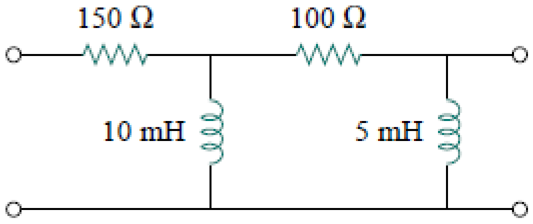
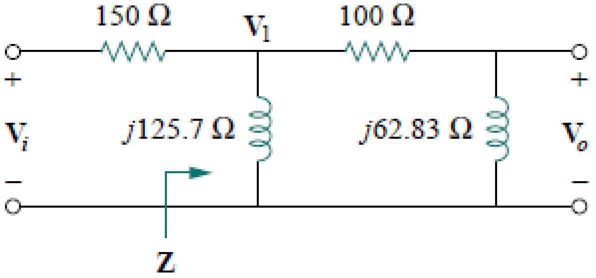
Calcular a diferença de fase entre entrada e saída para 2 kHz



(a)



$$10 \text{ mH} \implies X_L = \omega L = 2\pi \times 2 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-3} = 40\pi = 125.7\ \Omega$$

$$5 \text{ mH} \implies X_L = \omega L = 2\pi \times 2 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-3} = 20\pi = 62.83\ \Omega$$

Consider the circuit in Fig. 9.35(b). The impedance $\mathbf{Z}$ is the parallel combination of $j125.7\ \Omega$ and $100 + j62.83\ \Omega$. Hence,

$$\mathbf{Z} = j125.7 \parallel (100 + j62.83) = \frac{j125.7(100 + j62.83)}{100 + j188.5} = 69.56\angle 60.1^\circ\ \Omega \tag{9.14.1}$$

Using voltage division,

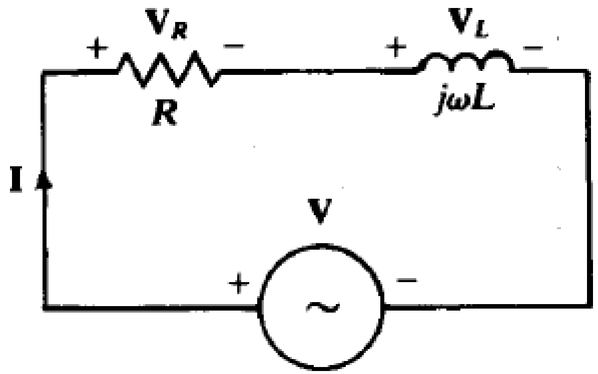
$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{Z} + 150}\mathbf{V}_i = \frac{69.56\angle 60.1^\circ}{184.7 + j60.3}\mathbf{V}_i = 0.3582\angle 42.02^\circ\ \mathbf{V}_i \tag{9.14.2}$$

and

$$\mathbf{V}_o = \frac{j62.832}{100 + j62.832}\mathbf{V}_1 = 0.532\angle 57.86^\circ\ \mathbf{V}_1 \tag{9.14.3}$$

Combining Eqs. (9.14.2) and (9.14.3),

$$\mathbf{V}_o = (0.532\angle 57.86^\circ)(0.3582\angle 42.02^\circ)\ \mathbf{V}_i = 0.1906\angle 100^\circ\ \mathbf{V}_i$$

