1mm/1000 m=1 ppm);
 - média precisão (1cm/1000 m=10 ppm);
 - baixa precisão (10 cm/1000 m=100 ppm).

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O nivelamento **barométrico** baseia-se numa **lei física**: a pressão atmosférica é igual ao peso de uma coluna cilíndrica vertical de ar, com base unitária, que atravessa a atmosfera.

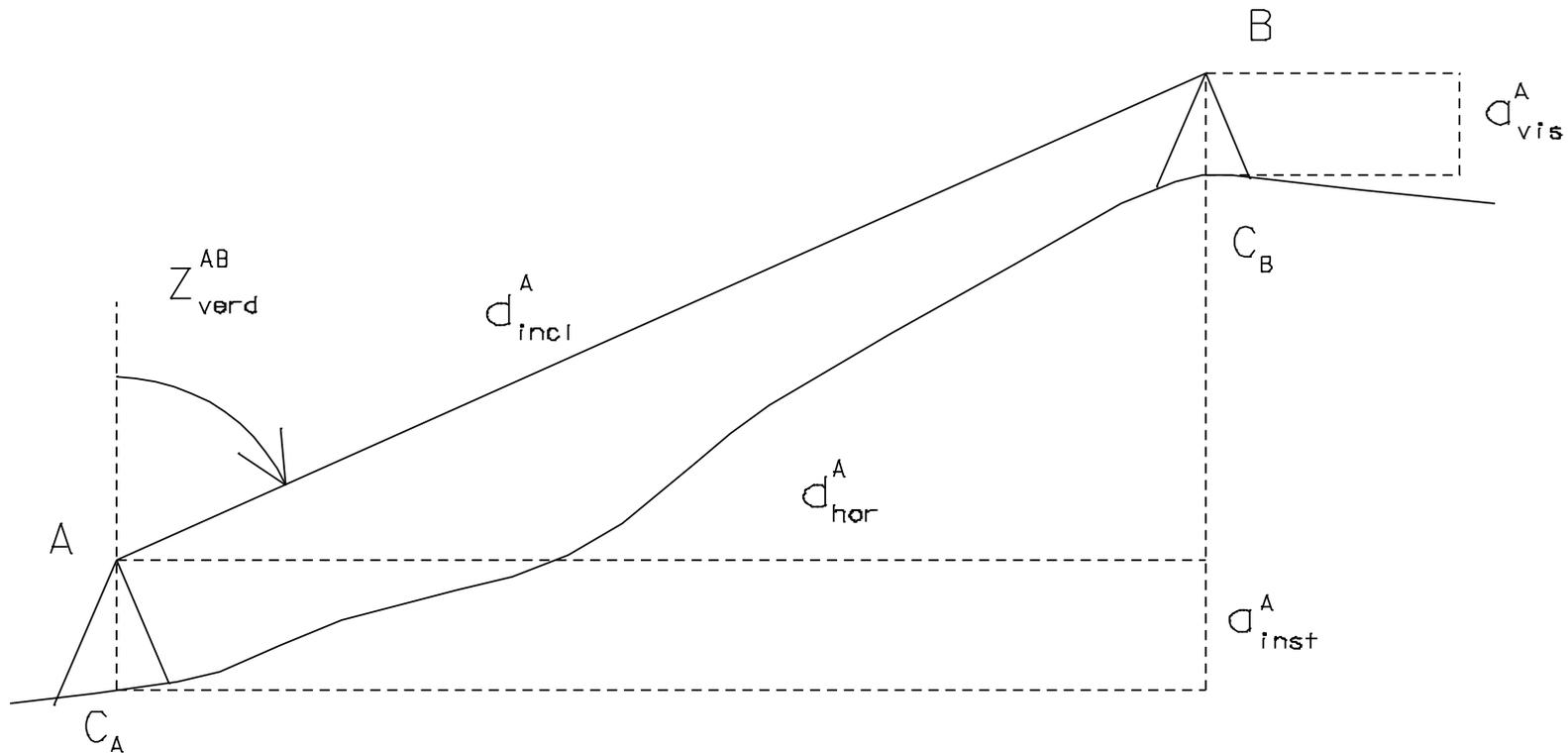
Este método baseia-se **na relação que existe entre a diferença de nível entre dois pontos e as respectivas pressões atmosféricas**, obtidas por barómetros ou altímetros (embora dependendo da temperatura e da latitude do ponto de observação, cada milímetro de variação da coluna de mercúrio corresponde aproximadamente a 11 metros de variação em altitude).

