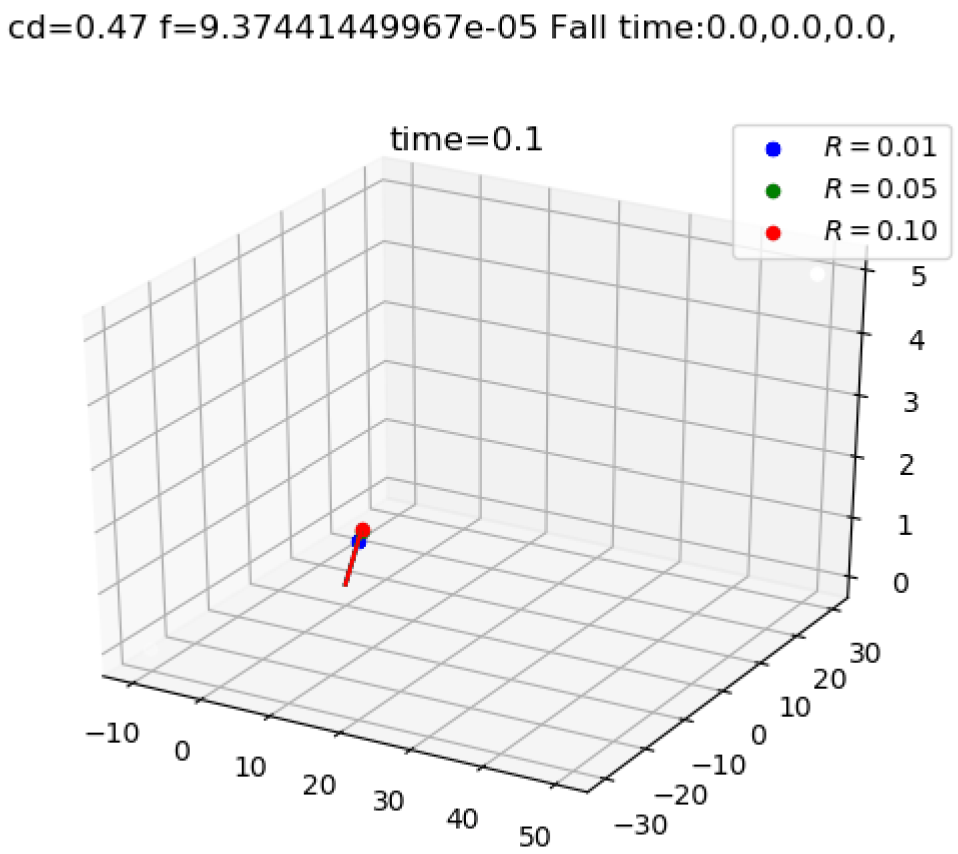
Aula 21

Equações diferenciais com condições fronteira num ponto:

Viscosidade e coriolis



Movimento balístico $(g = const)$ com Coriolis
(aceleração variável com $\vec{v}$) $(f = const)$ e atrito

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{du}{dt} = -fv + f'w - Du \\ \frac{dv}{dt} = fu - Dv \\ \frac{dw}{dt} = -g - f'u - Dw \end{cases} \wedge \begin{cases} \frac{dx}{dt} = u \\ \frac{dy}{dt} = v \\ \frac{dz}{dt} = w \end{cases} \quad \text{(6 equações)}$$

$f = 2\Omega \sin\varphi\,, f' = 2\Omega \cos\varphi\,, g = const, \phi = const$

$$D = \frac{c_D A \rho_F \frac{1}{2} |\vec{v}|}{\rho_R V}$$

Existe aceleração nas 3 direções.

Condições iniciais.

$x(0) = x_0,\ y(0) = y_0, z(0) = z_0$
$u(0) = u_0, v(0) = v_0, w(0) = w_0$

Ponto médio implícito ($c_D = 0$)

$$u^k \equiv u(k\Delta t)$$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -fv + f'w \\ \dfrac{dv}{dt} = fu \\ \dfrac{dw}{dt} = -g - f'u \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{u^k - u^{k-1}}{\Delta t} = -f v^{k-\frac{1}{2}} + f' w^{k-\frac{1}{2}} \\ \dfrac{v^k - v^{k-1}}{\Delta t} = f u^{k-\frac{1}{2}} \\ \dfrac{w^k - w^{k-1}}{\Delta t} = -g - f' u^{k-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{u^k - u^{k-1}}{\Delta t} = -f \dfrac{(v^{k-1} + v^k)}{2} + f' \dfrac{(w^{k-1} + w^k)}{2} \\ \dfrac{v^k - v^{k-1}}{\Delta t} = f \dfrac{(u^{k-1} + u^k)}{2} \\ \dfrac{w^k - w^{k-1}}{\Delta t} = -g - f' \dfrac{(u^{k-1} + u^k)}{2} \end{cases}$$

Ponto médio implícito (sem iteração)