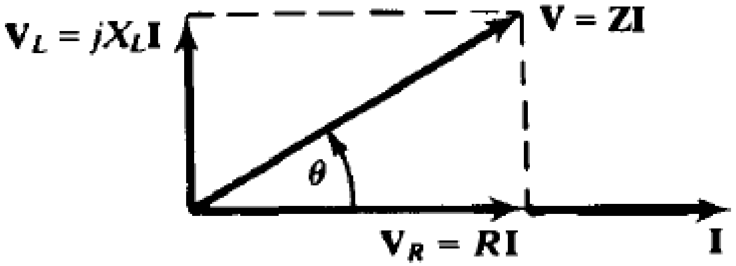


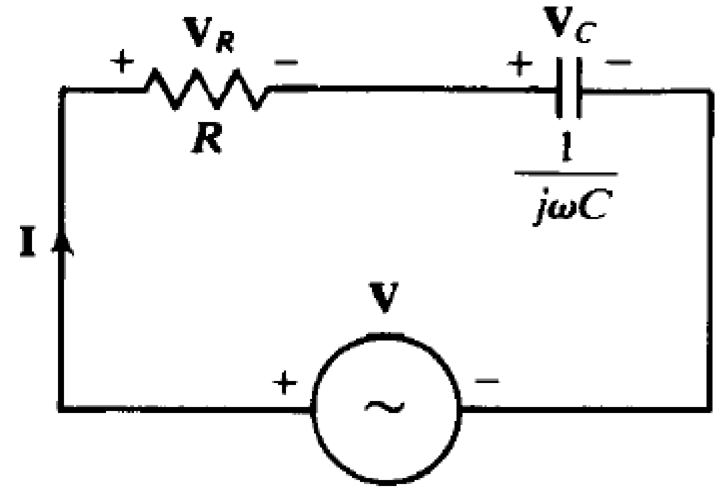
$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L = (R + j\omega L)\mathbf{I} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$$

$$\mathbf{Z} = R + j\omega L = R + jX_L$$

Impedância

Reactância

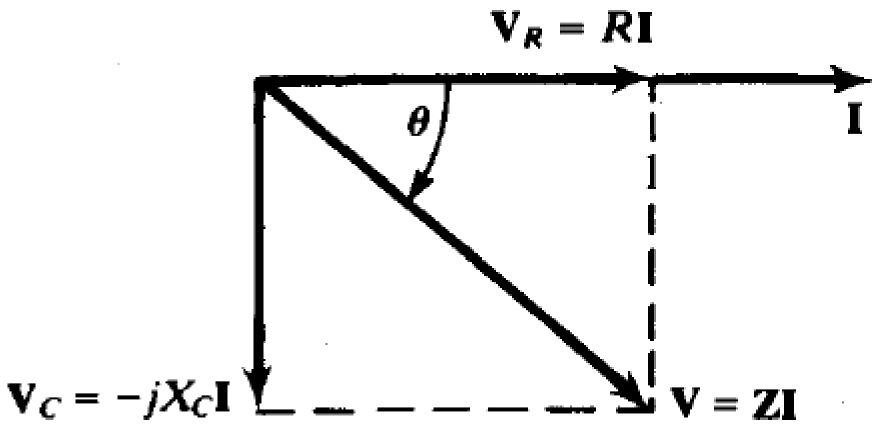




$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_C = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\mathbf{I} \equiv \mathbf{Z}\mathbf{I}$$

