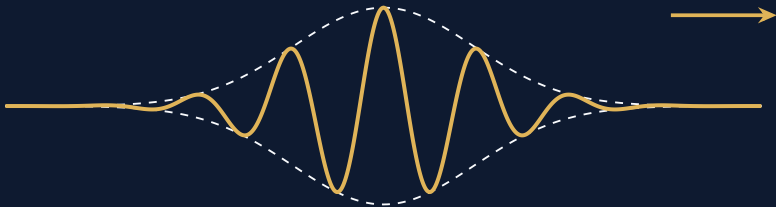


Pacotes de onda e análise de Fourier

Espectro, dispersão e velocidade de grupo



Três perguntas

- Porque é que um impulso muito curto contém, obrigatoriamente, muitas frequências?
- Num grupo de ondas no mar, porque é que as cristas parecem nascer na traseira do grupo e desaparecer à frente?
- Uma tempestade no alto mar, a 1500 km da costa, gera ondas no oceano com muitos comprimentos de onda. Quais chegam primeiro à praia?

ANÁLISE DE FOURIER

Para que serve a análise de Fourier

As ondas reais começam e acabam: um estalido, um batimento cardíaco, um impulso de ultrassons, a ondulação de uma tempestade.

- **Propagar ondas quaisquer.** Decompõe-se o sinal em ondas harmónicas, trata-se cada uma, que é fácil, e volta-se a somar. Funciona porque a equação da onda é linear.
- **Saber que frequências um sinal contém.** É o que decide que aparelho o regista sem o deformar, que largura de banda precisa uma comunicação, que ressonâncias um sinal vai excitar.

ANÁLISE DE FOURIER

Duração, frequência e dispersão

- **Relacionar duração e frequência.** Porque é que um estalido não tem nota e uma nota longa tem?
- **Perceber a dispersão.** Se as frequências viajam a velocidades diferentes, as componentes desfasam-se e o sinal deforma-se: pacotes que alargam, ondulação que chega ordenada por período.

As ondas harmónicas são as peças simples; a análise de Fourier diz que peças usar para construir qualquer onda real.

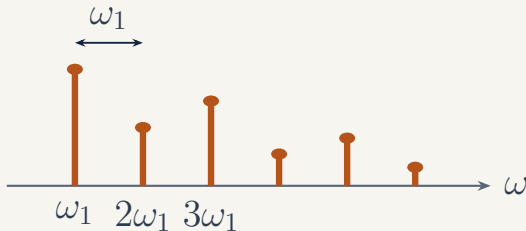
ANÁLISE DE FOURIER

Série de Fourier

Um sinal que se repete com período T é uma soma de sinusóides, as **harmônicas**:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)]$$

- Frequências $\omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1, \dots$, com $\omega_1 = 2\pi/T$: riscas igualmente espaçadas.
- Só estas se repetem ao fim de T .



ANÁLISE DE FOURIER

Harmónicas diferentes não se misturam

O produto de duas harmónicas, em média num período:

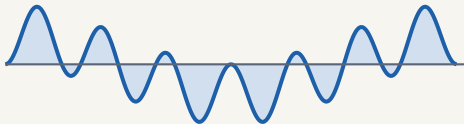
$$\frac{2}{T} \int_0^T \sin(n\omega_1 t) \sin(m\omega_1 t) dt$$

- vale 1 se $n = m$;
- vale 0 se $n \neq m$.

$n = m$: média positiva



$n \neq m$: média nula



ANÁLISE DE FOURIER

Como se calculam os coeficientes

Multiplica-se f por uma harmónica e faz-se a média: de todos os termos da série, só sobrevive o dessa harmónica.

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_1 t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega_1 t) dt$$

- É um detector sintonizado: a média só é grande se f contiver aquela frequência.
- É o que faz um receptor de rádio ao sintonizar uma estação.

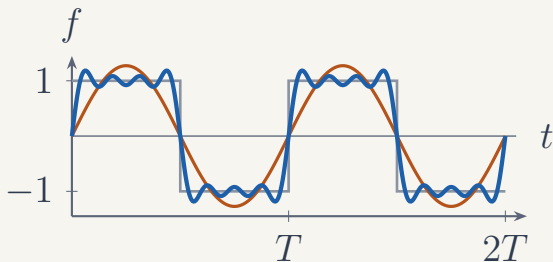
ANÁLISE DE FOURIER

Exemplo: a onda quadrada

$f = +1$ numa metade do período e -1 na outra: só há senos ímpares.