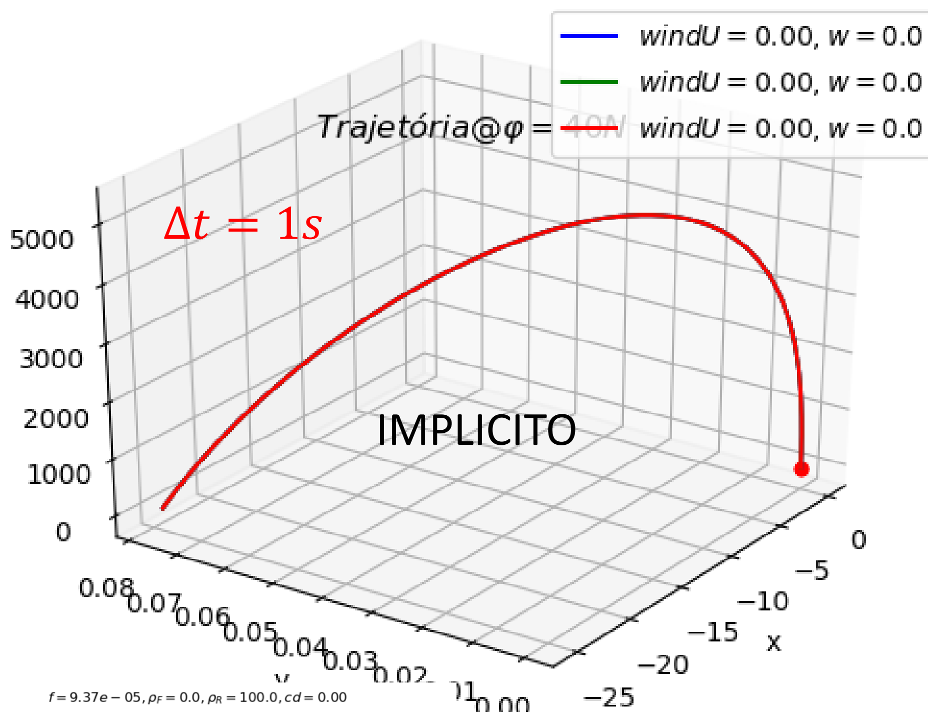
$$\begin{cases} u^k + \dfrac{f\Delta t}{2} v^k - \dfrac{f'\Delta \mathrm{t}}{2} w^k = u^{k-1} - \dfrac{f\Delta t}{2} v^{k-1} + \dfrac{f'\Delta \mathrm{t}}{2} w^{k-1} \\ -\dfrac{f\Delta t}{2} u^k + v^k = v^{k-1} + \dfrac{f\Delta t}{2} u^{k-1} \\ \dfrac{f'\Delta \mathrm{t}}{2} u^k + w^k = w^{k-1} - g\Delta t - \dfrac{f'\Delta t}{2} u^{k-1} \end{cases}$$

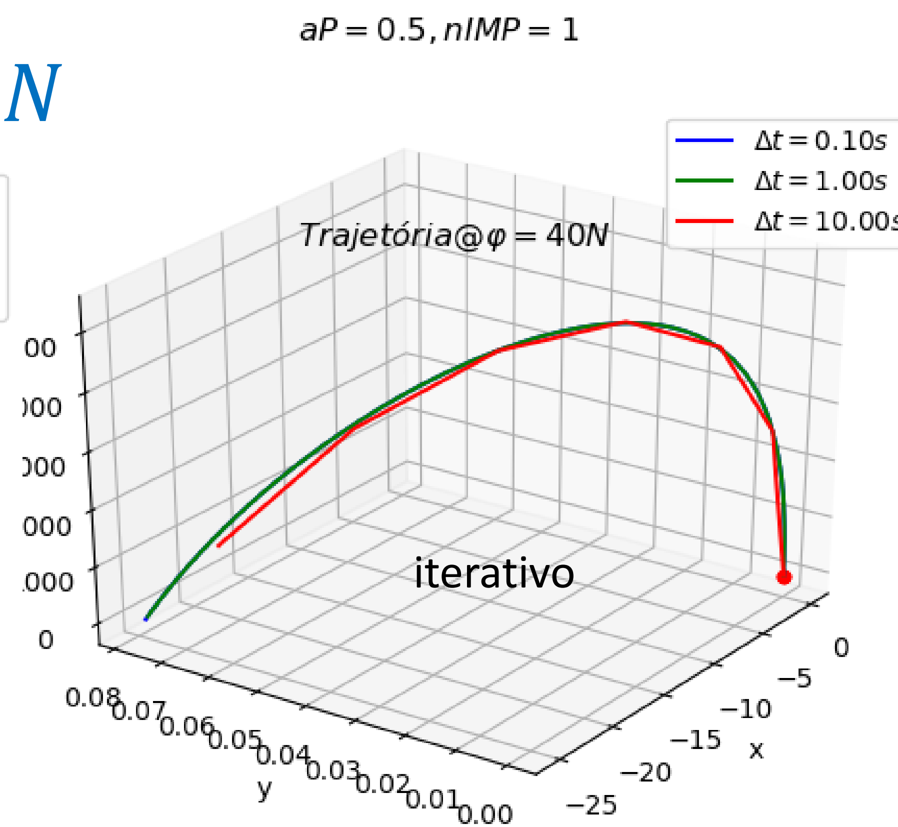
$$\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{f\Delta t}{2} & -\dfrac{f'\Delta \mathrm{t}}{2} \\ -\dfrac{f\Delta t}{2} & 1 & 0 \\ \dfrac{f'\Delta \mathrm{t}}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^k \\ v^k \\ w^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^{k-1} - \dfrac{f\Delta t}{2} v^{k-1} + \dfrac{f'\Delta \mathrm{t}}{2} w^{k-1} \\ v^{k-1} + \dfrac{f\Delta t}{2} u^{k-1} \\ w^{k-1} - g\Delta t - \dfrac{f'\Delta t}{2} u^{k-1} \end{bmatrix}$$