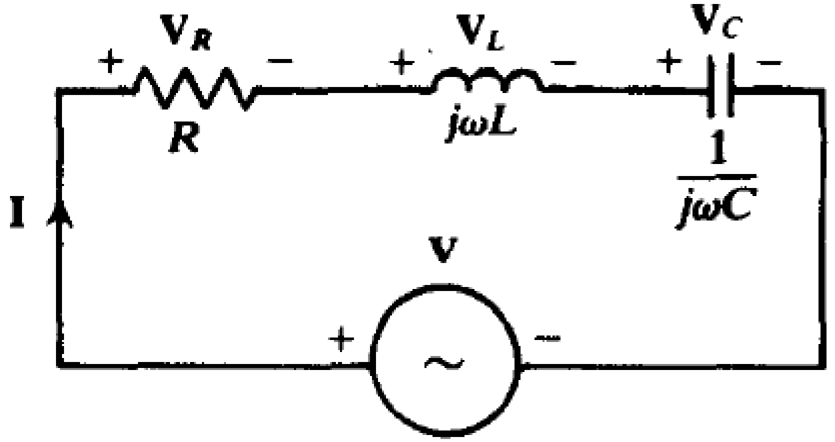
Impedância

Reactância

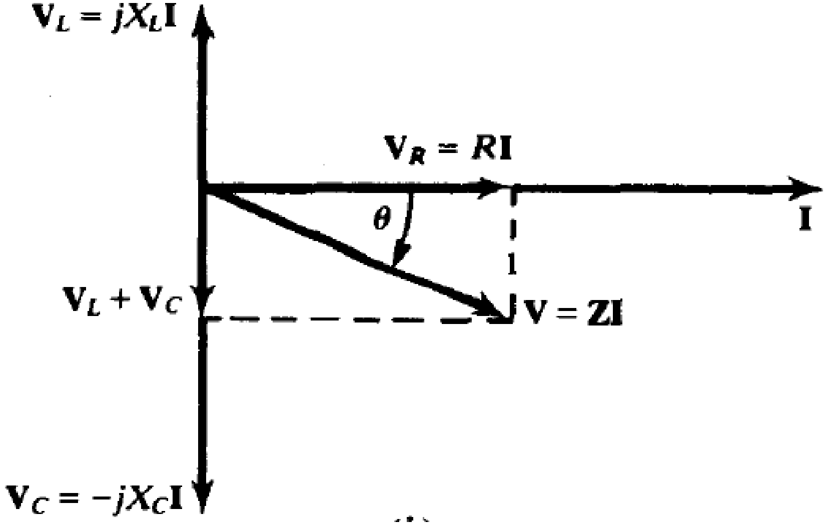


$$\mathbf{Z} = R - \frac{j}{\omega C} = R - jX_C$$

Reparem que a corrente está adiantada em relação à tensão



$$\mathbf{Z} \equiv \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$
$$= R + j(X_L - X_C)$$



Até agora temos falado de tensões e correntes
Vamos agora falar de potência

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$$
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

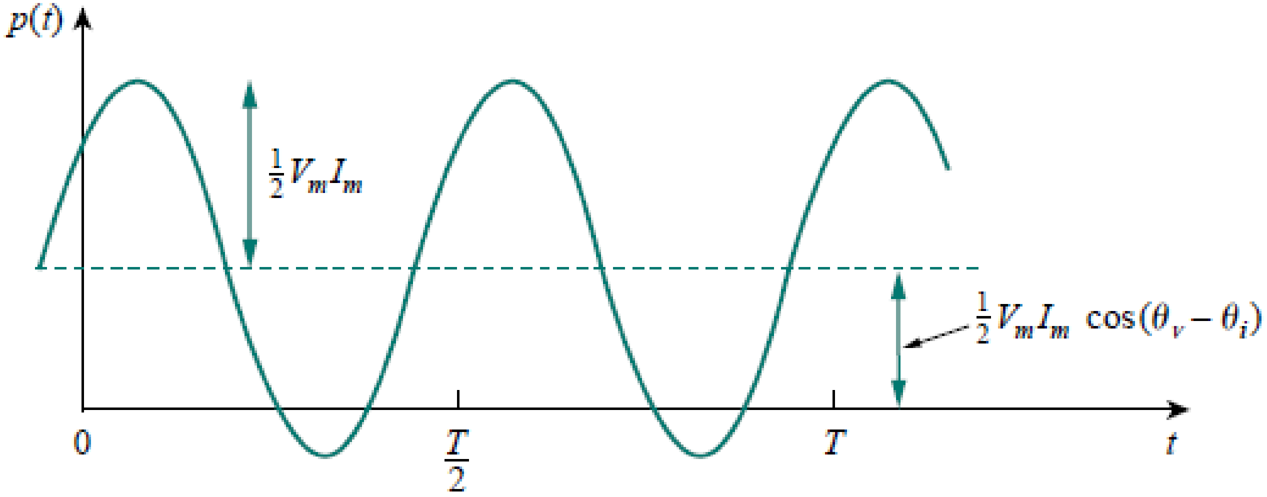
$$\boxed{p(t) = v(t)i(t)}$$

$$p(t) = v(t)i(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \theta_v)\cos(\omega t + \theta_i)$$

$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)$$

constante

Frequência dupla



Como se vê a potência instantânea pode ser positiva ou negativa

Quando p é positiva, a energia é transferida do gerador para a carga

Quando p é negativa, a energia é transferida da carga para o gerador

A potência média então obtem-se de

É uma constante

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt \qquad = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)\frac{1}{T}\int_0^T dt$$

$$+ \frac{1}{2}V_m I_m \frac{1}{T}\int_0^T \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)\,dt$$

