36. **Resolução alternativa, recorrendo a um teste de hipóteses**

Seja X – v.a. (população) que rep. a produção anual de leite (em litros) de uma vaca da espécie em questão, escolhida ao acaso; sabe-se que $X \cap \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = 123.21 \text{litros}^2)$, sendo μ desconhecido.

Observada um a.a. de n = 100 vacas daquela espécie (as que estavam na vacaria) obteve-se uma média amostral $\bar{x} = 68$. Pretende averiguar-se se a amostra observada fornece evidência estatística para afirmar que a produção anual média (ou esperada) de leite de uma vaca daquela espécie é diferente de 66.6 litros, ou seja, se $\mu \neq 66.6$.

Para responder à questão colocada, vai efectuar-se um **teste de hipóteses sobre μ**.

A hipótese alternativa deve reflectir a existência de evidência para afirmar a veracidade da proposição em teste: "a produção anual média de leite de uma vaca daquela espécie é diferente de 66.6 litros"; por oposição, a hipótese nula deve reflectir a falsidade daquela proposição: "a produção anual média de leite de uma vaca daquela espécie não é diferente de 66.6 litros" ou, equivalentemente: ""a produção anual média de leite de uma vaca daquela espécie é igual a 66.6 litros". Utilizando a notação estatística adequada, pretende efectuar-se um teste às **hipóteses**:

$$H_0: \mu = 66.6 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu \neq 66.6$$

Uma vez que:

- a distribuição da população em estudo é Normal e
- a variância (equivalentemente, o desvio-padrão) populacional, σ^2, é conhecida,

a **estatística de teste** (E.T.) adequada (e respectiva distribuição sob a veracidade de H_0) é a seguinte:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \underset{H_0}{\cap} \mathcal{N}(0, 1),$$

onde μ_0 é o valor especificado nas hipóteses. O **valor observado** (V.O.) da E.T. face à amostra observada é igual a ($\mu_0 = 66.6$):

$$z_0 = \frac{68 - 66.6}{\sqrt{123.21}} 10 = 14/11.1 \approx 1.26$$

Se H_0 não for verdadeira, e portanto deve ser rejeitada, então deverá verificar-se $\mu \neq \mu_0$ (H_1). Por outro lado (e como $\bar{X}$ é o "melhor" estimador de μ), espera-se que $\bar{X}$ tome valores próximos de μ e, portanto, diferentes de μ_0. Ou seja, se houver evidência de que $\mu \neq \mu_0$ espera-se que $\bar{X} - \mu_0$ seja diferente de zero e, mais especificamente, significativamente diferente de zero. De modo equivalente, espera-se que o valor absoluto de $\bar{X} - \mu_0$, $|\bar{X} - \mu_0|$, seja significativamente positivo, o que fará com que $|Z|$ seja também significativamente positivo.

Como se pretende tomar uma decisão com base numa única amostra observada (a que se dispõe), existe sempre a possibilidade de, erradamente, se rejeitar H_0. É a probabilidade de tal acontecer que se pretende que seja muito pequena (pois é a probabilidade de se cometer um erro na tomada de decisão). Esta probabilidade é a que permite controlar a significância da decisão tomada, designa-se por nível de significância do teste e denota-se por α: P(Rejeitar H0|H0 verdadeira) = α.

Então, H_0 deve ser rejeitada se $|Z|$ for significativamente "grande" (positivo), ou seja, $|Z| > k_\alpha$, onde k_α será determinado de forma a garantir que o nível de significância do teste seja igual a α; deste modo:

$$\text{P(Rejeitar H0|H0 verdadeira)} = \alpha \Leftrightarrow P(|Z| > k_\alpha \mid \mu = \mu_0) = \alpha \Leftrightarrow P(|Z| \leq k_\alpha \mid \mu = \mu_0) = 1 - \alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\,\Phi(k_\alpha) - 1 = 1 - \alpha \Leftrightarrow \Phi(k_\alpha) = 1 - \alpha/2 \Leftrightarrow k_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2).$$

Deste modo, face ao V.O. da E.T., z_0, a regra de decisão (R.D.) é a seguinte:

Rejeita-se H_0 ao nível de significância α se $|z_0| > z_{1-\alpha/2}$,

onde $z_{1-\alpha/2}$ representa o quantil de probabilidade $1-\alpha/2$ da distribuição Normal padrão.

No caso presente, em que se pretende α = 5% = 0.05, tem-se:

$\alpha = 0.05 \Leftrightarrow 1-\alpha/2 = 0.975 \Rightarrow z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$;

$|z_0| = 1.26 \Rightarrow |z_0| < z_{0.975} \Rightarrow$ Não se rejeita H0 ao nível α = 5%

Conclusão: Com base nos dados, e considerando α = 5%, não se pode dizer que a produção anual média de leite das vacas da espécie em questão difere significativamente de 66.6 litros.

37. Seja p – proporção de passageiros que viajando atrás usam regularmente cinto de segurança.
Pretende efectuar-se, ao nível de significância α = 5%, o seguinte teste de hipóteses sobre p:

$$H_0: p = 0.75 \quad \text{vs} \quad H_1: p \neq 0.75$$

Uma vez que se dispõe de uma amostra com dimensão suficientemente "grande", n = 300, a E.T. adequada (e respectiva distribuição assintótica sob a validade de H_0) é:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \overset{a}{\underset{H_0}{\cap}} \mathcal{N}(0, 1),$$

onde $\hat{p}$ é a correspondente proporção amostral e p_0 o valor especificado nas hipóteses.

V.O.:

$$\hat{p} = 230/300 \Rightarrow z_0 = \frac{230/300 - 0.75}{\sqrt{0.75 \times 0.25/300}} \approx 0.667$$

R.D. (que se obtém como explicado no exercício anterior):

Rejeita-se H0 ao nível α se $|z_0| > z_{1-\alpha/2}$: $\alpha = 0.05 \Leftrightarrow 1-\alpha/2 = 0.975 \Rightarrow z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$;

$|z_0| = 0.667 \Rightarrow |z_0| < z_{0.975} \Rightarrow$ Não se rejeita H_0 ao nível α = 5%

Conclusão: Com base nos dados, e considerando α = 5%, não existe evidência de que a proporção de passageiros que viajando atrás usam regularmente cinto de segurança seja diferente de 75%.

38. *** Excluído do Programa ajustado ***

39. *** Excluído do Programa ajustado ***