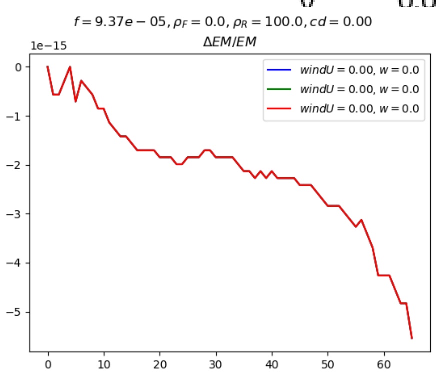
$$M\vec{v}^k = \vec{b}^{k-1}$$

$$u_0 = 0, v_0 = 0, w_0 = 320\ ms^{-1}$$
$$\varphi = 40N$$

Projétil para cima aos $40°N$

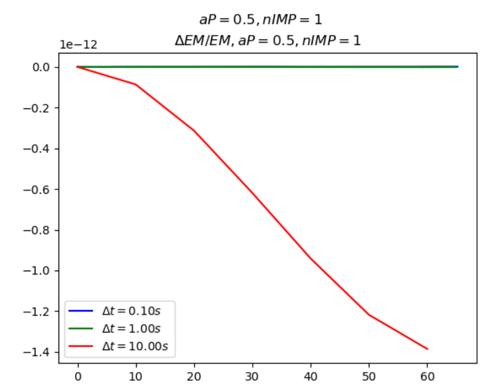






$$\frac{\Delta E}{E} \approx 10^{-15}$$

$$\frac{\Delta E}{E} \approx 10^{-12}$$



Movimento num fluido viscoso/turbulento
sem rotação ($\Omega = 0, f = 0$)

O movimento balístico (i.e. sem propulsão) num fluido (ar, água, de densidade ρ_F) é afetado pelo fluido, por dois mecanismos:

1) Impulsão, resultante do campo da pressão

Lei de Arquimedes ($\vec{k}$ aponta para cima na vertical), ρ_R densidade do projétil

$$\vec{F}_{imp} = \rho_F V g \vec{k} \Longrightarrow \vec{a}_{imp} = \frac{\vec{F}_{imp}}{m} = \frac{\rho_F}{\rho_R} g \vec{k}$$

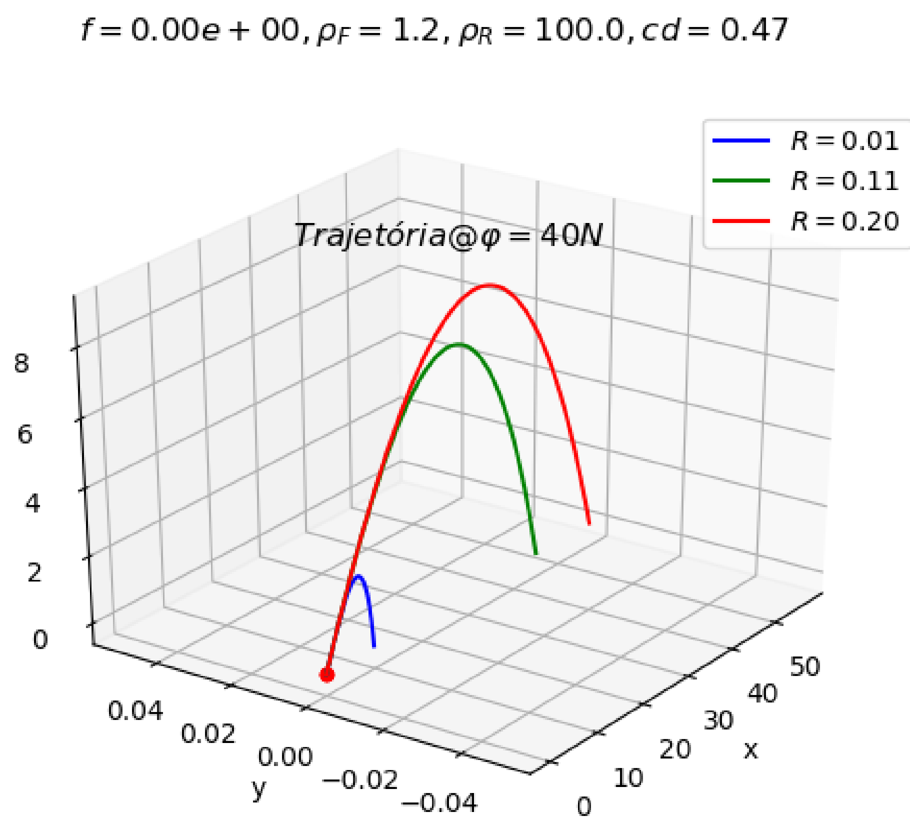
1) Atrito, resultante da viscosidade e da turbulência

