44. Seja X – v.a. (população) que representa a concentração de zinco (em mg/Kg) numa amostra de solo, retirada numa horta urbana seleccionada ao acaso.
Observada uma a.a. com n = 15 amostras de solo, (x_1, ..., x_{15}), obteve-se uma média $\overline{x}$ = 50.5 e um desvio-padrão amostral s = 2.52.
Designando, como habitualmente, a variância populacional, Var(X), por σ^2, pretende-se um intervalo com 95% de confiança para o desvio-padrão σ – $IC_{95\%}(\sigma)$.
Sendo que:
- a distribuição da população em estudo é desconhecida e
- a dimensão da amostra, n = 15, é "pequena",

para se poder determinar o intervalo de confiança pretendido, é necessário **assumir que X tem distribuição Normal**.
Como o valor esperado de X, μ, também é desconhecido(*), sabe-se que o intervalo com 100(1–α)% de confiança para σ^2, com base numa amostra observada de dimensão n, é o seguinte:

$$IC_{100(1-\alpha)\%}(\sigma^2) = \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2;n-1}} \right),$$

onde $\chi^2_{\upsilon;n-1}$ representa o quantil de probabilidade υ da distribuição Qui-quadrado com n – 1 graus de liberdade (g.l. ou d.f. do inglês *degrees of freedom*). Com base neste intervalo, pode determinar-se um intervalo com 100(1–α)% de confiança para σ bastando, para tal, tomar as raízes quadradas positivas dos extremos, obtendo-se:

$$IC_{100(1-\alpha)\%}(\sigma) = \left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}}}, \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2;n-1}}} \right) = \left(s\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}}}, s\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2;n-1}}} \right).$$

No caso presente, quer-se 100(1–α)% igual a 95%, com n = 15 e s = 2.52:
$100(1-\alpha) = 95 \Leftrightarrow 1-\alpha = 0.95 \Leftrightarrow \alpha = 0.05 \Leftrightarrow \alpha/2 = 0.025 \Leftrightarrow 1-\alpha/2 = 0.975$;
$\chi^2_{0.025;14} = 5.62873$ e $\chi^2_{0.975;14} = 26.1189$ (valores obtidos numa tabela de quantis da distribuição Qui-quadrado, numa calculadora com essa funcionalidade ou numa folha de cálculo computacional);

$$\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}}} = \sqrt{14/26.1189} \approx 0.732 \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2;n-1}}} = \sqrt{14/5.62873} \approx 1.577;$$

Então,

$$IC_{95\%}(\sigma) = (\,2.52\times 0.732,\ 2.52\times 1.577) \approx (\,\underline{1.845}, \underline{3.974})$$

(*) Quando o valor esperado, μ, é conhecido, o intervalo com 100(1–α)% de confiança para σ^2, com base numa amostra observada (x_1, ..., x_n), é o seguinte:

$$IC_{100(1-\alpha)\%}(\sigma^2) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n}}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2;n}} \right).$$