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O nivelamento **trigonométrico** baseia-se no transporte da cota através da **observação do ângulo zenital e distância inclinada** da visada.

O desnível resulta da resolução do triângulo formado pela visada, pela intersecção dos planos vertical e horizontal da estação, e pela vertical do ponto visado.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Da figura, sendo Z_{verd}^{AB} a distância zenital verdadeira (geométrica) correspondente à visada de A para B:

$$C_A + a_{inst}^A + d_{incl}^A \cos Z_{verd}^{AB} - a_{vis}^A = C_B \Rightarrow C_B - C_A = \Delta_{AB} = d_{incl}^A \cos Z_{verd}^{AB} + a_{inst}^A - a_{vis}^A = d_{hor}^A \cot Z_{verd}^{AB} + a_{inst}^A - a_{vis}^A$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Sentido de transporte de cota:

Directo – visada de A para B: $h_B = h_A + \Delta h_{AB}$

Inverso – visada de B para A: $h_B = h_A - \Delta h_{BA}$

Sendo $\Delta h_{BA} = D' \cos Z_{BA}$ (a menos das alturas instrumentais)

e $Z_{BA} = 180^\circ - Z_{AB}$

vem $\Delta h_{BA} = D' \cos Z_{BA} = -D' \cos Z_{AB}$

logo $\Delta h_{AB} = -\Delta h_{BA}$

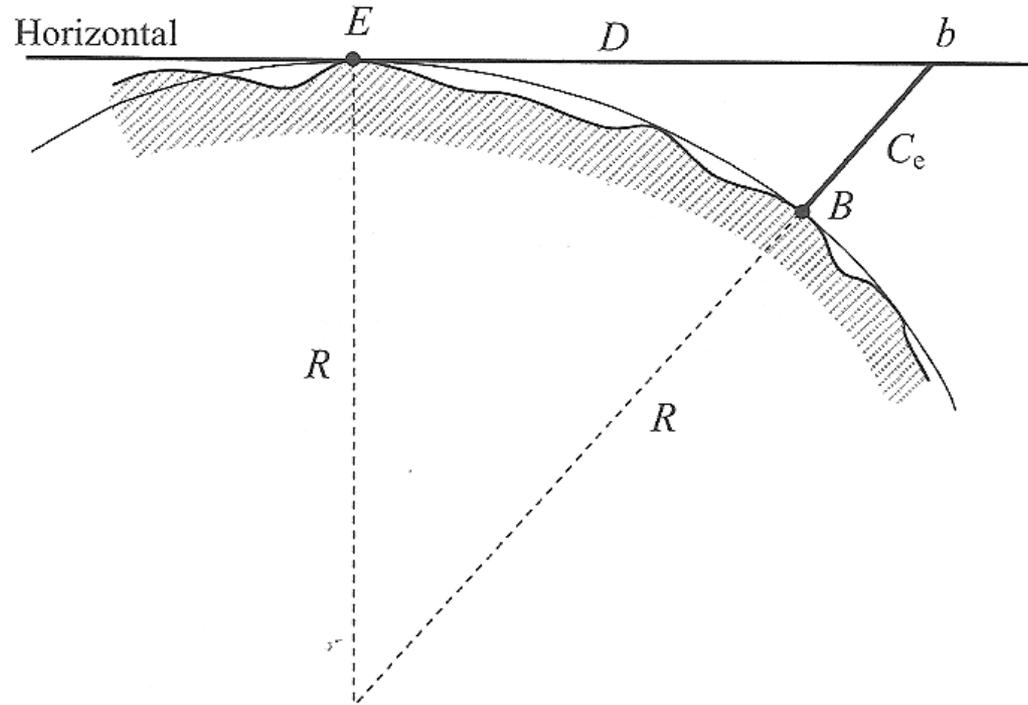
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