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t + \dots \right]$$

- Uma harmónica (laranja): uma sinusóide.
- Quatro (azul): já há cantos.
- Arestas vivas exigem harmónicas altas.



ANÁLISE DE FOURIER

Forma complexa da série

Com $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, cada par a_n, b_n junta-se num número complexo c_n :

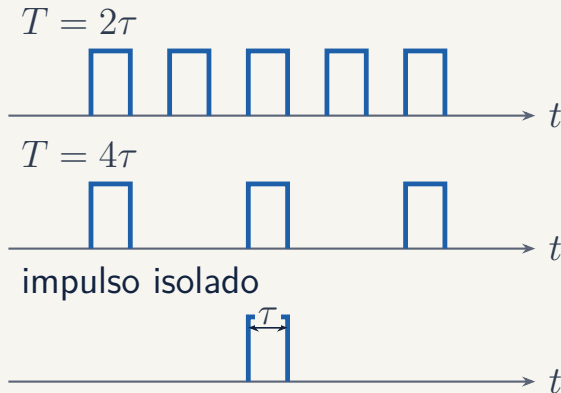
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-in\omega_1 t}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{in\omega_1 t} dt$$

- $|c_n|$: amplitude da harmónica n . $\arg c_n$: a sua fase.
- O sinal do expoente segue a convenção das ondas $e^{i(kx - \omega t)}$.

ANÁLISE DE FOURIER

Sinais que não se repetem

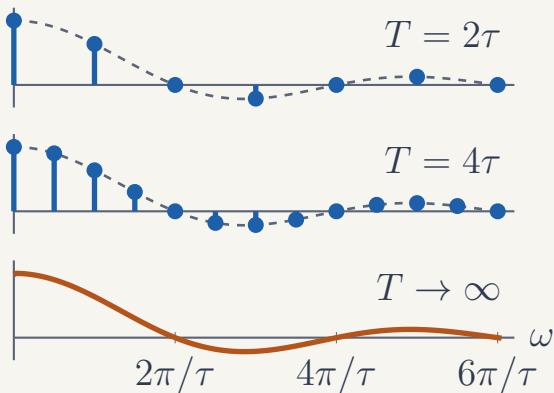
- A série só serve para sinais periódicos.
- Um estalido, um batimento ou um impulso de ultrassons começam e acabam.
- Truque: repetir o impulso de T em T e depois afastar as cópias, $T \rightarrow \infty$.



ANÁLISE DE FOURIER

As riscas aproximam-se

- Um sinal de período T só tem as frequências $\omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1, \dots$, com $\omega_1 = 2\pi/T$.
- Quanto maior T , mais juntas as riscas.
- As alturas Tc_n seguem sempre a mesma curva, fixada pela forma do impulso.



ANÁLISE DE FOURIER

Os coeficientes são amostras de uma curva

Para o impulso isolado, define-se

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

Para o impulso repetido, o integral de c_n só apanha uma cópia, logo

$$c_n = \frac{1}{T} \int f(t) e^{in\omega_1 t} dt = \frac{\tilde{f}(n\omega_1)}{T}$$

T só decide onde se amostra a curva: $\omega = n\omega_1$.

ANÁLISE DE FOURIER

Transformada de Fourier

Com $1/T = \Delta\omega/2\pi$, a série fica $f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_n \tilde{f}(\omega_n) e^{-i\omega_n t} \Delta\omega$. Com $T \rightarrow \infty$, passa a integral:

Transformada

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

Transformada inversa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$\tilde{f}(\omega)$ diz quanto de cada frequência o sinal contém: $|\tilde{f}|$ é a amplitude e $\arg \tilde{f}$ a fase.

ANÁLISE DE FOURIER

Um sinal e o seu espectro

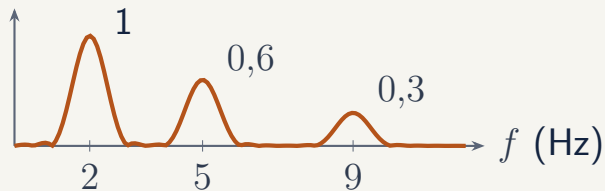
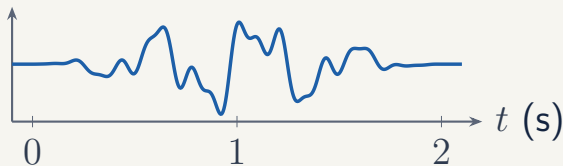
Três oscilações, durante 2 s:

2 Hz amplitude 1

5 Hz amplitude 0,6

9 Hz amplitude 0,3

No espectro lêem-se directamente: três picos, com as frequências e as alturas das componentes.



