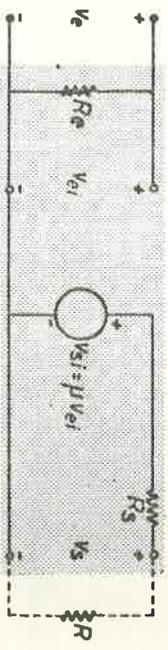


3.6 Um amplificador real está representado na figura por um circuito equivalente constituído por duas resistências e um amplificador de tensão ideal. Determine as impedâncias de entrada e saída do amplificador. Calcule o ganho em tensão  $A = v_e/v_s$  quando a resistência de carga tem o valor  $R$ . Qual é o ganho em potência nestas condições?



Prob. 3.6

#### 4. REDES DE DOIS PORTOS

Designam-se por redes de dois pares de terminais ou redes de dois portos (RDP) os circuitos que comunicam com o exterior por dois pares de terminais. Na fig. 4.1 a indica-se a sua representação genérica, bem como a convenção usualmente adoptada para os sinais das correntes e das tensões. Na fig. 4.1 b mostra-se uma RDP particular, um dos filtros descritos anteriormente; um outro exemplo é o amplificador discutido Prob. 3.6.

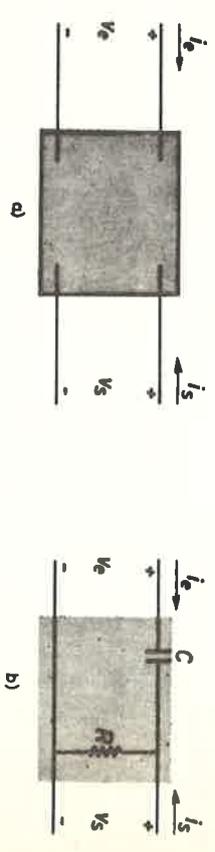


Fig. 4.1 Redes de dois portos.

Estamos interessados no estudo das RDP que apenas contêm elementos lineares e cujo comportamento é, consequentemente, linear; veremos que estas RDP constituem uma representação adequada, dentro de certas condições, para os componentes activos (transistores, válvulas, etc.). Convém salientar que o

grau de complexidade do circuito de uma RDP é arbitrário: o circuito pode conter uma só resistência, ou ser o circuito de um rádio entre os terminais de antena e os de saída para o altifalante.

#### 4.1. MATRIZ DE TRANSMISSÃO

Considere-se a RDP linear geral indicada na fig.4.1 a. Por de finição, as variáveis de entrada,  $v_e$  e  $i_e$ , e as variáveis de saída,  $v_s$  e  $i_s$ , estão ligadas por uma relação linear:

$$\begin{cases} v_e = t_{11} v_s - t_{12} i_s \\ i_e = t_{21} v_s - t_{22} i_s \end{cases} \quad (4.1)$$

Os coeficientes  $t_{kl}$  são, em geral, complexos e dependentes da frequência: os sinais em 4.1 correspondem à convenção geralmente adoptada. Este sistema de equações pode escrever-se, em notação matricial, na forma

$$\begin{bmatrix} v_e \\ i_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ -i_s \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

ou, ainda,

$$\begin{bmatrix} v_e \\ i_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ -i_s \end{bmatrix} \quad (4.2')$$

A matriz  $t$ , de elementos  $t_{kl}$ , define completamente a RDP; deve notar-se contudo que circuitos diferentes podem ser representados pela mesma matriz  $t$  (desde que obriguem às mesmas relações entre as variáveis de entrada e as de saída, como é o caso dos circuitos considerados no Prob. 4.5).

Para um dado circuito, os vários elementos  $t_{kl}$ , são determinados a partir das equações gerais a que o circuito obedece. Esta determinação pode ser simplificada se, alternada-

mente, se considerar que uma ou outra das variáveis de saída é nula; foi, aliás, o que fizemos ao determinar a atenuação dos filtros estudados anteriormente: a atenuação expressa por cada uma das eqs. 2.9, 2.10, 2.34 e 2.35 não é mais do que o inverso do elemento  $t_{11}$  da correspondente matriz de transmissão, isto é,  $1/t_{11}$ .