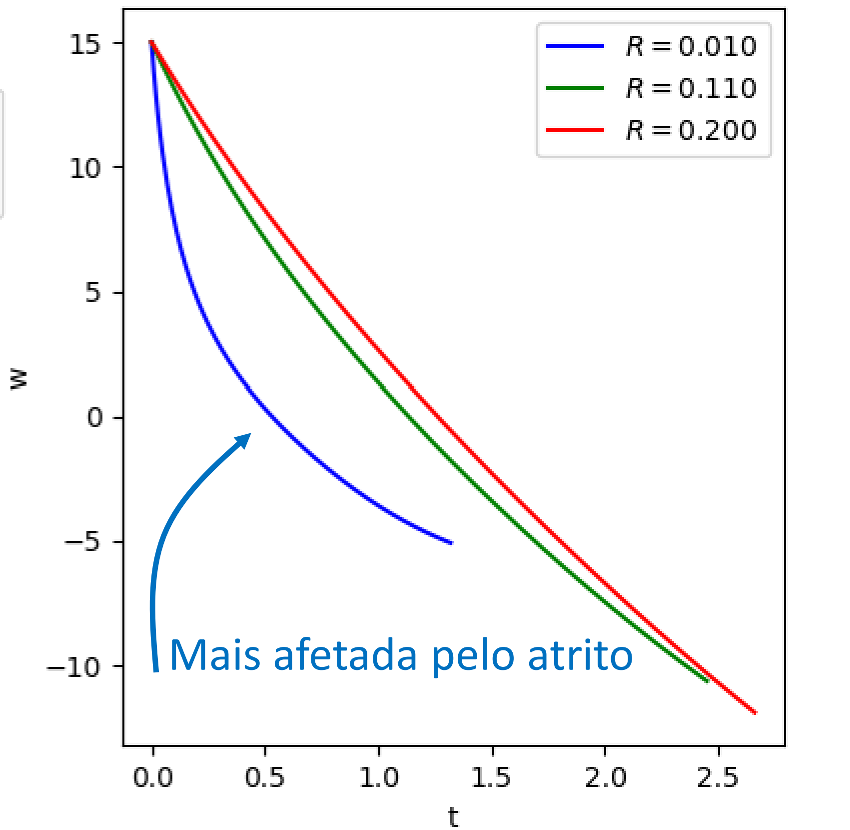
Lei empírica

$$\vec{F}_D = -c_D A \rho_F \frac{1}{2} v^2 \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \Longrightarrow \vec{a}_D = -\frac{c_D A \rho_F \frac{1}{2} |\vec{v}|}{\rho_R V} \vec{v}$$

A é uma secção eficaz do projétil (πR^2 no caso de uma esfera), c_D é um coeficiente empírico (depende da forma do projétil e do regime de escoamento), V é o volume.

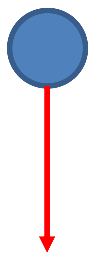
$$u_0 = 30, v_0 = 0, w_0 = 15, \Omega = 0$$





Experiência de Stokes

Queda livre de esferas num fluido viscoso: método de cálculo do coeficiente de viscosidade



$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dt} = -g - Dw \\ D = \dfrac{c_D A \rho_F \frac{1}{2} |\vec{v}|}{\rho_R V} \end{cases}$$

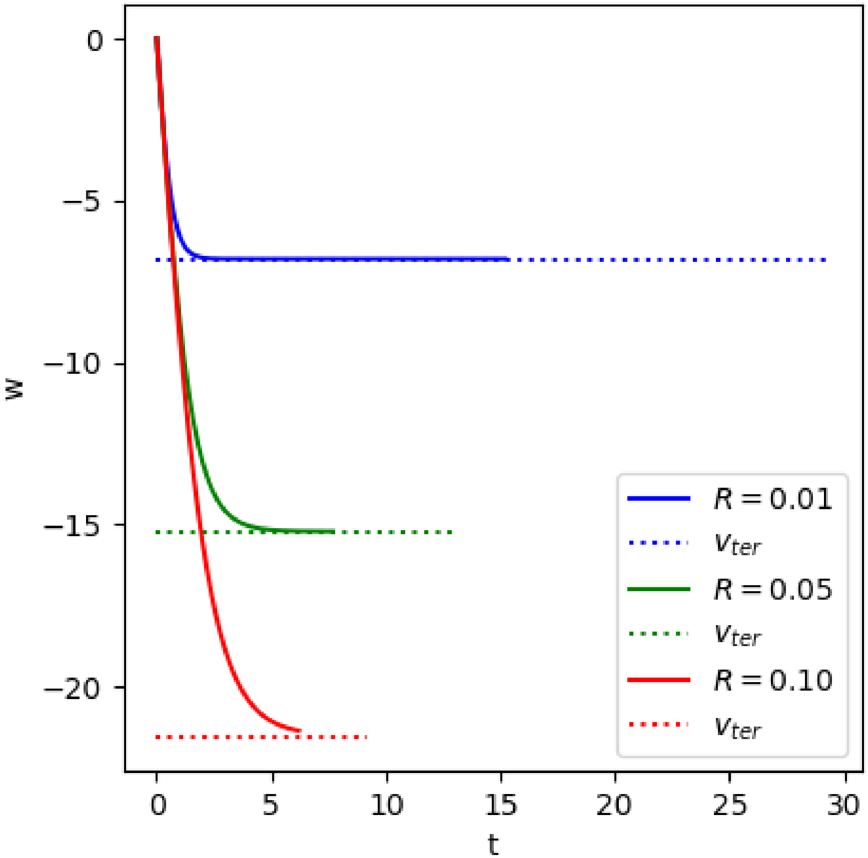
$$\frac{dw}{dt} = 0, w < 0, |\vec{v}| = |w|$$