ANÁLISE DE FOURIER

Propriedades

Linearidade

$$\mathcal{F}\{af + bg\} = a\tilde{f} + b\tilde{g}$$

Atraso

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = e^{i\omega t_0} \tilde{f}(\omega) \quad \text{só muda a fase}$$

Sinal real

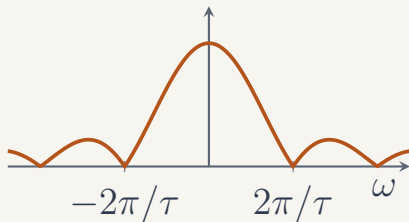
$$\tilde{f}(-\omega) = \tilde{f}(\omega)^* \quad \text{bastam as frequências positivas}$$

ANÁLISE DE FOURIER

Dois exemplos

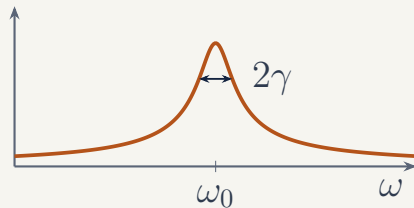
Impulso rectangular

$$|\tilde{f}(\omega)| = \tau \left| \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \right|$$



Oscilação amortecida

$$|\tilde{f}(\omega)| \approx \frac{A/2}{\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}}$$

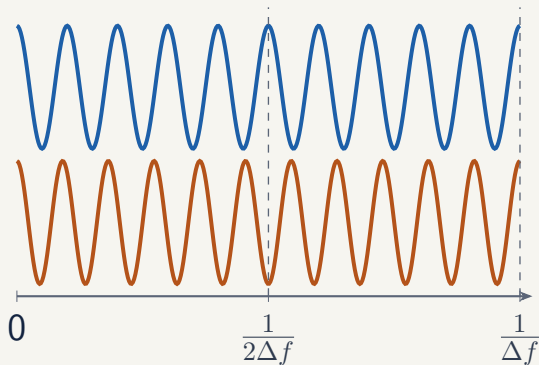


DURAÇÃO E FREQUÊNCIA

Distinguir duas frequências leva tempo

Duas oscilações, f e $f + \Delta f$,
começam em fase. O
desfasamento cresce como
 $2\pi \Delta f t$.

Só ao fim de um tempo
 $\sim 1/\Delta f$ se nota que são
diferentes.



$$\Delta f \Delta t \approx 1$$

DURAÇÃO E FREQUÊNCIA

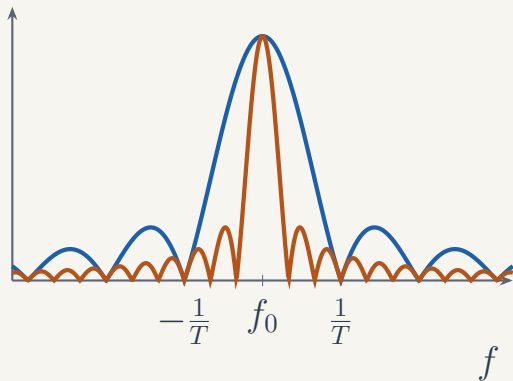
Uma nota que dura pouco

Nota f_0 de duração T , testada com $f_0 + \delta$:

$$|\tilde{f}| \propto \left| \frac{\sin(\pi\delta T)}{\pi\delta} \right|$$

Se $\delta T = 1$, o desacerto dá uma volta e o teste anula-se:

$$\Delta f \approx 1/T$$



Azul: T ; laranja: $3T$.