Para concretizar o conceito de matriz de transmissão através de exemplos muito simples, vamos determinar as matrizes correspondentes às duas RDP indicadas na fig.4.2. Para o circuito a) tem-se

$$\begin{cases} v_e = v_s - R i_s \\ i_e = -i_s \end{cases} \quad [t] = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Para o circuito b) tem-se ( $G = 1/R$ ):

$$\begin{cases} v_e = v_s \\ i_e = G v_s - i_s \end{cases} \quad [t] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ G & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$



Fig. 4.2 RDP correspondentes às matrizes de transmissão definidas nas eqs. 4.3 e 4.4.

A uma cascata de RDP, como a indicada na fig. 4.3, correspondente a uma matriz  $t$  que é o produto das matrizes de cada RDP pela ordem indicada na figura. Efectivamente, tem-se

$$\begin{bmatrix} v'_e \\ i'_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} \\ t'_{21} & t'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v''_e \\ -i''_e \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v''_e \\ -i''_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t''_{11} & t''_{12} \\ t''_{21} & t''_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v''_e \\ -i''_e \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Como  $v'_g = v''_g$  e  $-i'_g = i''_g$ , de 4.5 resulta imediatamente que

$$\begin{bmatrix} v'_g \\ i'_g \end{bmatrix} = [t] \begin{bmatrix} v''_g \\ -i''_g \end{bmatrix} \quad [t] = \begin{bmatrix} t' & \\ & t'' \end{bmatrix} \quad (4.6)$$



Fig. 4.3 Duas RDP em cascata.

As relações entre as variáveis de entrada e de saída numa cascata de RDP depende, evidentemente, da ordem em que estão dispostas as RDP; na álgebra das matrizes isto reflecte-se na não comutatividade da multiplicação.

Como um exemplo simples, considere-se uma cascata formada por duas RDP idênticas à indicada na fig. 4.2 a. A matriz da cascata é então

$$[t] = \begin{bmatrix} 1 & R1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R1 + R2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

A multiplicação das matrizes conduziu ao resultado que era de esperar: a resistência R equivalente a uma série de resistências  $R_1$  tem o valor  $R = \sum R_i$ . O resultado pertinente à associação em paralelo pode obter-se pela multiplicação de matrizes da forma 4.4.

A relação 4.1, que liga as variáveis de entrada e de saída de uma RDP, pode ser escrita tomando como variáveis independentes um par qualquer das 4 variáveis do sistema. Por exemplo, pode escrever-se na forma

$$\begin{cases} v_g = z_{11} i_g + z_{12} i_s \\ v_s = z_{21} i_g + z_{22} i_s \end{cases} \quad (4.8)$$

onde os coeficientes  $z_{kl}$  estão relacionados com os  $t_{mn}$  pelas equações ( $|t|$  é o determinante da matriz  $t$ )

$$\begin{aligned} z_{11} &= t_{11}/t_{21} & , & & z_{12} &= |t|/t_{21} \\ z_{21} &= 1/t_{21} & , & & z_{22} &= t_{22}/t_{21} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Satisfeitas estas relações, os sistemas 4.1 e 4.8 são completamente equivalentes. Pode salientar-se também que enquanto os elementos da matriz  $t$  têm diversas dimensões, os elementos de  $z$  têm todos as dimensões de uma impedância; por isso, a matriz  $z$  é usualmente designada por matriz impedância da RDP.

