Exame de *Introdução à Teoria dos Conjuntos* (2h30m)

Fernando Ferreira (19/1/16)

1. Descreva a construção dos números reais positivos através de cortes (inferiores) de Dedekind de $\mathbb{Q}^+$. Dê as definições relevantes de $<$, 1, $+$ e $\cdot$ de $\mathbb{R}^+$. Não necessita de demonstrar nada a não ser que a ordem nos reais positivos é uma ordem total estrita em que vale o princípio do supremo.
2. Mostre que se $A =_c B$ então $\mathcal{P}(A) =_c \mathcal{P}(B)$. (Dada uma bijeção entre A e B defina a partir desta uma bijeção entre $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B)$ e mostre que é, de facto, bijeção.)
3. Seja B um conjunto não vazio e A um conjunto qualquer. Mostre que $B \leq_c A$ se, e somente se, existe uma sobrejeção de A para B (explicite uma eventual aplicação do axioma da escolha).
4. Seja A um conjunto infinito.
   (a) Mostre que para cada número natural n o conjunto dos subconjuntos de A com no máximo n elementos tem cardinalidade inferior ou igual à cardinalidade de A.
   (b) Mostre que $\mathcal{P}_{fin}(A) =_c A$.
   (c) Mostre que a cardinalidade de A é estritamente inferior a $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}_{fin}(A)$.
5. Seja $Q(y)$ uma propriedade de conjuntos e a um conjunto fixo. Mostre em Z que o conjunto $\{a \setminus y : Q(y)\}$ existe.
6. Mostre que a classe de Russell não é um conjunto.
7. Seja $(A, <)$ uma ordem total estrita. Mostre que $(A, <)$ é uma boa-ordem se, e somente se, não existem funções $f : \omega \to A$ estritamente decrescentes.
8. Ordene, do mais pequeno ao maior, os ordinais $\omega^2 + 1$, 2^ω, ω^2, $2^\omega + 1$, $5^\omega + 1$, $3 + \omega$, $\omega \cdot 2$, ω_1 e $\omega + \omega_1$. Todas as operações são operações da aritmética ordinal. Tenha em atenção que podem haver ordinais iguais. (Não necessita de justificar.)
9. Sejam $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ e $(\beta_n)_{n\in\omega}$ sucessões de ordinais. Será que se tem sempre $\sup_n \alpha_n + \sup_n \beta_n = \sup(\alpha_n + \beta_n)$? No caso afirmativo apresente uma demonstração. No caso negativo, dê um contra-exemplo.
10. Neste exercício, β é um ordinal limite. Diz-se que uma função $f : \alpha \mapsto \beta$ *aplica cofinalmente* o ordinal α no ordinal β se $\mathrm{im} f$ é ilimitada em β. A *cofinalidade* de β, denotada por $\mathrm{cf}(\beta)$, é o mais pequeno ordinal α tal que existe uma função que aplica cofinalmente α em β.
    (a) Mostre que $\mathrm{cf}(\beta)$ está bem definida e que $\mathrm{cf}(\beta) \leq \beta$.
    (b) Mostre que $\mathrm{cf}(\beta)$ é um número cardinal.
    (c) Seja $f : \mathrm{cf}(\beta) \mapsto \beta$ uma função que aplica $\mathrm{cf}(\beta)$ em β (tal função existe por definição). Considere a operação G que vai de $\mathrm{cf}(\beta)$ para a classe *Ord* dos ordinais definida (por recursão transfinita) da seguinte maneira: $G(\eta) = \max(f(\eta), \sup\{G(\rho) + 1 : \rho < \eta\})$.
        i. Mostre que $G(\eta) < \beta$ para todo $\eta < \mathrm{cf}(\beta)$.
        ii. Mostre que G é estritamente crescente.