O valor médio de um coseno é zero

$$P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)$$

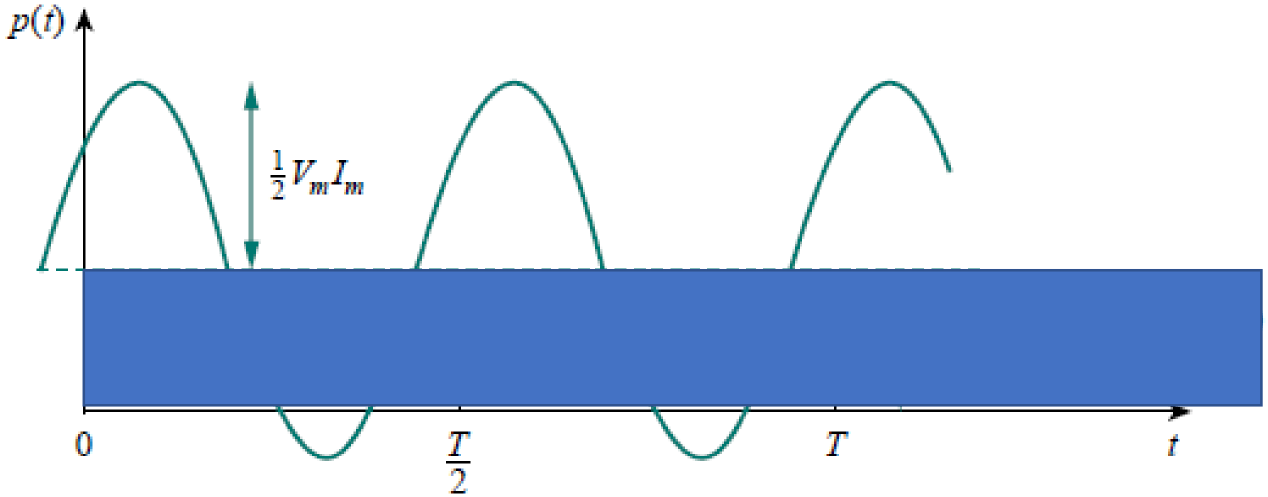
Para uma resistência

$$P = \frac{1}{2}V_m I_m = \frac{1}{2}I_m^2 R = \frac{1}{2}|\mathbf{I}|^2 R$$

Para C ou L

$$P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos 90^\circ = 0$$

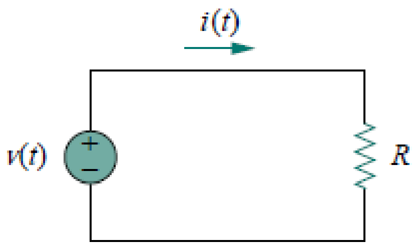
Num circuito puramente reactivo a potência absorvida média é zero



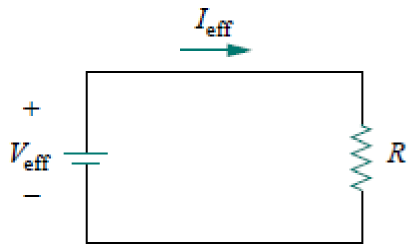
Qual deverá ser a amplitude de uma tensão sinusoidal que me dê o mesmo valor de potência média se utilizar uma tensão contínua?

Valor eficaz

- Fisicamente, o **valor eficaz** de uma corrente alternada é o valor da intensidade de uma corrente contínua que produziria, numa resistência, o mesmo efeito calorífico que a corrente alternada em questão.