DURAÇÃO E FREQUÊNCIA

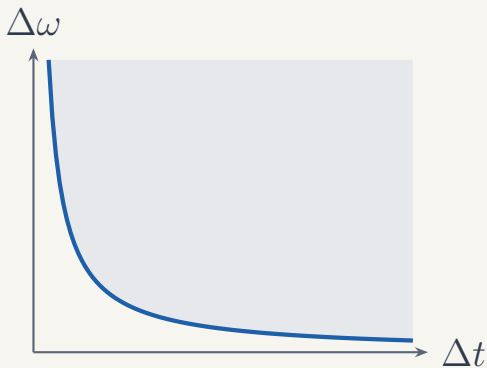
Duração e largura espectral

O caso mais limpo: uma gaussiana tem espectro gaussiano.

$$e^{-t^2/2\Delta t^2} \longrightarrow e^{-\omega^2\Delta t^2/2}$$

$$\Delta t \Delta \omega = 1$$

Qualquer outra forma dá mais:
 $\Delta t \Delta \omega \gtrsim 1$.

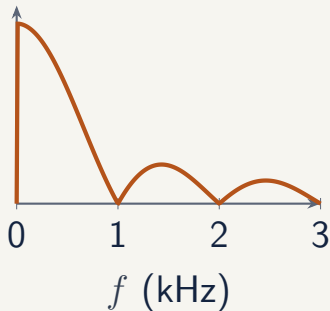


Só a zona sombreada é possível.

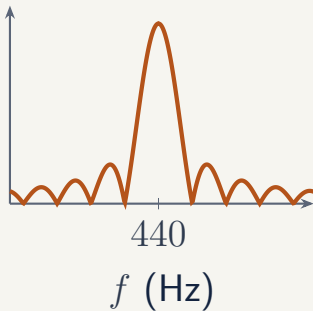
DURAÇÃO E FREQUÊNCIA

Estalido, nota curta e nota longa

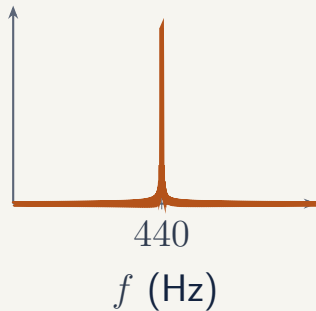
estalido, 1 ms



nota, 10 ms



nota, 0,5 s



O estalido não tem pico; as notas têm, largo ou estreito.

DURAÇÃO E FREQUÊNCIA

Quando é que um som tem nota

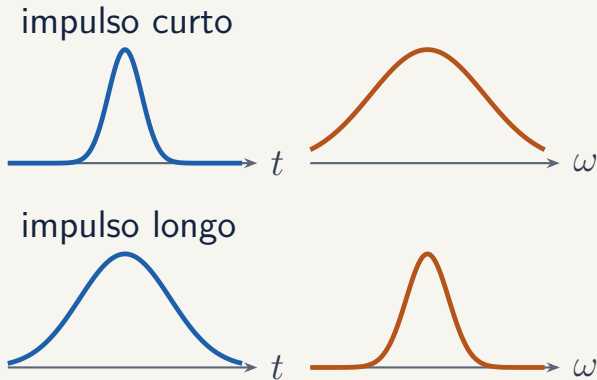
Há nota quando um pico se destaca: $\Delta f/f_0 \ll 1$, ou seja, $\Delta t \gg 1/f_0$ (muitos ciclos).

Sinal	Δf	$\Delta f/f_0$	ouve-se
nota de 0,5 s	2 Hz	0,5 %	nota nítida
nota de 10 ms	100 Hz	23 %	altura vaga
estalido de 1 ms	1 kHz	sem pico	nenhuma nota

RESPOSTA

Um impulso curto tem muitas frequências

- Fora do impulso, as componentes têm de se anular.
- Frequências próximas demoram a desfasar-se.
- Anular depressa exige $\Delta\omega \gtrsim 1/\Delta t$.



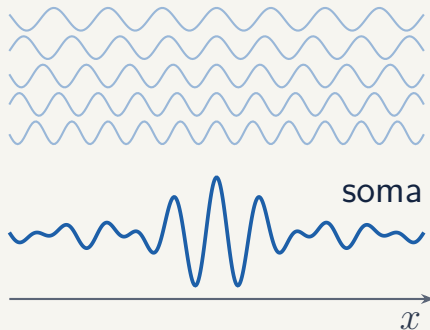
PACOTES DE ONDA

Um pacote de ondas

Somam-se ondas harmônicas com k perto de k_0 :

$$y(x,t) = \text{Re} \int A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk$$

- No centro estão em fase e somam-se.
- Longe do centro, anulam-se.



PACOTES DE ONDA

O mesmo no espaço

Trocando t por x e ω por k , o raciocínio repete-se.