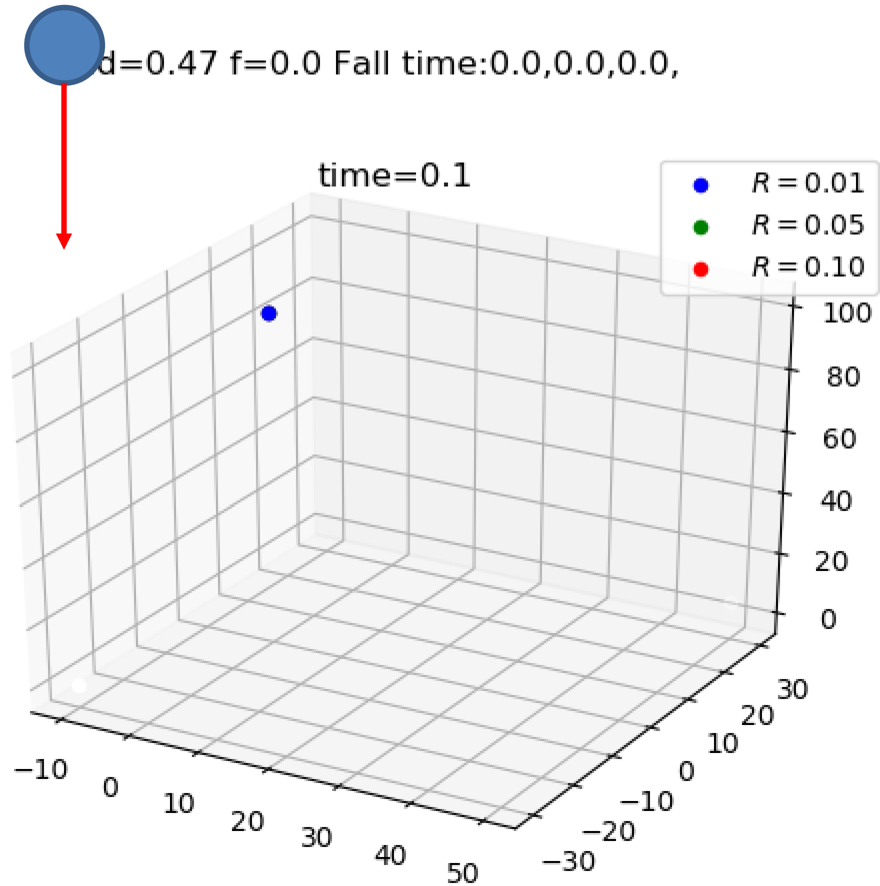
$$0 = -g + \frac{c_D A \rho_F \frac{1}{2}}{\rho_R V} w^2$$

$$w_{ter} = \sqrt{\frac{g}{\frac{c_D A \rho_F \frac{1}{2}}{\rho_R V}}}$$

Como o *drag* aumenta com a velocidade (para escoamentos suficientemente rápidos com v^2), a velocidade aumenta até atingir um **valor constante**, a velocidade terminal.

Experiência de Stokes no ar



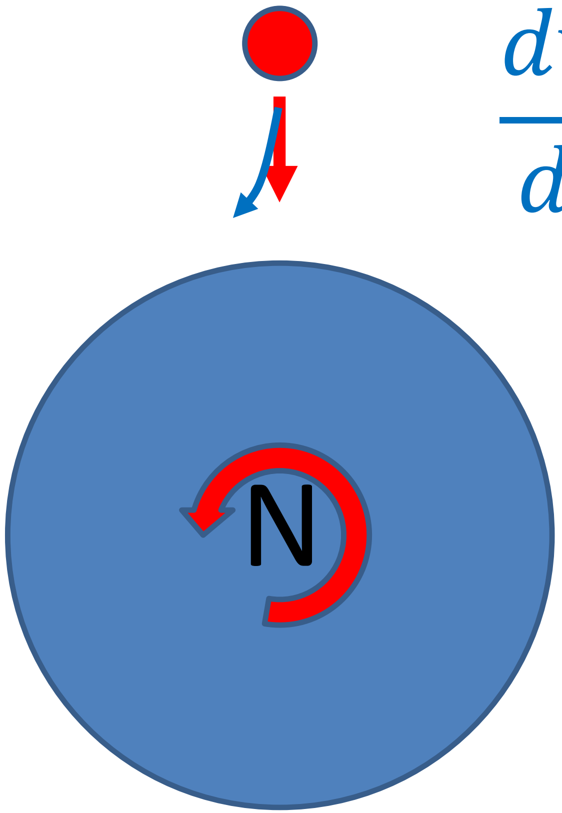


Experiência “de Galileu”