(a)



Num circuito AC

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 R\,dt = \frac{R}{T}\int_0^T i^2\,dt$$

Num circuito DC

$$P = I_{\text{eff}}^2 R$$

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt}$$

$$I_{\text{eff}} = I_{\text{rms}}, \qquad V_{\text{eff}} = V_{\text{rms}}$$

$$v(t) = V_m \cos \omega t,$$

$$V_{\text{rms}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \qquad I_{\text{rms}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{V_m}{\sqrt{2}}\frac{I_m}{\sqrt{2}}\cos(\theta_v - \theta_i)$$
$$= V_{\mathrm{rms}} I_{\mathrm{rms}} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

Para uma resistência

$$P = I_{\mathrm{rms}}^2 R = \frac{V_{\mathrm{rms}}^2}{R}$$

Atenção que isto é válido para sinais sinusoidais

Vimos que a potência média se podia escrever como

$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\theta_v - \theta_i) = S \cos(\theta_v - \theta_i)$$

Factor de potência

sendo $\boxed{S = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}}$

Potência aparente

O factor de potência é o factor pelo qual a potência aparente deve ser multiplicado para se obter a potência real

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{V_m \angle \theta_v}{I_m \angle \theta_i} = \frac{V_m}{I_m} \angle \theta_v - \theta_i$$

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{\mathbf{V}_{\text{rms}}}{\mathbf{I}_{\text{rms}}} = \frac{V_{\text{rms}}}{I_{\text{rms}}} \angle \theta_v - \theta_i$$

Ou seja, podemos calcular o factor de potência através da impedância da carga

$$i(t) = 4\cos(100\pi t + 10^\circ) \qquad v(t) = 120\cos(100\pi t - 20^\circ)$$

Calcular a potência aparente e o factor de potência num circuito com 2 componentes

$$S = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} = \frac{120}{\sqrt{2}}\frac{4}{\sqrt{2}} = 240 \text{ VA}$$

$$\text{pf} = \cos(\theta_v - \theta_i) = \cos(-20^\circ - 10^\circ) = 0.866$$

Como a corrente está adiantada em relação à tensão podemos concluir que o circuito tem uma resistência e um condensador. Quais os valores?

Podíamos ter também calculado através da impedância

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{120\angle -20^\circ}{4\angle 10^\circ} = 30\angle -30^\circ = 25.98 - j15\ \Omega \qquad \text{pf} = \cos(-30^\circ) = 0.866$$

Podemos estender o conceito de potência para incluir a componente associada à reactância. Para isso a potencia complexa pode ser calculada como

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{V}\mathbf{I}^*$$

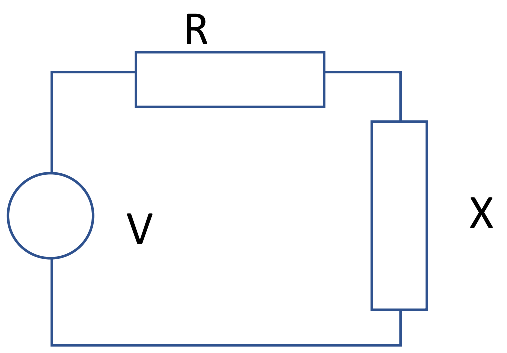
$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{\text{rms}}\mathbf{I}^*_{\text{rms}}$$

Onde

$$\mathbf{V}_{\text{rms}} = \frac{\mathbf{V}}{\sqrt{2}} = V_{\text{rms}}\angle\theta_v$$

$$\mathbf{I}_{\text{rms}} = \frac{\mathbf{I}}{\sqrt{2}} = I_{\text{rms}}\angle\theta_i$$

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \angle\theta_v - \theta_i \\ &= V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\theta_v - \theta_i) + j V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \sin(\theta_v - \theta_i)\end{aligned}$$



