Exercícios de Cálculo Infinitesimal II / Cálculo II

Capítulo 2

1. Considere a função $r(t) = \left(\dfrac{\log(1+t)}{t}, \dfrac{\sqrt{t+7}-\sqrt{7}}{t}, \dfrac{\sin(2t)}{t}\right)$.

   a) Determine o seu domínio.

   b) Calcule $\lim\limits_{t\to 0} r(t)$ e diga, justificando, se é possível prolongar por continuidade a função $r(t)$ ao ponto $t = 0$.

2. Sendo $r(t) = \left(\dfrac{t^2-1}{t+1}, t\cos(t+1), \dfrac{4}{1+4t^2}\right)$, para $t \neq -1$, calcule

   a) $\lim\limits_{t\to -1} r(t)$;

   b) $r'(t)$;

   c) uma equação da recta tangente à curva definida por $r(t)$ no ponto $(-1, 0, 4)$;

   d) $\displaystyle\int_0^1 r(t)\,dt$.

3. Considere a função $r(t) = (\cos t, \sin t, 3t)$ e seja C a curva descrita por $r(t)$ para $t \in \mathbb{R}$.

   a) Determine o ponto P da curva C que fica mais próximo da origem.

   b) Escreva uma equação da recta s, tangente a C no ponto P.

   c) Determine a intersecção da recta s com o plano $x + 3y + z = 2$.

   d) Calcule $\displaystyle\int_0^\pi r(t)\,dt$.

4. Parametrize as seguintes curvas:

   a) semi-recta com origem em $(1, 2)$ que contém o ponto $(-3, 0)$;

   b) segmento de recta com início no ponto $(1, 2, 3)$ e fim no ponto $(-1, 0, 7)$;

   c) circunferência de centro $(1, -1)$ e raio 2;

   d) arco da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1, percorrido no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, do ponto $(1, 0)$ para o ponto $(0, -1)$;

   e) arco da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1, percorrido no sentido dos ponteiros do relógio, do ponto $(1, 0)$ para o ponto $(0, -1)$;

   f) arco da parábola $x = 2 - 3y^2$ do ponto $(-1, -1)$ ao ponto $(2, 0)$.

5. Identifique, e represente graficamente indicando o seu sentido, as curvas definidas pelas seguintes funções:

   a) $r(t) = (7, t)$, $-1 \leq t \leq 1$;

   b) $r(t) = (2 + 2\cos t, 1 + 2\sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$;

   c) $r(t) = (t^2, 2t + 1)$, $0 \leq t \leq 2$;

   d) $r(t) = (e^t, e^{2t})$, $0 \leq t \leq \log 2$;

   e) $r(t) = \left(t - 1, \dfrac{t}{t-1}\right)$, $2 \leq t \leq 4$;

   f) $r(t) = (t^3, 3\log t)$, $t \geq 1$;

   g) $r(t) = (4\cos 2t, 4\sin 2t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

6. Determine a linha $r(t)$ tal que $r'(t) = r(t) + (-1, \cos t, 2te^t)$ e $r(0) = (6, 0, -3)$.

7. Considere a curva definida por $r(t) = (t, e^t, e^{2t})$. Determine a intersecção da recta tangente à curva no ponto $r(0)$ com o plano $x + y + z = 6$.

8. Uma partícula inicia o seu movimento na posição inicial $r(0) = (1, 0, 0)$ com velocidade inicial $v(0) = (1, -1, 1)$. A sua aceleração é dada por $a(t) = (4t, 6t, 1)$. Determine a velocidade e a posição da partícula no instante t. Determine ainda a sua velocidade escalar no instante $t = 1$.

9. Seja $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

   a) Mostre que se $r(t) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ então
   $$\frac{d}{dt}\|r(t)\| = \frac{r(t) \cdot r'(t)}{\|r(t)\|}.$$

   b) Conclua que se a norma de $r(t)$ é constante então $r'(t)$ é ortogonal a $r(t)$ para todo o $t \in \mathbb{R}$.

10. Calcule o comprimento das seguintes curvas

    a) $r(t) = \left(2\cos t, -2\sin t, \dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)$, $0 \leq t \leq 5$;

    b) $r(t) = \left(t, \sqrt{2}\log t, \dfrac{1}{t}\right)$, $1 \leq t \leq 5$;

    c) $r(t) = \left(2\sqrt{2}t, \log(t^2), t^2\right)$, $1 \leq t \leq e$;

    d) $r(t) = \left(e^t \cos t, e^t \sin t\right)$, $0 \leq t \leq 1$.

11. Duas partículas começam no instante $t = 0$ a percorrer as curvas definidas por
    $$r(t) = (-2t, 2 - 2t) \;\text{ e }\; s(t) = (2\cos(\pi t), 2\sin(\pi t)), \quad t \geq 0,$$
    respectivamente.

    a) Esboce a trajectória das partículas.

    b) Determine, se existirem, os pontos onde as referidas trajectórias se intersectam.

    c) Diga, justificando, se existe algum ponto onde se dê a colisão das partículas e, em caso afirmativo, determine a distância percorrida por cada uma delas até ao instante da colisão.