A equação deduzida para obter o desnível trigonométrico entre dois pontos A e B:

$$\Delta_{AB} = d_{incl}^A \cos Z_{verd}^{AB} + a_{inst}^A - a_{vis}^A = d_{hor}^A \cot Z_{verd}^{AB} + a_{inst}^A - a_{vis}^A$$

não inclui dois efeitos que é fundamental considerar: um deles é consequência da curvatura da Terra – **erro de esfericidade ou depressão do horizonte** – o outro é provocado pela influência das camadas atmosféricas na propagação dos raios ópticos – **erro de refração**.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Correcção de esfericidade ou depressão do horizonte: os pontos E e B têm a mesma cota; como a figura ilustra, quando do ponto estação E se efectua uma visada horizontal (tangente à superfície de nível em E) para o ponto B (uma vez que os 2 pontos têm a mesma cota), devido à influência da curvatura terrestre parece existir entre os dois pontos uma diferença de nível igual a C_e .

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O erro C_e pode ser calculado admitindo localmente a Terra como esférica por aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo OEb:

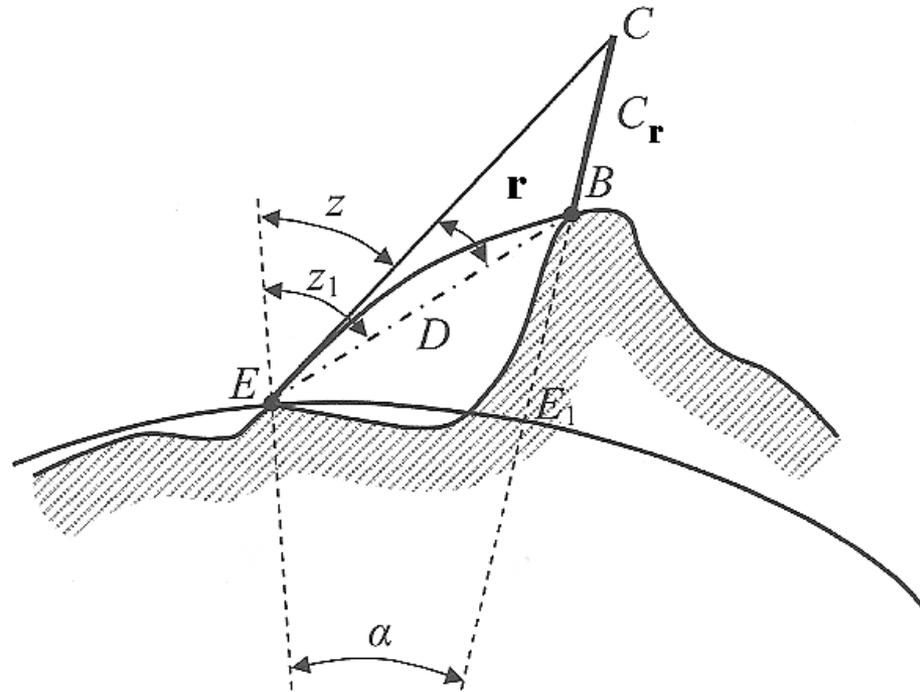
$$(R+C_e)^2=R^2+C_e^2+2RC_e=R^2+D^2, \text{ donde } D^2=C_e(C_e+2R) \text{ ou } C_e=D^2/(C_e+2R) \text{ ou } C_e \approx D^2/2R,$$

pois pode desprezar-se C_e comparado com R . Esta correção é sempre positiva já que o datum vertical se encontra abaixo do plano horizontal. No caso de a distância ser inclinada, a fórmula é mais extensa mas para distâncias da ordem de alguns quilómetros pode manter-se a mesma expressão.