Um pacote de comprimento Δx precisa de números de onda espalhados por

$$\Delta k \gtrsim \frac{1}{\Delta x}$$

Uma onda com k exactamente definido estende-se por todo o espaço; um pacote localizado tem sempre vários k .

PACOTES DE ONDA

Passagem para a mecânica quântica

Uma partícula é descrita por um pacote de ondas, com

$$p = \hbar k, \quad E = \hbar \omega$$

Multiplicando as duas relações por $\hbar$:

$$\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar, \quad \Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$$

É a relação de incerteza de Heisenberg. Não vem de medições imperfeitas: é a mesma propriedade que impede um estalido de ter nota.

DISPERSÃO

Relação de dispersão

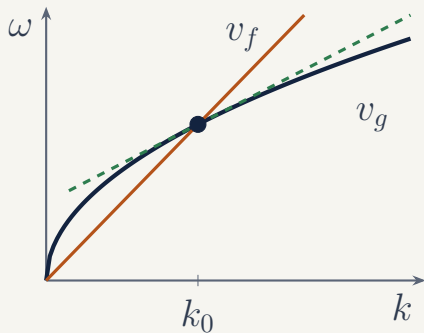
Relação entre ω e k : $\omega = \omega(k)$.

Meio não dispersivo

$\omega = vk$: as componentes andam juntas.

Meio dispersivo

$\omega(k)$ não é linear: o pacote muda de forma.



v_f : recta pela origem.

v_g : tangente.

DISPERSÃO

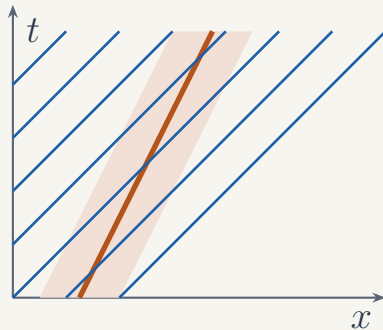
Velocidade de fase e velocidade de grupo

$$v_f = \frac{\omega}{k}$$

Velocidade das cristas.

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}$$

Velocidade da envolvente e da energia.



Envolvente e cristas, com

$$v_g = v_f/2.$$

PACOTES DE ONDA

Porque é que a envolvente anda com v_g

Para um espectro estreito em torno de k_0 , $\omega(k) \approx \omega_0 + v_g (k - k_0)$.
Então:

$$kx - \omega t \approx (k_0 x - \omega_0 t) + (k - k_0)(x - v_g t)$$

O primeiro termo não depende de k e sai do integral:

$$y(x,t) \approx \text{Re} \left\{ e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \underbrace{\int A(k) e^{i(k - k_0)(x - v_g t)} dk}_{a(x - v_g t)} \right\}$$

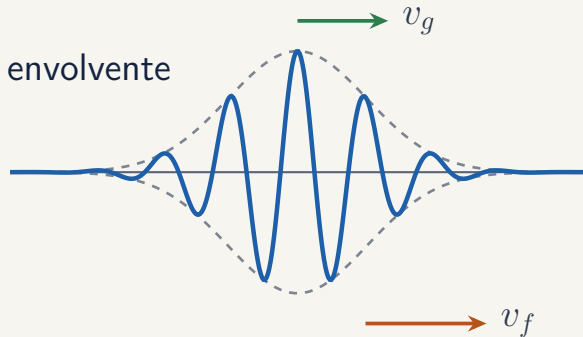
PACOTES DE ONDA

Envolvente e portadora

Para a real:

$$y \approx a(x - v_g t) \cos(k_0 x - \omega_0 t)$$

- A envolvente a desloca-se com v_g .
- As cristas da portadora deslocam-se com $v_f = \omega_0/k_0$.



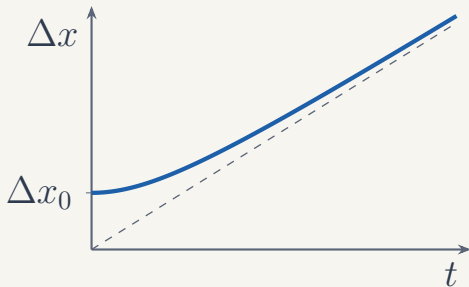
DISPERSÃO

O pacote alarga-se

Com o termo $\frac{1}{2}\omega''(k - k_0)^2$:

$$\Delta x(t) = \Delta x_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\omega'' t}{\Delta x_0^2} \right)^2}$$