#### 4.2 REPRESENTAÇÃO DE UMA RDP POR CIRCUITOS DE THÉVENIN E DE NORTON

O teorema de Thévenin (Norton) permite a representação das propriedades terminais de qualquer circuito linear em termos de um gerador de tensão (corrente) em série (paralelo) com uma impedância. Assim, uma RDP, vista do porto de entrada, pode ser representada pelo circuito de Thévenin ou de Norton que lhe é equivalente; e o mesmo acontece no que respeita ao porto de saída. Temos, portanto, um total de quatro circuitos equivalentes para a representação de uma RDP por esta forma, correspondentes às quatro combinações possíveis de circuitos de Thévenin e de Norton à entrada e à saída. O sistema de equações equivalente a 4.1 mais apropriado a cada um destes circuitos é aquele em que a primeira equação está associada ao porto de entrada e a segunda ao porto de saída. Por exemplo, ao circuito da fig. 4.4 corresponde o sistema de equações 4.8; a correspondência entre os componentes do

circuito e os elementos da matriz  $z$  está indicada na figura.

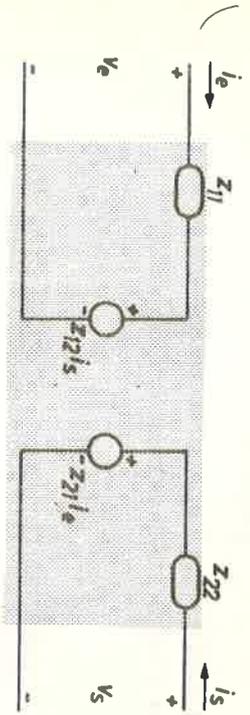


Fig. 4.4 Representação de uma RDP apropriada ao uso da matriz impedância.

Nas representações similares à da fig. 4.4, os circuitos de entrada e saída só comunicam através das fontes dependentes  $z_{12} i_s$  e  $z_{21} i_e$ ; por isso, mesmo quando o circuito que a RDP representa não contém elementos activos, essas fontes não são, geralmente, nulas. Para ilustrar este facto, e também a maneira como os elementos da matriz  $z$  podem ser determinados, considere-se o circuito na fig. 4.5 a.

O elemento  $z_{11}$  é a impedância de entrada com a saída em circuito aberto; nestas condições, uma corrente de entrada  $i_e$  provoca uma tensão  $v_e$  dada por

$$v_e = \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} i_e = 0,83 i_e$$

e, portanto,

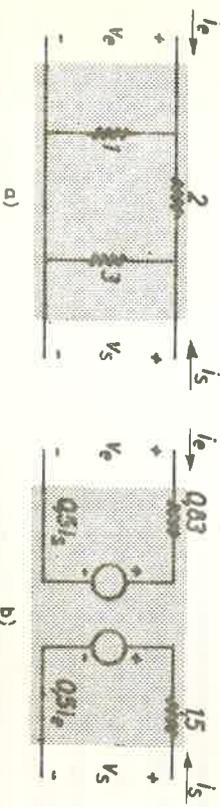


Fig. 4.5 RDP e respectiva representação associada à matriz  $z$

O elemento  $z_{22}$  é impedância de saída com a entrada em circuito aberto, isto é,

$$z_{22} = \frac{v_g}{i_g} \bigg|_{i_e = 0} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{1+2}} = 1,5 \Omega$$

O elemento  $z_{12}$  determina-se com a entrada em circuito aberto:

$$z_{12} = \frac{v_e}{i_g} \bigg|_{i_e = 0} = \frac{3}{(1+2)+3} \times 1 = 0,5 \Omega$$

Finalmente,  $z_{21}$  é dado por

$$z_{21} = \frac{v_g}{i_e} \bigg|_{i_g = 0} = \frac{1}{(2+3)+1} \times 3 = 0,5 \Omega$$

O circuito equivalente assim determinado está indicado na fig. 4.5 b.

O sistema de equações apropriado à representação de uma RDP por circuitos de Norton à entrada e à saída (fig. 4.6) é

$$\begin{bmatrix} i_e \\ i_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_e \\ v_s \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Os elementos  $y_{k\ell}$  têm as dimensões de admitância. A matriz admitância  $y$  é, como se vê de 4.8 e 4.10, a matriz inversa de  $z$ ; a relação entre os elementos  $y_{k\ell}$  e os  $z_{mn}$  é, pois,