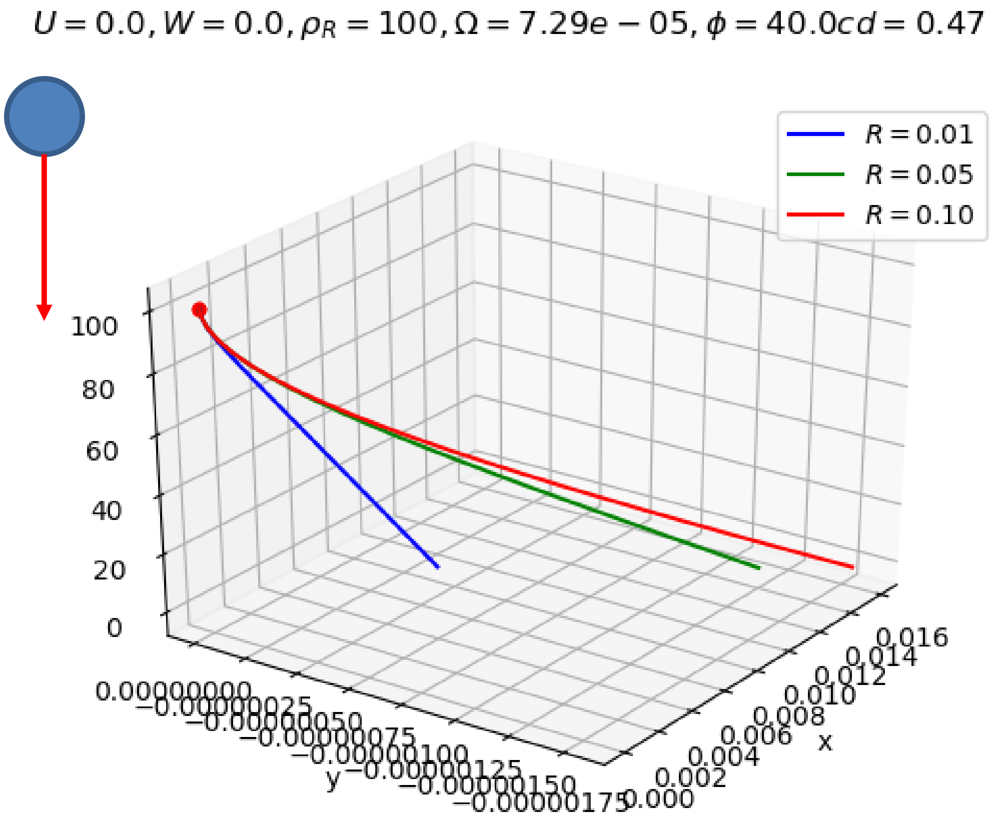
Objetivo: demonstrar a rotação da Terra:

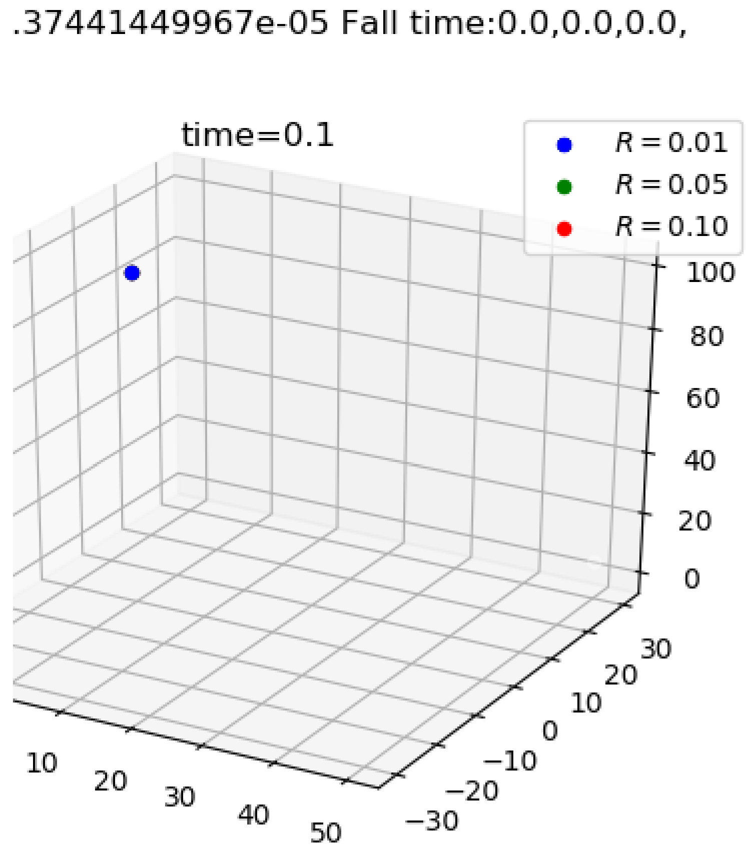
No referencial Terra:

$$\frac{dw}{dt} = -g - f'u$$

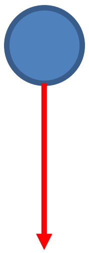


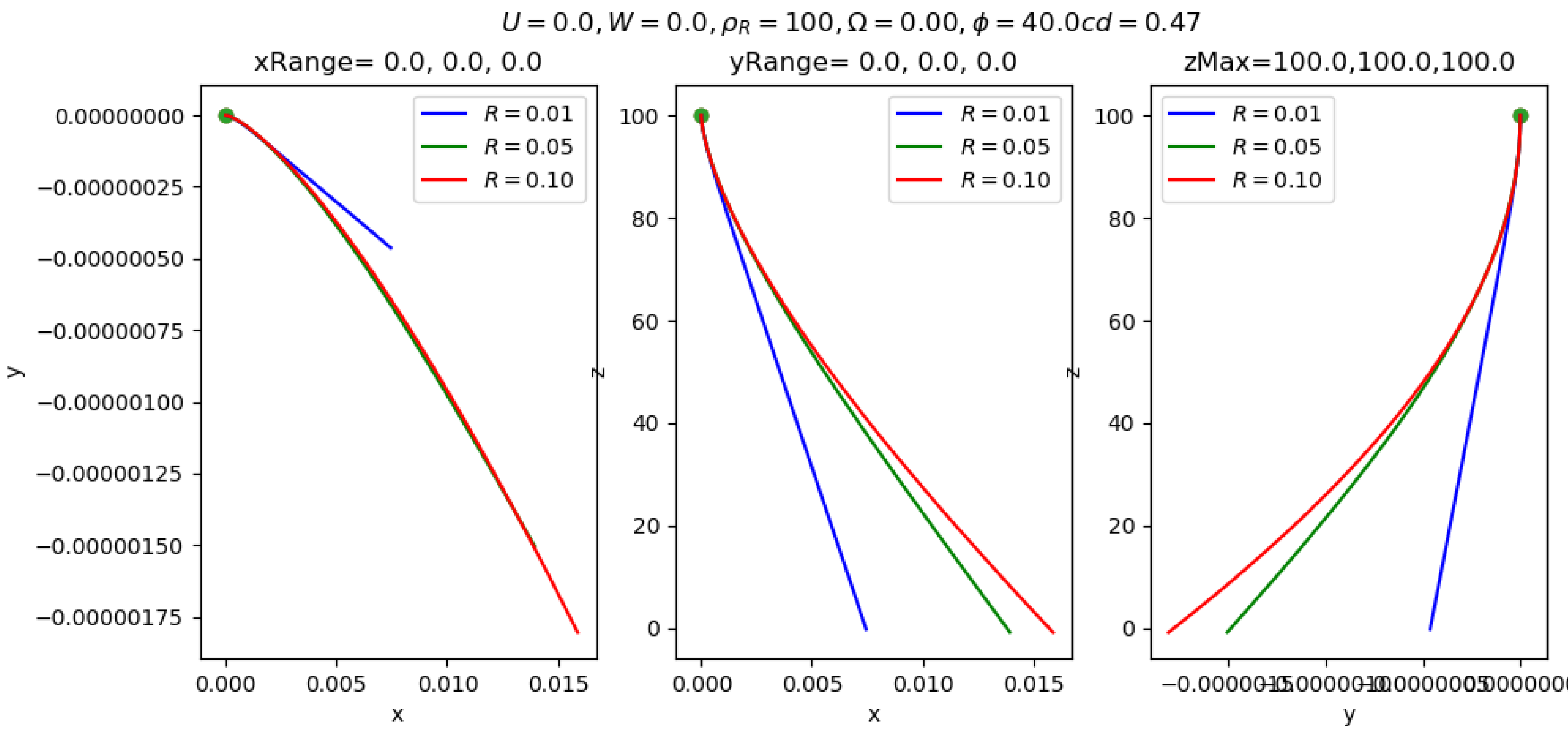
"Experiência" de Galileu (aos 40N)
queda de 100m com rotação e atrito!