Tomando $R=6370$ km e exprimindo a distância D em quilómetros, tem-se

$C_e(\text{m})=0.078D^2$. Por exemplo, para $D=500$ m, $C_e=0.0195$ m ≈ 2 cm.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



A refração atmosférica provoca nos raios luminosos que atravessam a atmosfera uma trajectória curva e por esta razão a posição onde os pontos são observados não correspondem à sua posição real: **o ponto B é observado numa posição aparente C, mais elevada que a real**, devendo assim ser aplicada uma correcção **negativa**.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Este facto deve-se à **variação de densidade das várias camadas que constituem a atmosfera**, que vai diminuindo (no caso mais geral) com a altitude, o que faz com que um raio luminoso vá sofrendo refrações sucessivas, definindo uma curva com concavidade voltada para o terreno (a visada que é definida é tangente a esta curva no ponto estação).

A partir de observações efectuadas por Biot, concluiu-se que o ângulo de refração r é proporcional ao ângulo α , de acordo com a relação **$r = n\alpha/2$** , em que **n é o índice de refração** que traduz o estado da atmosfera no instante de observação e **$\alpha = EE_1/R \approx D/R$** , sendo R o raio médio da Terra, suposta esférica e D a distância entre os pontos E e B (a simplificação $D = EE_1$ não introduz erro significativo), donde **$r = nD/2R$** .

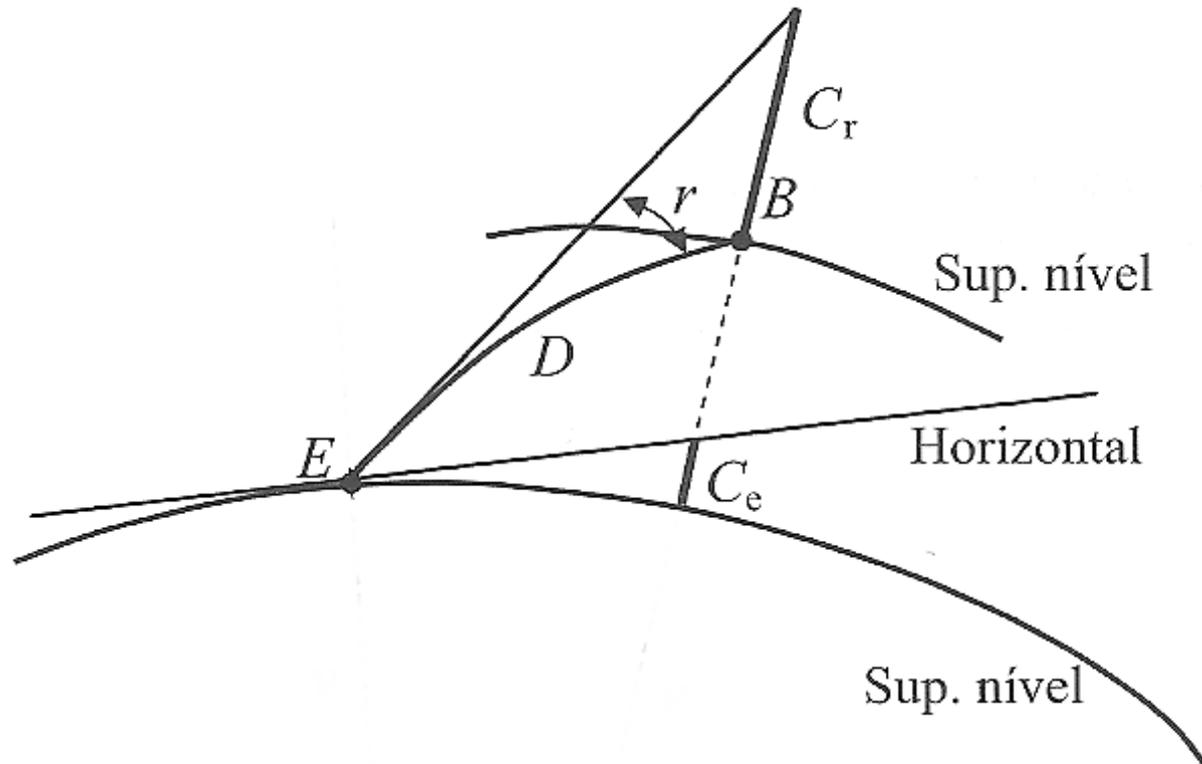
LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Por outro lado, como C_r tem também um valor pequeno, pode considerar-se $r = C_r/D$.