$$\mathbf{Z} = R + jX$$

$$\mathbf{S} = I^2_{\text{rms}}(R + jX) = P + jQ$$

Potência real

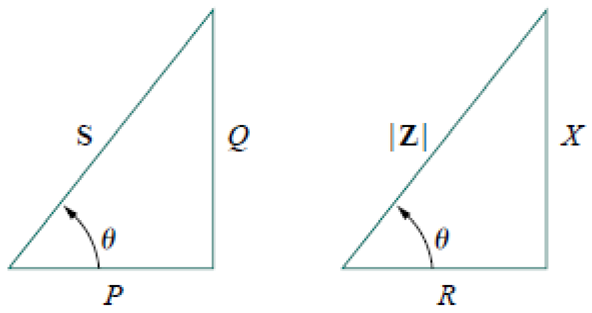
Potência reactiva

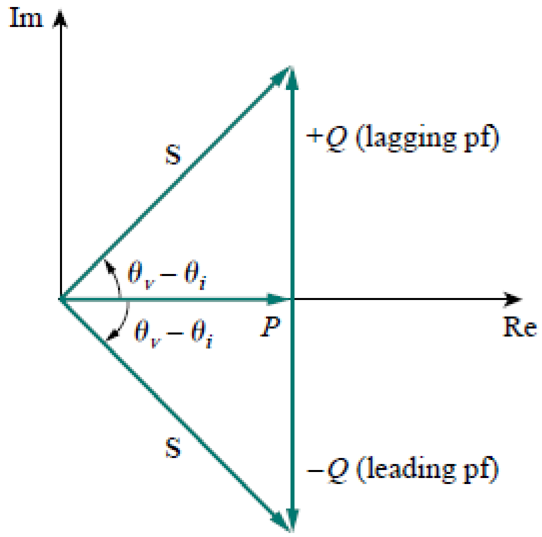
$$P = V_{\mathrm{rms}} I_{\mathrm{rms}} \cos(\theta_v - \theta_i), \qquad Q = V_{\mathrm{rms}} I_{\mathrm{rms}} \sin(\theta_v - \theta_i)$$

P é a potência útil, dissipada na carga (em W)

Q é a potência que é trocada entre o gerador e a carga sem ser dissipada (em VAR)

$$\begin{aligned}
\text{Complex Power} &= \mathbf{S} = P + jQ = \frac{1}{2}\mathbf{V}\mathbf{I}^* \\
&= V_{\mathrm{rms}} I_{\mathrm{rms}} \underline{/\theta_v - \theta_i} \\
\text{Apparent Power} &= S = |\mathbf{S}| = V_{\mathrm{rms}} I_{\mathrm{rms}} = \sqrt{P^2 + Q^2} \\
\text{Real Power} &= P = \mathrm{Re}(\mathbf{S}) = S\cos(\theta_v - \theta_i) \\
\text{Reactive Power} &= Q = \mathrm{Im}(\mathbf{S}) = S\sin(\theta_v - \theta_i) \\
\text{Power Factor} &= \frac{P}{S} = \cos(\theta_v - \theta_i)
\end{aligned}$$


S
Q
θ
P
|Z|
X
θ
R


Im
S
+Q (lagging pf)
θv − θi
P
Re
θv − θi
S
−Q (leading pf)

$$v(t) = 60\cos(\omega t - 10^\circ)$$
$$i(t) = 1.5\cos(\omega t + 50^\circ)$$

$$\mathbf{V}_{\text{rms}} = \frac{60}{\sqrt{2}}\angle -10^\circ, \qquad \mathbf{I}_{\text{rms}} = \frac{1.5}{\sqrt{2}}\angle +50^\circ$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{\text{rms}}\mathbf{I}^*_{\text{rms}} = \left(\frac{60}{\sqrt{2}}\angle -10^\circ\right)\left(\frac{1.5}{\sqrt{2}}\angle -50^\circ\right) = 45\angle -60^\circ \text{ VA}$$

$$S = |\mathbf{S}| = 45 \text{ VA}$$

$$\mathbf{S} = 45\angle -60^\circ = 45[\cos(-60^\circ) + j\sin(-60^\circ)] = 22.5 - j38.97$$