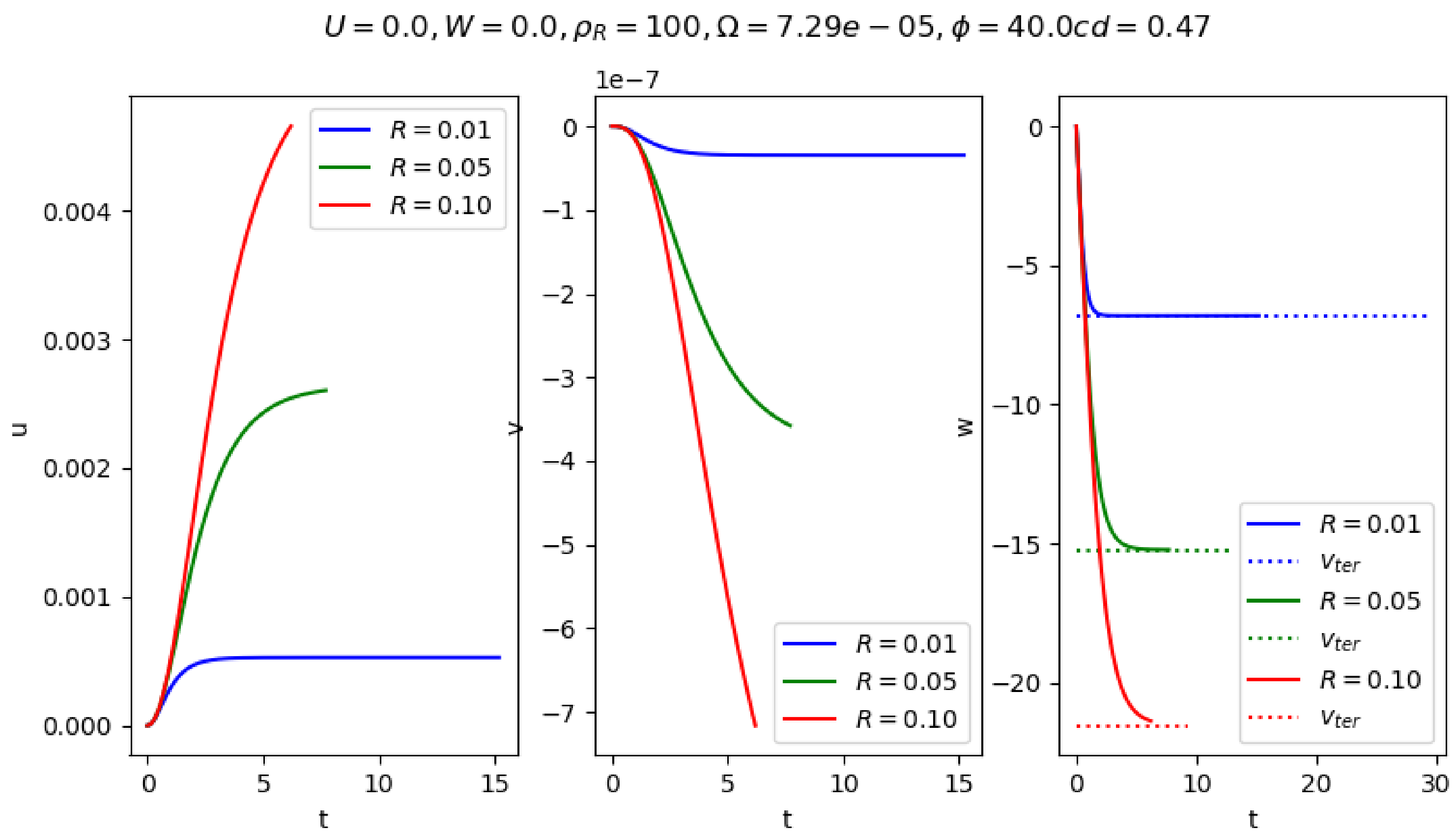


“Experiência” de Galileu (aos 40N)
queda de 100m com rotação! (e atrito)





Galileu com atrito e rotação



Controlo de qualidade

Sem atrito, deve haver conservação de energia mecânica (a "força" de Coriolis não realiza trabalho pois é perpendicular ao descolamento)

Com atrito, no modelo de Stokes, a velocidade vertical deve atingir a velocidade terminal quando $t \to \infty$

Movimentos a longa distância

O efeito de Coriolis tem um efeito muito pequeno em movimentos de curta duração (quando comparada com a duração do dia).

Em movimentos de longa duração, o seu efeito pode ser dominante.

Um movimento balístico de longa duração traduz-se em longas distâncias e exige coordenadas esféricas.

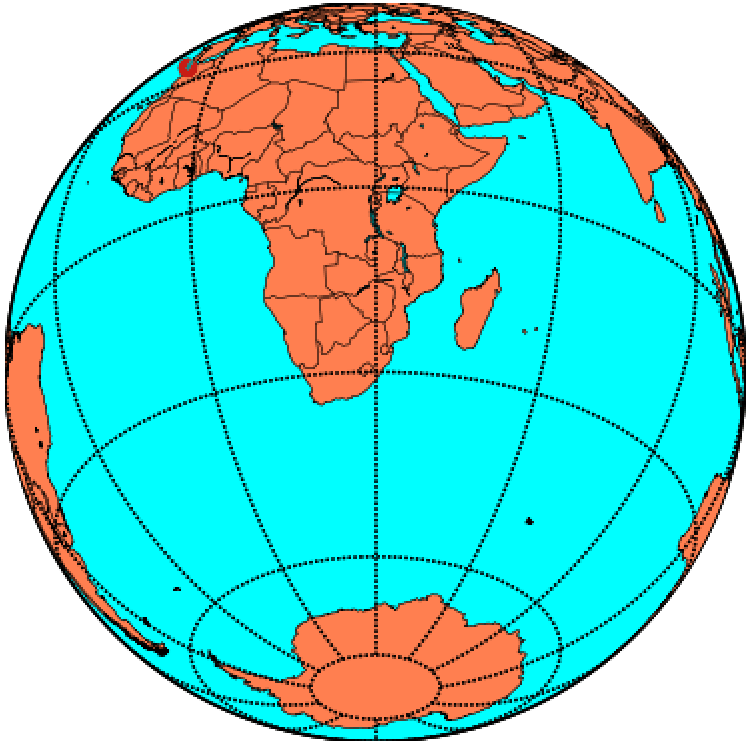
Exemplo com trajetória inicialmente para Sul a partir de Lisboa

$$(w_0 = 6000, v_0 = -6000)\frac{m}{s}$$

$$|\vec{v}_0| \approx 8.6\ km\ s^{-1}$$

Notar que não passa no Pólo Sul.

$t = 45s, \lambda = -8.5, \phi = 35.6, z = 266.190km, \Delta E/E = -0.001$

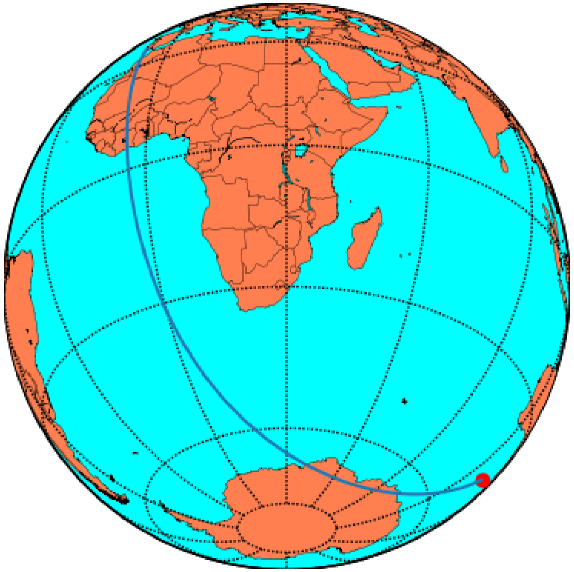


f e g variam de ponto para ponto

Importância da precisão numérica: número de iterações no ponto médio

nIMP=1

$t = 6995s, \lambda = 130.4, \phi = -45.6, z = 2.093km, \Delta E/E = 0.024$



nIMP=0

$t = 6561s, \lambda = 148.5, \phi = -58.0, z = 1.262km, \Delta E/E = -0.014$