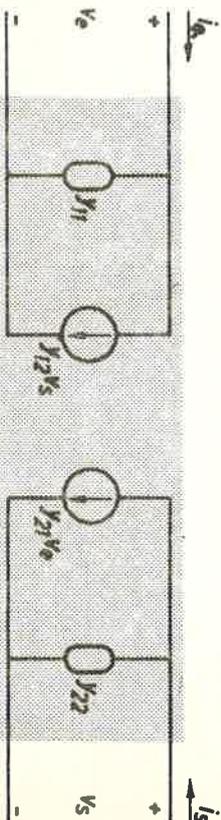


Fig. 4.6 Representação de uma RDP apropriada ao uso da matriz admitância.

$$\begin{cases} y_{kk} = \frac{z_{mm}}{|z|}, & k \neq m \\ y_{kl} = -\frac{z_{kl}}{|z|}, & k \neq l \end{cases} \quad (4.11)$$

A resolução das equações de uma RDP relativamente às variáveis  $v_e$  e  $i_s$  conduz à matriz usualmente designada por matriz híbrida,

$$\begin{bmatrix} v_e \\ i_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e \\ v_s \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Os elementos  $h_{kl}$  têm dimensões diversas (daí a designação de híbridos); as suas relações com os elementos das matrizes  $z$  e  $y$  estão indicadas no Prob. 4.7.

A matriz híbrida, como veremos, é frequentemente utilizada na representação do comportamento de transistores a baixas frequências; o circuito equivalente de uma RDP que lhe é apropriado está indicado na fig. 4.7. O elemento  $h_{11}$ , convencionalmente designado por  $h_i$  (de input impedance) tem as dimensões de uma impedância; o seu valor é o valor da impedância de entrada com a saída em curto-circuito,

$$h_i \equiv h_{11} = \left. \frac{v_e}{i_e} \right|_{v_s = 0} \quad (4.13)$$

O elemento  $h_{12}$  é uma quantidade sem dimensões igual à razão entre a tensão de entrada e a de saída com a entrada em circuito aberto, isto é, igual ao inverso do ganho em tensão em circuito aberto; é convencionalmente designado por  $h_r$  (de reverse voltage gain),

$$h_r \equiv h_{12} = \left. \frac{v_e}{v_s} \right|_{i_s = 0} \quad (4.14)$$

O elemento  $h_{21}$  é o ganho em corrente com a saída em curto-circuito e é designado por  $h_f$  (de forward current gain),

$$h_f \equiv h_{21} = \left. \frac{i_s}{i_e} \right|_{v_s = 0} \quad (4.15)$$

Finalmente,  $h_{22}$ , designado por  $h_o$  (de output admittance, é a admittância de saída com a entrada em circuito aberto:

$$h_o \equiv h_{22} = \left. \frac{i_s}{v_s} \right|_{i_e = 0} \quad (4.16)$$

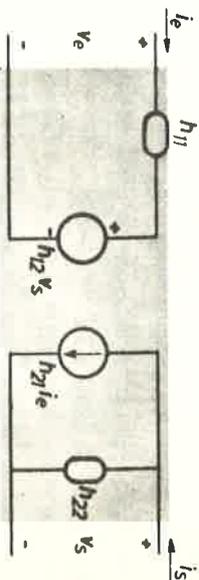


Fig. 4.7 Representação de uma RDP apropriada ao uso da matriz híbrida.

As expressões 4.13 a 4.16 sugerem processos de determinação dos elementos  $h_{kl}$  frequentemente utilizados na prática (na secção 6.4.1 discute-se o caso em que a RDP representa um transistor).

#### 4.3 REPRESENTAÇÃO DE UMA RDP POR CIRCUITOS EM T E EM $\pi$

Na secção anterior foram discutidas representações gerais de uma RDP, utilizando os circuitos equivalentes de Thévenin e/ou de Norton para a representação de cada um dos portos. Nessas representações apareciam, consequentemente, duas fontes controladas. A abordagem do problema da representação de uma RDP pode ser feita diferentemente, procurando-se representações em termos de uma só fonte dependente; indicam-se a seguir duas dessas representações: os chamados circuitos equivalentes em T e em  $\pi$ .