Comparando as duas expressões obtém-se:

$$nD/2R = C_r/D \Rightarrow C_r = nD^2/2R.$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



Efeito conjunto da esfericidade e da refração: no cálculo do desnível tem-se

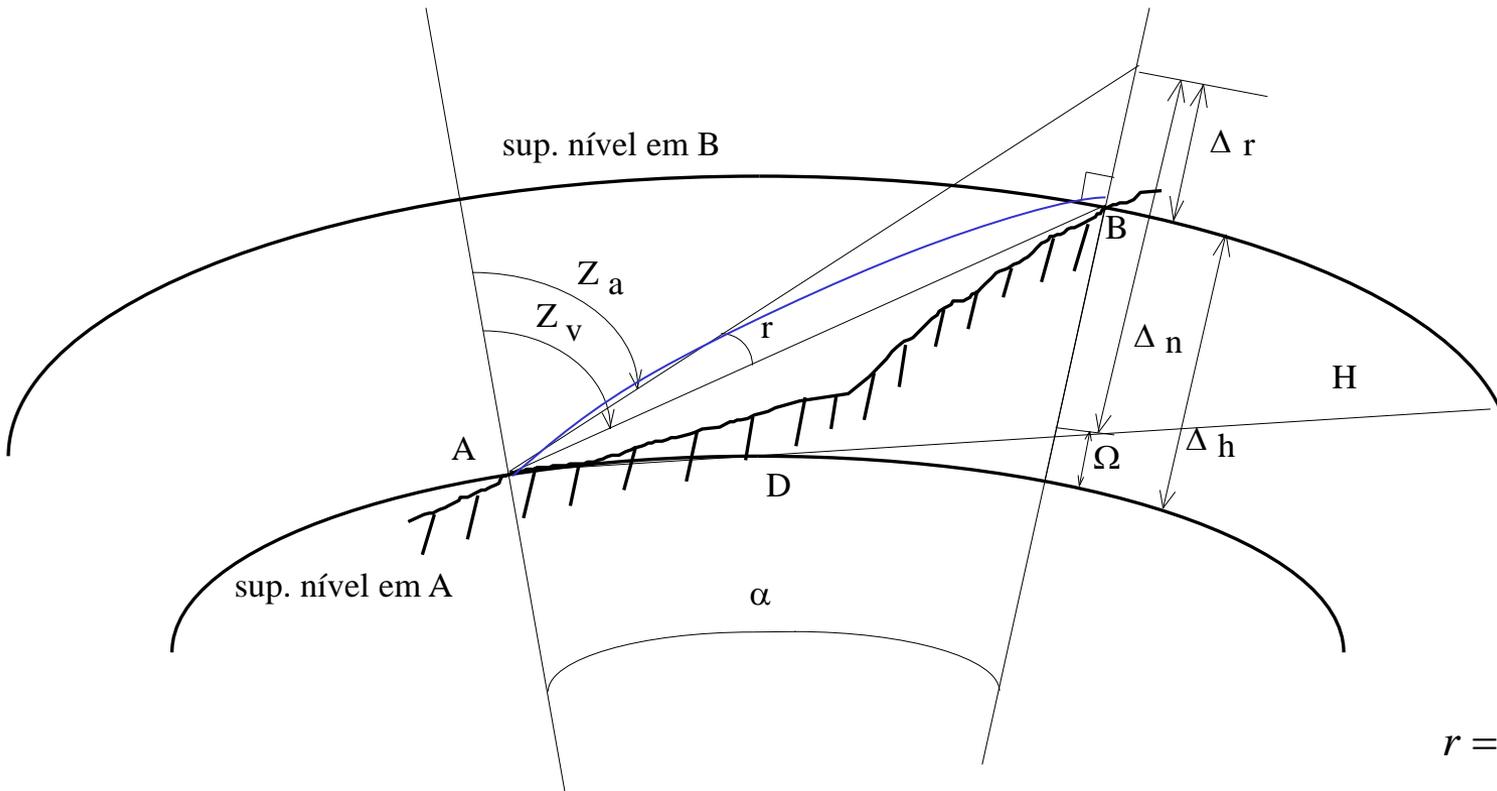
$$\Delta_{EB}^{\text{real}} = \Delta_{EB}^{\text{observado}} + C_e - C_r$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Juntando os 2 efeitos, tem-se $\Delta_{EB}^{\text{real}} = \Delta_{EB}^{\text{observado}} + D^2(1-n)/2R$.