P= 22.5 W

Q= -38.97 VAR

$$\text{pf} = \cos(-60^\circ) = 0.5 \text{ (leading)}$$

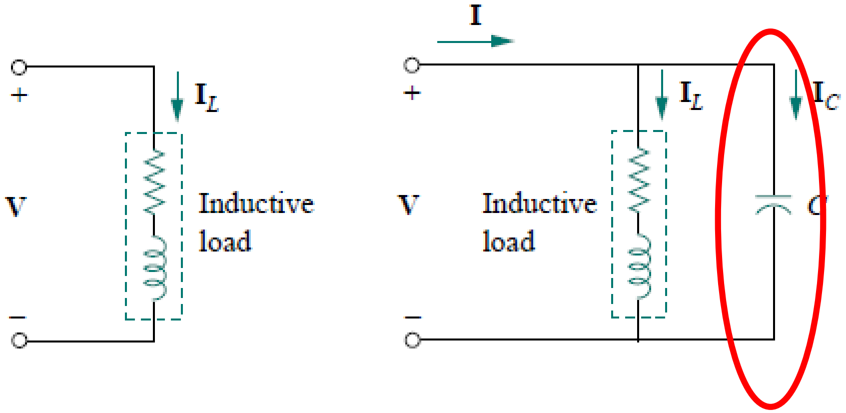
Correcção do factor de potência

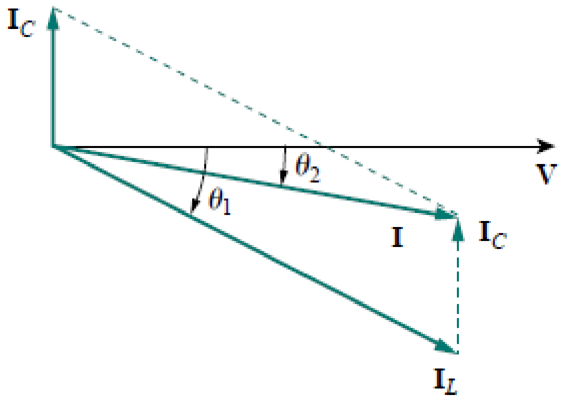
– as fontes de energia eléctrica (os geradores das centrais eléctricas) e as linhas ao terem de produzir e transportar energia reactiva têm, forçosamente, de diminuir a energia activa produzida ou transportada, de forma a não ultrapassarem a sua potência aparente nominal, uma vez que $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$;

Correcção do factor de potência

– as linhas de transmissão têm maiores perdas (as perdas associadas serão tanto maiores quanto maior for a corrente que as percorre $|\bar{I}| > |\bar{I}_a|$);
– as quedas de tensão nas linhas são maiores.

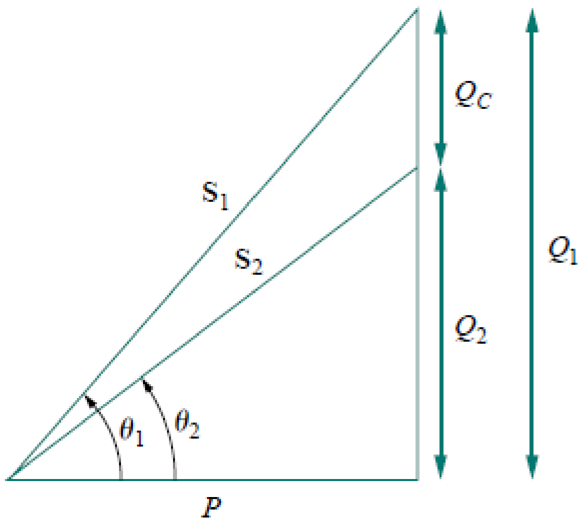
Tomemos um motor de uma máquina de lavar louça





Antes de introduzir o condensador a corrente IL era maior do a que resulta após introdução deste

Vejamos do ponto de vista do triângulo das potências



Inicialmente

$$P = S_1 \cos\theta_1, \qquad Q_1 = S_1 \sin\theta_1 = P\tan\theta_1$$

Queremos aumentar o factor de potência sem alterar a potência real

$$P = S_2 \cos\theta_2$$

A nova potência reactiva deve ser então

$$Q_2 = P\tan\theta_2$$

logo $Q_C = Q_1 - Q_2 = P(\tan\theta_1 - \tan\theta_2)$ mas $Q = \mathrm{Im}(\mathbf{S}) = I^2_{\mathrm{rms}}X$ $\quad Q_C = V^2_{\mathrm{rms}}/X_C = \omega C V^2_{\mathrm{rms}}$

logo

$$C = \frac{Q_C}{\omega V^2_{\mathrm{rms}}} = \frac{P(\tan\theta_1 - \tan\theta_2)}{\omega V^2_{\mathrm{rms}}}$$

Se por acaso o circuito em causa tem carácter capacitivo, então a compensação do factor de potência faz-se com a introdução de um indutor

As companhias de electricidade debitam aos clientes uma conta de electricidade que tem duas partes: uma fixa e uma variável