UNIVERSIDADE DE LISBOA - FCUL

FÍSICA/MECÂNICA DOS MEIOS CONTÍNUOS

Problemas - Série 5
Camada limite e instabilidades

1. a) Aplicando o rotacional à equação de Euler, mostre que

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}.$$

   b) Se o fluido for incompressível, interprete o resultado em termos da conservação das linhas de vorticidade.

   c) Mostre que para a equação de Navier-Stokes se obtem o resultado:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega}$$

   d) Mostre que a vorticidade se difunde no referencial que se move com o fluido e discuta o significado do coeficiente de difusão.

2. Considere um fluido em escoamento de Poiseuille num tubo cilíndrico com eixo paralelo a $\hat{\mathbf{z}}$.

   a) Mostre que no plano $y = 0$, $\omega_x = \omega_z = 0$ e

$$\omega_y = -\frac{\partial u_z}{\partial x} = -\frac{x}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

   b) Mostre que ω muda de sinal nos planos $y = 0$ e $x = 0$.

   c) Mostre que as linhas de vorticidade são anéis fechados, co-axiais com o tubo.

   d) Determine a direcção de difusão da vorticidade e discuta a sua evolução temporal.

   e) No estado estacionário, como pode a vorticiade ser conservada?

3. a) Usando a equação de Navier-Stokes em coordenadas cartesianas, e considerando um escoamento em 2D através de uma placa fina, mostre em que condição as equações para a camada limite se reduzem à equação da continuidade e

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2},$$

   onde x é a direção da corrente onde a placa está inserida e y é a direção normal à placa. Considere que a placa tem largura D na direção da corrente, espessura desprezável e comprimento $L \gg D$.

   b) Usando análise dimensional, mostre que as equações para a camada limite são auto semelhantes.

4. Considere a equação diferencial para a função $u(y)$:

$$\epsilon u'' + u' = 1, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 2,$$

   onde ϵ é uma constante positiva pequena.

a) Mostre que a solução é dada por:

$$u = y + \frac{1 - e^{-y/\epsilon}}{1 - e^{-1/\epsilon}}$$

b) Discuta os limites desta solução para y muito pequeno (da ordem de ϵ) ou $y \gg \epsilon$ se u for a velocidade de um fluido na direção x.

c) Considere $\epsilon = 0$ diretamente na equação diferencial e determine a solução. Esta solução corresponde ao limite $y \gg \epsilon$ da alínea b? O que significa isto?

5. Calcule o perfil de velocidades e a força de arrasto de um fluido que escoa sobre uma placa de comprimento L com velocidade U (longe da placa). Parte da solução deve ser numérica, pois a equação diferencial resultante não tem solução analítica.

6. O perfil de velocidades numa camada limite laminar sobre uma placa de comprimento L e ângulo de incidência zero, pode ser aproximado por um polinómio de grau 4

$$\frac{u}{u_\infty} = a_0 + a_1 \left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + a_4 \left(\frac{y}{\delta}\right)^4$$

   Determine os coeficientes do polinómio.

7. A instabilidade de Saffman-Taylor pode formar-se quando um fluido de viscosidade η empurra outro fluido mais viscoso (viscosidade η') num canal de placas paralelas, com separação d. A velocidade de escoamento perpendicular à interface entre os dois fluidos é U e a tensão superficial é σ. Determine que o vetor de onda mínimo da perturbação na interface que causa a instabilidade é dado por

$$k_c^2 = \frac{12U(\eta - \eta')}{\sigma d^2}.$$

8. Use o código fornecido (code4-von-karman-street.py) para visualizar os vórtices de von Kárman num fluido que escoa sobre um cilindro. Compare, para um determinado número de Reynolds, a frequência de oscilação com a obtida na tabela 1 da referência: Xiaoyi He and Gary D. Doolen, Phys. Rev. E, **56**, 434 (1997). Deixe o código correr cerca de uma hora, pois a instabilidade demora algum tempo para se formar.

9. Derive e discuta as condições para a instabilidade de Kelvin-Helmholtz.