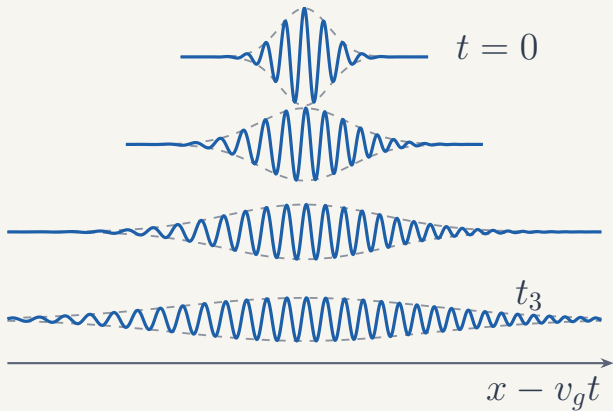
- Mais estreito, alarga mais depressa.
- O vidro é dispersivo: a luz alarga-se numa fibra óptica.



DISPERSÃO

Evolução num meio dispersivo

- O pacote alarga-se e a amplitude diminui.
- $|A(k)|$ não muda: as componentes apenas se desfasam.
- A energia total conserva-se.



DISPERSÃO

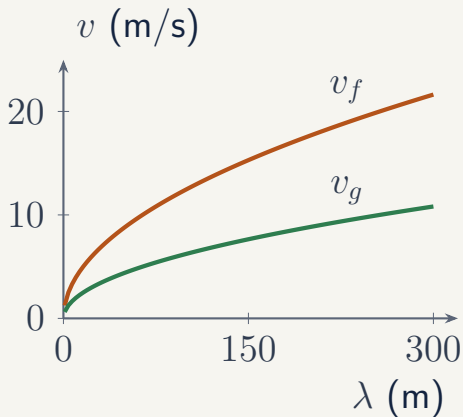
Ondas em águas profundas

Para profundidade muito maior do que λ :

$$\omega^2 = g k$$

$$v_g = \frac{1}{2} v_f$$

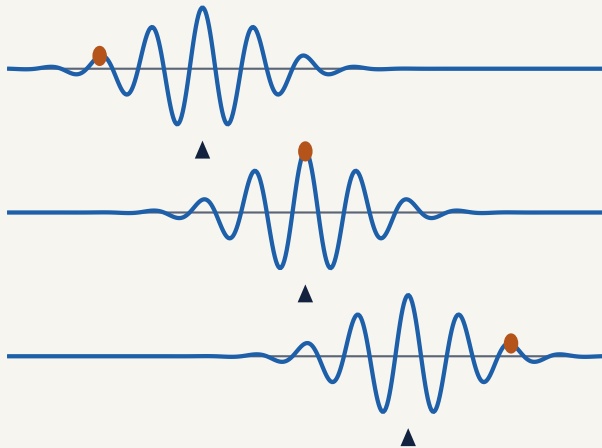
Tanto v_f como v_g crescem com λ .



RESPOSTA

As cristas num grupo de ondas

- No mar profundo, $v_f = 2v_g$: a crista (laranja) avança mais depressa do que o centro do grupo (triângulo).
- Entra pela traseira, cresce no centro e desaparece à frente.



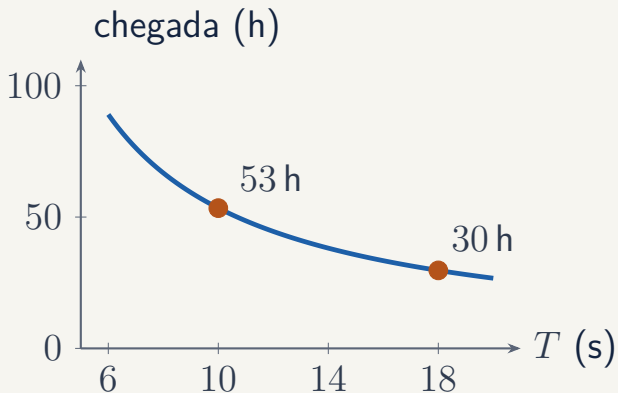
RESPOSTA

A ondulação de uma tempestade distante

Com $\omega^2 = gk$ e $T = 2\pi/\omega$:

$$v_g = \frac{g}{2\omega} = \frac{gT}{4\pi}$$

- A 1500 km, chegam primeiro as ondas longas, de período grande.
- As curtas chegam um dia depois.