O valor de n depende das características físicas instantâneas da atmosfera, tomando-se normalmente o valor médio $n=0.14$; assim, usando o valor $R=6370$ km obtém-se a expressão $K_m = D^2(1-n)/2R = 0.0000000675D_m^2$, sendo de notar que como as duas correcções têm sinais contrários, anulam-se parcialmente (como a correcção de esfericidade tem maior magnitude, é este erro que mais influencia o resultado final; contudo, é o erro de refração que origina maior incerteza no valor calculado uma vez que o seu efeito é inconstante, dependendo de factores locais.

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



$$r = k\alpha = 0,07 \frac{D}{R}$$

Δr – erro devido ao efeito da refração sobre o desnível $\Delta r = Dr = 0,07 \frac{D^2}{R}$

Ω – erro devido ao efeito da depressão do horizonte $\Omega = \frac{D^2}{2R}$

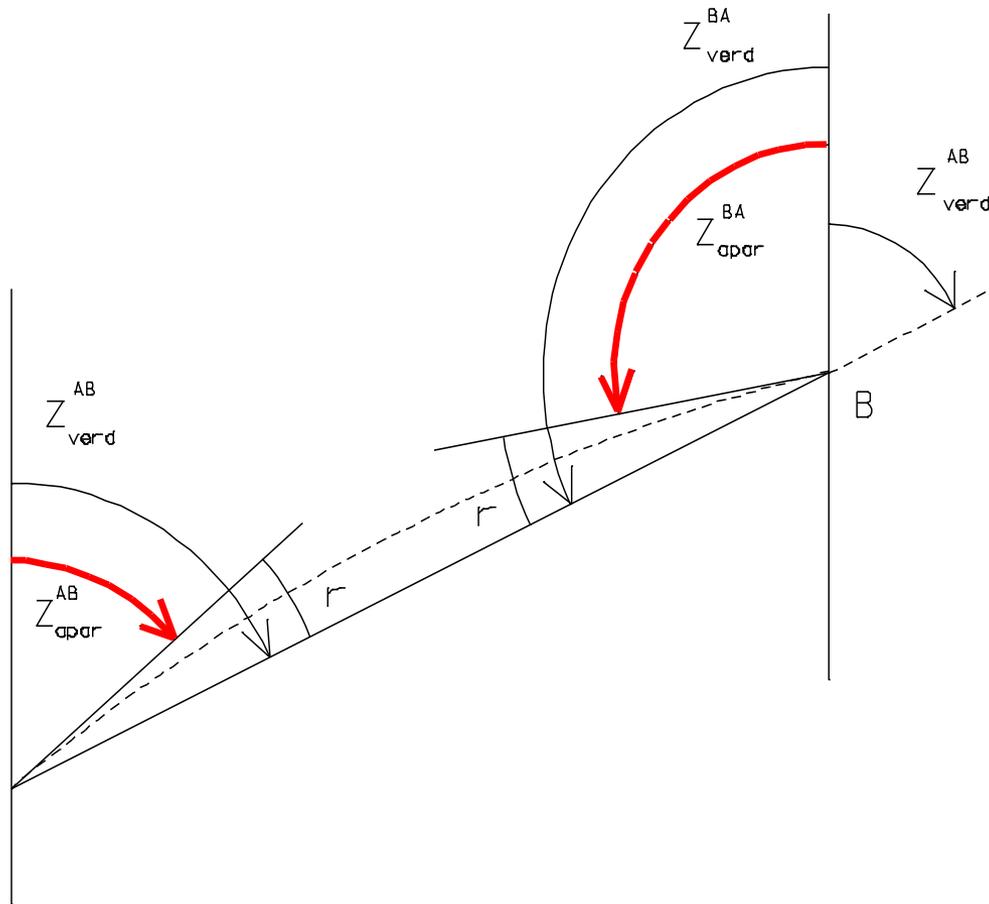
Efeito conjunto:
$$\Omega - \Delta r = \frac{D^2}{2R} - 0,07 \frac{D^2}{R} = 0,43 \frac{D^2}{R}$$

$$\Delta h = \Delta n + (\Omega - \Delta r)$$

$$\Delta h = \Delta n + 6,8E^{-8} D^2$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

A visada de A para B está afectada pela refração, pelo que a distância zenital **efectivamente medida** é a distância zenital aparente Z_{apar}^{AB}



$$Z_{\text{verd}}^{AB} = Z_{\text{apar}}^{AB} + r$$

$$Z_{\text{verd}}^{BA} = Z_{\text{apar}}^{BA} + r$$

$$Z_{\text{verd}}^{BA} = 180^\circ - Z_{\text{verd}}^{AB} \Rightarrow$$

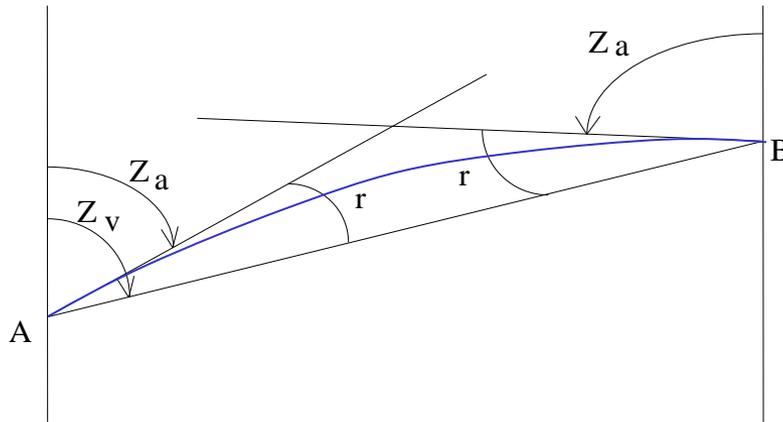
$$Z_{\text{verd}}^{AB} = 180^\circ - Z_{\text{verd}}^{BA}$$

$$Z_{\text{verd}}^{AB} = 180^\circ - (Z_{\text{apar}}^{BA} + r)$$

$$Z_{\text{verd}}^{AB} = 180^\circ - Z_{\text{apar}}^{BA} + Z_{\text{apar}}^{AB} - Z_{\text{verd}}^{AB} \Rightarrow$$

$$Z_{\text{verd}}^{AB} = \frac{Z_{\text{apar}}^{AB} + 180^\circ - Z_{\text{apar}}^{BA}}{2}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS



A observação de zenitais recíprocas pode **atenuar** o efeito de refração

O efeito de depressão do horizonte é completamente anulado com zenitais recíprocas

$$\begin{aligned} Z_{AB} &= \frac{z_{aA} + (180^\circ - z_{aB})}{2} = \\ &= \frac{(z_{vA} - r) + (180^\circ - (z_{vB} - r))}{2} \end{aligned}$$

Assumindo que os valores de (P,T,H) são iguais em A e B, os ângulos de refração são também iguais.

$$Z_{AB} = \frac{z_{vA} + (180^\circ - z_{vB})}{2}$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

A observação de zenitais recíprocas e simultâneas reduz o efeito da refração, porque as condições atmosféricas dos pontos A e B são idênticas.

Pode-se dizer que esse efeito é quase completamente eliminado.

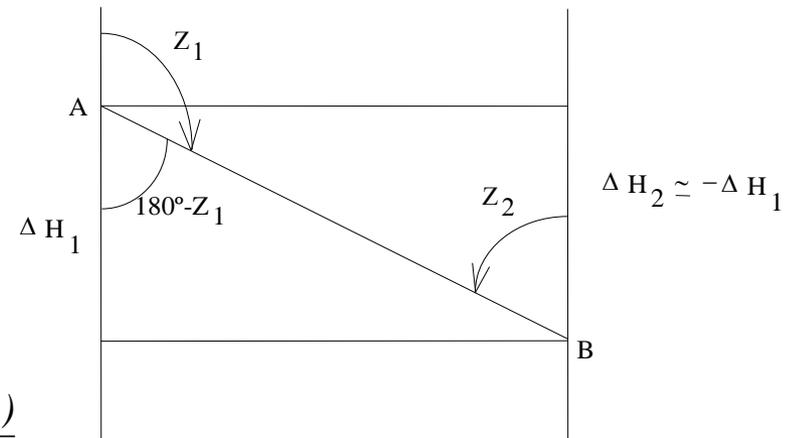
$$H_B = H_A + \Delta H_1 \quad H_B = H_A + \frac{\Delta H_1 - \Delta H_2}{2}$$

$$H_B = H_A - \Delta H_2$$

$$\Delta H_1 = D_1 \cos Z_1 + h_I^1 - h_A^2 + \varepsilon_1$$

$$\Delta H_2 = D_2 \cos Z_2 + h_I^2 - h_A^1 + \varepsilon_2$$

$$H_B = H_A + \frac{D_1 \cos Z_1 - D_2 \cos Z_2 + (h_I^1 - h_I^2) - (h_A^2 - h_A^1)}{2}$$



$$H_B = H_A + \frac{\bar{D}(\cos Z_1 - \cos Z_2)}{2} + h_{TB}^1 - h_{TB}^2$$

LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

O valor do coeficiente de refração $K=0.07$ é válido para as horas de maior calor, quando se verifica o máximo do gradiente vertical da temperatura. Por isso, a observação de zenitais deve ser feita à hora de maior calor, apesar da instabilidade da atmosfera causar erros de pontaria.

As observações de ângulos azimutais, pelo contrário, devem ser feitas sempre nas horas de menos calor, quando a atmosfera se apresenta estável; e de preferência pela manhã pois é quando a atmosfera está mais límpida e transparente.

Como a leitura de zenitais obriga à calagem da bolha zenital, sendo as observações feitas nas horas de calor deve de haver o cuidado de proteger a nivela para garantir a sua estabilidade. Esta precaução não é necessária para os instrumentos munidos de compensadores automáticos.