ENUNCIADO

Exercício resolvido I

Uma tempestade no Atlântico gera ondulação com $\lambda = 156 \text{ m}$, em águas profundas ($g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$). A costa fica a 1500 km.

- (a) Calcule o período das ondas.
- (b) Calcule v_f e v_g .
- (c) Quanto tempo demora a ondulação a chegar à costa?
- (d) Noutra tempestade, uma bóia regista ondas de 14 s e, 15 h depois, ondas de 10 s. A que distância estava a tempestade?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(a) $k = 2\pi/\lambda = 0,0403 \text{ rad m}^{-1}$, $\omega = \sqrt{gk} = 0,628 \text{ rad s}^{-1}$

$$T = 2\pi/\omega = 10,0 \text{ s}$$

(b) $v_f = \omega/k = 15,6 \text{ m s}^{-1}$, $v_g = v_f/2 = 7,8 \text{ m s}^{-1}$

(c) A energia chega com o grupo:

$$t = \frac{d}{v_g} = \frac{1,5 \times 10^6}{7,8} = 1,9 \times 10^5 \text{ s} \approx 53 \text{ h}$$

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(d) Com $v_g = gT/4\pi$: $v_{14} = 10,9 \text{ m s}^{-1}$ e $v_{10} = 7,80 \text{ m s}^{-1}$.

As duas partiram juntas; a diferença de chegada é

$$\Delta t = d \left(\frac{1}{v_{10}} - \frac{1}{v_{14}} \right)$$

$$d = \frac{5,4 \times 10^4 \text{ s}}{0,128 - 0,0916 \text{ s m}^{-1}} = 1,5 \times 10^6 \text{ m} = 1500 \text{ km}$$

ENUNCIADO

Exercício resolvido II

Um sistema de comunicações transmite impulsos gaussianos com duração $\Delta t = 1,0 \text{ ns}$.

- (a) Calcule $\Delta\omega$ e Δf .
- (b) E se a duração passar a metade?
- (c) Onde fica o primeiro zero para um impulso rectangular de $1,0 \text{ ns}$?
- (d) Com $\Delta f = 1,0 \text{ GHz}$ e separação $4\Delta t$, quantos impulsos por segundo?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido II

- (a) $\Delta\omega = 1/\Delta t = 1,0 \times 10^9 \text{ rad s}^{-1}$, $\Delta f = \Delta\omega/2\pi = 159 \text{ MHz}$
- (b) $\Delta\omega \Delta t = 1$: a largura de banda duplica.
- (c) O primeiro zero está em $\omega\tau/2 = \pi$, ou seja, $f = 1/\tau = 1,0 \text{ GHz}$.
- (d) $\Delta\omega = 2\pi\Delta f = 6,3 \times 10^9 \text{ rad s}^{-1}$, logo $\Delta t = 0,16 \text{ ns}$:

$$\frac{1}{4\Delta t} = \frac{1}{0,64 \text{ ns}} = 1,6 \times 10^9 \text{ impulsos por segundo}$$

ENUNCIADO

Exercício resolvido III

Um electrocardiograma regista 72 batimentos por minuto. O complexo QRS de cada batimento é modelado por um impulso gaussiano com $\Delta t = 20$ ms.

- (a) Qual é a frequência fundamental do sinal?
- (b) Estime a largura espectral Δf do complexo QRS.
- (c) Quantas harmónicas são precisas para ir até $3 \Delta f$?
- (d) Compare as amplitudes das componentes de 25 Hz e de 1,2 Hz.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido III

(a) $f_1 = 72/60 \text{ s} = 1,2 \text{ Hz}$: o espectro só tem $n f_1$.

(b) $\Delta\omega = 1/\Delta t = 50 \text{ rad s}^{-1}$, $\Delta f = \Delta\omega/2\pi = 8,0 \text{ Hz}$

(c)

$$n = \frac{3 \Delta f}{f_1} = \frac{24}{1,2} = 20 \text{ harmónicas}$$

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido III

(d) As amplitudes seguem $e^{-\omega^2 \Delta t^2 / 2}$:

- a 1,2 Hz: $\omega \Delta t = 0,15$, $e^{-0,011} = 0,99$
- a 25 Hz: $\omega \Delta t = 3,14$, $e^{-4,93} = 0,0072$

$$\frac{A_{25}}{A_{1,2}} = 0,0073 \approx 0,7 \%$$

Acima de 25 Hz quase nada resta: basta registrar até aí.